

*И. П. МЫСОВСКИХ*

# Лекции по методам вычислений



И. П. МЫСОВСКИХ

ЛЕКЦИИ  
ПО  
МЕТОДАМ ВЫЧИСЛЕНИЙ



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
МОСКВА 1962

518  
M 95

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	5
<b>Глава I. Численное решение уравнений</b>	
§ 1. Нахождение начального приближения . . . . .	7
§ 2. Метод хорд . . . . .	13
§ 3. Метод итерации . . . . .	16
§ 4. Метод итерации для решения систем уравнений . . . . .	29
§ 5. О вычислении значения многочлена и его производных . . . . .	34
§ 6. Метод Ньютона . . . . .	44
§ 7. Теоремы о сходимости метода Ньютона . . . . .	48
§ 8. Замечания о практическом применении метода Ньютона . . . . .	63
§ 9. Метод Лобачевского . . . . .	71
§ 10. Методы выделения множителей . . . . .	82
<b>Глава II. Алгебраическое интерполирование</b>	
§ 1. Введение . . . . .	94
§ 2. Конечные разности . . . . .	96
§ 3. Разностные отношения . . . . .	102
§ 4. Общая задача интерполирования . . . . .	109
§ 5. Интерполирование по значениям функции . . . . .	111
§ 6. Об остаточном члене интерполирования . . . . .	117
§ 7. Интерполирование по равноотстоящим узлам. Формулы Ньютона для интерполирования в начале и в конце таблицы . . . . .	120
§ 8. Интерполирование по равноотстоящим узлам. Формулы Гаусса, Стирлинга и Бесселя . . . . .	126
§ 9. Обратное интерполирование. Безразностные схемы интерполирования . . . . .	135
§ 10. Интерполирование Эрмита . . . . .	139
§ 11. Численное дифференцирование . . . . .	150
<b>Глава III. Приближенное вычисление интегралов</b>	
§ 1. Интерполяционные квадратурные формулы . . . . .	157
§ 2. Простейшие интерполяционные квадратурные формулы . . . . .	161
§ 3. Вычисление интегралов от периодических функций и квадратурная формула прямоугольников . . . . .	174

§	4. Квадратурные формулы типа Гаусса . . . . .	177
§§	5. Многочлены Лежандра и формула Гаусса . . . . .	188
§	6. Другие частные случаи квадратурных формул типа Гаусса . . . . .	195
§	7. Квадратурные формулы А. А. Маркова . . . . .	205
§§§	8. Квадратурная формула Чебышева . . . . .	216
§§§§	9. Числа и многочлены Бернулли . . . . .	220
§	10. Представление функции при помощи многочленов Бернулли . . . . .	230
§	11. Формула Эйлера — Маклорена . . . . .	235
§	12. Заключительные замечания . . . . .	242

#### Глава IV. Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

§	1. Введение . . . . .	247
§§	2. Метод Рунге — Кутты . . . . .	249
§§§	3. О разностных методах решения задачи Коши . . . . .	259
§§§§	4. Экстраполяционный метод Адамса . . . . .	270
§§§§§	5. Построение начала таблицы . . . . .	274
§§§§§§	6. Интерполяционный метод Адамса . . . . .	283
§§§§§§§	7. Метод типа Коуэлла . . . . .	292
§	8. Численное интегрирование систем уравнений первого порядка . . . . .	305
§§	9. Экстраполяционный метод Штермера . . . . .	307
§§§	10. Интерполяционный метод Штермера . . . . .	314
§§§§	11. Метод Коуэлла . . . . .	321
§§§§§	12. Об оценке ошибки метода Адамса . . . . .	327

Литература . . . . .	341
----------------------	-----

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В основу книги положен курс лекций по методам вычислений (часть I), читаемый автором студентам — вычислителям третьего курса математико-механического факультета Ленинградского государственного университета. В книге рассмотрены лишь те вопросы, которые имеют, по мнению автора, наибольшее значение в методах вычислений. Это позволило сделать книгу сравнительно небольшой по объему и, как надеется автор, доступной достаточно широкому кругу читателей. Книгой могут пользоваться не только студенты дневных отделений, но и заочники, а также лица, связанные с вычислительной практикой и желающие повысить свою теоретическую подготовку.

Автор приносит глубокую благодарность В. И. Крылову, организовавшему курс методов вычислений (часть I) в ЛГУ, за большую помощь и постоянный интерес к работе над книгой, а также за внимательный просмотр рукописи.

Автор весьма признателен Г. П. Акилову и И. К. Даугавету за ряд ценных советов и замечаний.

*Автор*

## ГЛАВА I

### ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

В настоящей главе рассматриваются различные методы численного решения уравнений вида

$$P(x) = 0,$$

где  $P(x)$  — некоторая функция, вообще говоря, комплекснозначная. Хотя в отдельных, правда, очень редких случаях можно указать „точное“ значение корня указанного уравнения, однако получающиеся при этом формулы обычно громоздки и потому затруднительны для использования. В связи с отмеченным обстоятельством значительное распространение получили методы приближенного нахождения корней рассматриваемого уравнения. Ниже излагаются следующие численные методы для решения уравнений: метод хорд, метод итерации, метод Ньютона, метод Лобачевского и методы выделения множителей. Метод итерации и метод Ньютона изложены и для систем уравнений.

#### § 1. Нахождение начального приближения

Строго говоря, термин „приближенное значение корня“ лишен смысла, поскольку, если не говорить о точности приближенного равенства, любые два числа приближенно равны. Тем не менее все рассматриваемые в настоящей главе методы, за исключением метода Лобачевского, могут быть реализованы, если известно более или менее близкое к действительному приближенное значение корня. Именно такое приближение и имеется в виду, когда говорят о начальном приближении.

В настоящем параграфе мы рассмотрим способы определения начальных приближений к корням уравнения

$$P(x) = 0. \quad (1.1)$$

Для нахождения начальных приближений к корням часто применяют графические методы. Пусть, например,  $P(x)$  — вещественная функция и речь идет об определении вещественных корней уравнения (1.1). Графический метод основан на том геометрическом факте, что вещественные корни уравнения (1.1) представляют собой точки пересечения графика функции  $y = P(x)$  с осью  $x$ . Построив график функции  $y = P(x)$ , можем определить приближенные значения абсцисс точек пересечения графика с осью  $x$ . Эти приближенные значения абсцисс и могут быть приняты за начальные приближения к корням уравнения (1.1).

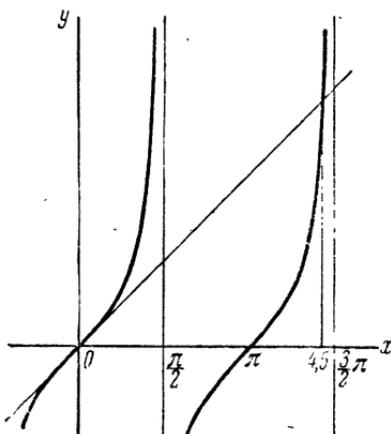


Рис 1.

Иногда бывает целесообразно записать уравнение (1.1) в виде

$$P_1(x) = P_2(x).$$

Вещественные корни такого уравнения суть абсциссы точек пересечения графиков функций  $y = P_1(x)$  и  $y = P_2(x)$ .

**Пример 1.** Найдём начальное приближение к наименьшему положительному корню уравнения

$$x = \operatorname{tg} x.$$

Возьмем  $P_1(x) = x$  и  $P_2(x) = \operatorname{tg} x$ . Графики функций  $y = x$  и  $y = \operatorname{tg} x$  изображены на рис. 1. Из рисунка видно, что в качестве начального приближения можно взять  $x_0 = 4,5$ .

Для определения начального приближения можно также строить таблицу значений функции  $y = P(x)$ .

**Пример 2.** Найти начальное приближение к корню уравнения

$$P(x) \equiv x^3 + x - 1 = 0.$$

Строим таблицу значений функции  $P(x)$ :

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$
$P(x)$	$-\infty$	$-3$	$-1$	$1$	$+\infty$

Из таблицы видно, что за начальное приближение  $x_0$  можно взять 0 или 1.

Графический метод можно применять также для нахождения начального приближения к комплексному корню. Нужно отделить вещественную и мнимую части  $P(x)$ :

$$P(x) = X(u, v) + iY(u, v), \quad x = u + iv,$$

и построить в системе координат  $(u, v)$  графики кривых, определяемых уравнениями

$$X(u, v) = 0, \quad Y(u, v) = 0.$$

Точки пересечения этих кривых, рассматриваемые как точки плоскости комплексной переменной  $x = u + iv$ , являются корнями уравнения (1.1). На этом и основан графический метод определения начальных приближений к комплексным корням уравнения (1.1).

**Пример 3.** Найдём начальное приближение к комплексному корню уравнения

$$P(x) \equiv x^4 - 2,7x^3 + 4x^2 - 3,3x + 1 = 0. \quad (1.2)$$

Чтобы отделить вещественную и мнимую части, положим  $x = u + iv$  и запишем  $P(u + iv)$  по формуле Тэйлора в окрестности  $u$  по степеням  $iv$ :

$$P(x) = P(u) + ivP'(u) - \frac{v^2}{2}P''(u) - \frac{iv^3}{6}P'''(u) + \frac{v^4}{24}P^{(IV)}(u).$$

Получим

$$P(x) = X(u, v) + iY(u, v),$$

где

$$X(u, v) = P(u) - \frac{P''(u)}{2}v^2 + v^4,$$

$$Y(u, v) = P'(u)v - \frac{P'''(u)}{6}v^3.$$

На рис. 2 изображены графики кривых, определяемых уравнениями

$$X(u, v) = 0, \quad Y(u, v) = 0 \quad (1.3)$$

на промежутке  $0 \leq u \leq 0,6$  и при  $v \geq 0$ . Из рисунка видно, что за начальное приближение к комплексному корню уравнения (1.2) можно взять

$$x_0 = u_0 + iv_0 = 0,52 + i1,16,$$

а  $u_1 = 0,66$  — за приближение к вещественному корню.

Графики кривых, определяемых уравнениями (1.3), строились следующим образом. При заданном  $u$  первое из уравнений (1.3) является квадратным уравнением относительно  $v^2$ , второе распадается на два уравнения:  $v = 0$  и уравнение первой степени относительно  $v^2$ . Коэффициентами этих уравнений с точностью до знака являются числа

$$P(u), \quad P'(u), \quad \frac{P''(u)}{2}, \quad \frac{P'''(u)}{6}.$$

Эти числа были вычислены с двумя десятичными знаками при  $u = k \cdot 0,2$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ , и после этого найдены неотрицательные корни уравнений

$$X(k0,2; v) = 0, \quad Y(k0,2; v) = 0, \\ k = 0, 1, 2, 3.$$

Нетрудно видеть, что прием, который применялся в этом примере, является общим. Его можно применять для отыскания начального приближения к комплексному корню алгебраического уравнения любой степени  $n$ . Если  $n$  (или  $n-1$ ) четное, то вопрос сводится к нахождению вещественных корней двух семейств уравнений:

первое семейство состоит из уравнений степени  $\frac{n}{2}$  (или  $\frac{n-1}{2}$ ) относительно  $v^2$ , второе распадается на уравнение  $v = 0$  и уравнение степени  $\frac{n-2}{2}$  (или  $\frac{n-1}{2}$ ) относительно  $v^2$ .

Прием этот требует больших вычислений, поэтому прежде чем применять его к уравнению  $P_n(x) = 0$ , где  $P_n(x)$  — многочлен степени  $n$  с вещественными коэффициентами, следует найти все вещественные корни этого уравнения:  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , составить многочлен

$$Q_k(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_k)$$

и выполнить деление  $P_n(x)$  на  $Q_k(x)$ :

$$P_n(x) = Q_k(x) R_{n-k}(x).$$

Мы считаем  $n-k$  четным и  $\geq 2$ . Если  $n-k=2$ , то  $R_{n-k}(x)$  — квадратный трехчлен и его корни легко найти. Если  $n-k \geq 4$ , то для определения начального приближения к комплексным корням многочлена  $R_{n-k}(x)$  (и, следовательно, многочлена  $P_n(x)$ ) можно применить указанный прием.

Иногда удается подобрать уравнение, близкое к (1.1) и такое, что корни его легко находятся. Тогда естественно и принять их за начальные приближения к корням уравнения (1.1).

**Пример 4.** Найти начальное приближение к корню уравнения

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} - 1 = 0.$$

Заменяя ряд частичной суммой первых двух членов, получим квадратное уравнение

$$\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - 1 = 0.$$

Положительный корень этого уравнения  $-1 + \sqrt{5} \cong 1,2$  принимаем за начальное приближение к корню исходного уравнения. Отрицательный корень выходит за пределы промежутка сходимости ряда, фигурирующего в уравнении.

Графически можно разыскивать начальное приближение к вещественному решению системы двух уравнений с двумя неизвестными

$$P(\xi, \eta) = 0, \quad Q(\xi, \eta) = 0,$$

где  $P(\xi, \eta)$  и  $Q(\xi, \eta)$  — вещественные функции.

**Пример 5.** Найдем начальное приближение к решению системы

$$P(\xi, \eta) \equiv \xi^3 + \eta^3 - 4 = 0,$$

$$Q(\xi, \eta) \equiv \xi^4 + \eta^2 - 3 = 0.$$

На рис. 3 изображены графики функций, определяемых уравнениями

$$\xi^3 + \eta^3 - 4 = 0, \quad \xi^4 + \eta^2 - 3 = 0.$$

Координаты точек пересечения графиков и дают решения системы. Из рисунка видно, что система имеет два решения. За начальные приближения к этим решениям можно взять

$$\begin{aligned}\xi_0^{(1)} &= 1, & \eta_0^{(1)} &= 1,4; \\ \xi_0^{(2)} &= -0,7, & \eta_0^{(2)} &= 1,6.\end{aligned}$$

Вопрос об определении начального приближения к решению системы уравнений с тремя и более неизвестными представляет значительные трудности.

В случае системы трех уравнений

$$\begin{aligned}P(\xi, \eta, \zeta) &= 0, \\ Q(\xi, \eta, \zeta) &= 0, \\ R(\xi, \eta, \zeta) &= 0,\end{aligned}\quad (1.4)$$

где  $P$ ,  $Q$  и  $R$  — вещественные функции, начальное приближение к ее вещественному решению можно разыскивать следующим образом. Рассмотрим множество чисел  $Z = \{\zeta\}$ , где  $\zeta$  — вещественное число и

такое, что система, составленная из первых двух уравнений (1.4)

$$\begin{aligned}P(\xi, \eta, \zeta) &= 0, \\ Q(\xi, \eta, \zeta) &= 0,\end{aligned}\quad (1.5)$$

разрешима относительно  $\xi$  и  $\eta$ . Множество  $Z$  не пустое, если система (1.4) имеет хоть одно вещественное решение. Решение системы (1.5) при  $\zeta \in Z$  обозначим

$$\xi = \xi(\zeta), \quad \eta = \eta(\zeta).\quad (1.6)$$

Если система (1.5) имеет не единственное решение, то функции (1.6) будут многозначными. Рассмотрим функцию от  $\zeta$

$$\varphi(\zeta) = R(\xi(\zeta), \eta(\zeta), \zeta),$$

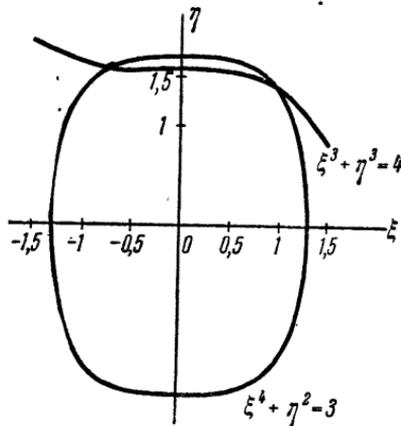


Рис. 3.

где  $\xi(\zeta)$  и  $\eta(\zeta)$  определены формулами (1.6). Функция  $\varphi(\zeta)$  определена на множестве  $Z$  и может оказаться многозначной. Если система (1.4) имеет вещественное решение, то функция  $\varphi(\zeta)$  имеет вещественный корень. Наоборот, вещественному корню функции  $\varphi(\zeta)$  отвечает вещественное решение системы (1.4).

Таким образом, задача нахождения начального приближения к решению системы (1.4) сводится к графическому или табличному определению корня функции  $\varphi(\zeta)$ . При этом приближенные значения функций (1.6) — приближенные значения решений системы (1.5) — можно находить графически.

Для определенности мы исключали первые две неизвестные  $\xi$  и  $\eta$  с помощью первых двух уравнений системы (1.4). При действительных вычислениях следует исключать те неизвестные и с помощью тех двух уравнений системы (1.4), для которых система, аналогичная (1.5), является наиболее простой.

## § 2. Метод хорд

Метод хорд применяется для отыскания вещественных корней уравнения  $P(x) = 0$ , (2.1)

где функция  $P(x)$  предполагается вещественной и непрерывной. Пусть нам известен промежуток  $[a, b]$ , для которого выполнено условие

$$P(a)P(b) < 0.$$

Тогда внутри этого промежутка имеется корень уравнения (2.1). Мы будем предполагать, что в  $[a, b]$  имеется только один корень уравнения (2.1). Единственность заведомо будет иметь место, если функция  $P(x)$  строго монотонна в  $[a, b]$ , в частности, если она дифференцируема и  $P'(x) > 0$  (или  $P'(x) < 0$ ) в  $[a, b]$ .

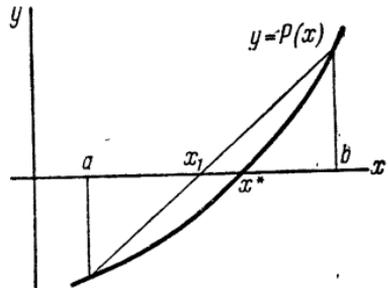


Рис. 4.

Заменим график функции  $y = P(x)$  на промежутке  $[a, b]$  прямой, проходящей через точки  $(a, P(a))$  и  $(b, P(b))$  (см. рис. 4). Обозначим через  $x_1$  точку пересечения этой

прямой с осью  $x$ . Точку  $x_1$  принимаем за первое приближение к корню. Если  $P(x_1) \neq 0$ , то либо  $P(a)P(x_1) < 0$ , либо  $P(x_1)P(b) < 0$ . Пусть, например,  $P(x_1)P(b) < 0$ . Отправляясь от промежутка  $[a_1, b_1] \equiv [x_1, b]$ , найдем следующее приближение к корню  $x_2$  и т. д.

Напишем уравнение прямой, проходящей через точки  $(a, P(a))$  и  $(b, P(b))$ :

$$y = P(a) + \frac{P(b) - P(a)}{b - a} (x - a).$$

Точка пересечения ее с осью  $x$  есть

$$x_1 = a - \frac{P(a)}{P(a, b)}, \quad (2.2)$$

где

$$P(a, b) = \frac{P(b) - P(a)}{b - a}.$$

Это и есть расчетная формула, применяемая в методе хорд.

Можно доказать, что  $x_n \rightarrow x^*$  при  $n \rightarrow \infty$ , где  $x^*$  — иско-мый корень.

Вычисление корня методом хорд можно расположить в следующие две схемы:

Схема 1

$x$	...	$P(x)$
$a$	...	$P(a)$
$b$	...	$P(b)$
$x_1$	...	$P(x_1)$

Схема 2

$n$	$a_n$	$b_n$	$b_n - a_n$	$P(a_n)$	$P(b_n)$	$P(b_n) - P(a_n)$	$P(a_n, b_n)$	$\Delta_n =$ $-\frac{P(a_n)}{P(a_n, b_n)}$	$x_{n+1} =$ $x_n + \Delta_n$
0	$a$	$b$	$b - a$	$P(a)$	$P(b)$	$P(b) - P(a)$	$P(a, b)$	$\Delta_0$	$x_1$
1	$a_1$	$b_1$							

Сначала вычисляем значения  $P(a)$  и  $P(b)$ . Все записи при этих вычислениях производятся в первых двух строках схемы 1. Далее заполняем строку, отвечающую  $n=0$ , в схеме 2. Получим  $x_1$ . Теперь мы можем заполнить третью строку схемы 1 и получить  $P(x_1)$ . В зависимости от знака  $P(x_1)$  определяем числа  $a_1$  и  $b_1$  и заполняем строку  $n=1$  схемы 2. Получим  $x_2$  и т. д.

**Пример.** Вычислим вещественный корень уравнения

$$P(x) \equiv x^3 + x - 1 = 0.$$

Возьмем  $a=0$  и  $b=1$ . Результаты вычислений приведены в табл. 1 и 2. После того как мы нашли  $P(0,6364) = -0,1059$ , видим, что нецелесообразно брать

$$[a_2, b_2] = [0,6364; 1],$$

так как правый конец этого промежутка 1 далек от корня ( $P(1) = 1$ ). Поэтому берем

$$[a_2, b_2] = [0,6364; 0,7],$$

предварительно убедившись, что  $P(0,7) > 0$ .

Мы остановили вычисления, так как  $x_4$  и  $x_5$  совпадают в пределах четырех десятичных знаков. Чтобы получить более точное значение корня, нужно вести дальнейшие вычисления с большим числом знаков.

Таблица 1

$x$	$x^2$	$x^3$	$P(x)$
0	0	0	-1
1	1	1	1
0,5	0,25	0,125	-0,375
0,6364	0,4050	0,2577	-0,1059
0,7	0,49	0,343	0,043
0,6816	0,4646	0,3167	-0,0017
0,6823	0,4655	0,3176	-0,0001

Таблица 2

$n$	$a_n$	$b_n$	$b_n - a_n$	$P(a_n)$	$P(b_n)$	$P(b_n) - P(a_n)$	$P(a_n, b_n)$	$\Delta_n$	$x_{n+1} = x_n + \Delta_n$
0	0	1	1	-1	1	2	2	0,5	0,5
1	0,5	1	0,5	-0,375	1	1,375	2,75	0,1364	0,6364
2	0,6364	0,7	0,0636	-0,1059	0,043	0,1489	2,341	0,0452	0,6816
3	0,6816	0,7	0,0184	-0,0017	0,043	0,0447	2,429	0,0007	0,6823
4	0,6823	0,7	0,0177	-0,0001	0,043	0,0431	2,435	0,0000	0,6823

### § 3. Метод итерации

Метод итерации применяется к отысканию как вещественных, так и комплексных корней уравнения

$$P(x) = 0.$$

Будем предполагать, что имеется начальное приближение  $x_0$  к корню уравнения. Для применения метода итерации необходимо уравнение преобразовать в эквивалентное уравнение вида

$$x = \varphi(x). \quad (3.1)$$

Такое преобразование можно произвести многими способами, например:

$$x = x + CP(x), \quad C \neq 0.$$

Метод итерации сводится к следующему. Определим последовательность чисел  $\{x_n\}$ :

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

Если последовательность  $\{x_n\}$  имеет предел  $x^*$  и функция  $\varphi(x)$  непрерывна, то  $x^*$  — решение уравнения (3.1). Чтобы убедиться в этом, достаточно перейти к пределу в соотношении (3.2) при  $n \rightarrow \infty$ . Числа  $x_n$  и принимаются за приближенные значения корня.

Сразу же заметим, что последовательность  $\{x_n\}$  далеко не всегда сходится. Ниже доказана теорема, которая дает достаточные условия сходимости последовательности  $\{x_n\}$ .

Дадим геометрическую интерпретацию метода итерации для того случая, когда функция  $\varphi(x)$  — правая часть уравнения (3.1) — вещественная и разыскивается вещественный корень. На рис. 5 изображены графики функций

$y=x$  и  $y=\varphi(x)$ . Абсцисса точки их пересечения  $x^*$  — искомый корень,  $x_0$  — начальное приближение. Чтобы определить  $x_1$  — первое приближение к корню, проведем через  $x_0$  прямую, параллельную оси  $y$ , до пересечения с кривой  $y=\varphi(x)$ . Точку пересечения обозначим через  $M$ . Из точки  $M$  проводим прямую, параллельную оси  $x$ , до пересечения с прямой  $y=x$  в точке  $N$ . Очевидно, что абсцисса точки  $N$  совпадает с  $x_1$ .

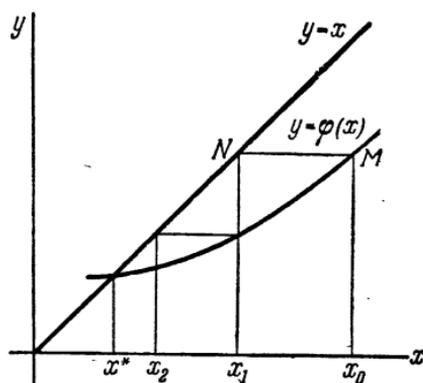


Рис. 5.

Докажем теорему о сходимости метода итерации.

**Теорема 1.** Пусть для уравнения (3.1)  $x = \varphi(x)$  и начального приближения  $x_0$  выполнены условия:

1) для любых  $x'$  и  $x''$  из круга

$$|x - x_0| \leq \delta \quad (3.3)$$

функция  $\varphi(x)$  удовлетворяет неравенству

$$|\varphi(x') - \varphi(x'')| \leq q |x' - x''|, \quad (3.4)$$

где  $0 < q < 1$ ;

2) выполнено неравенство

$$\frac{t}{1-q} \leq \delta, \quad (3.5)$$

где  $t = |x_0 - \varphi(x_0)|$ .

Тогда уравнение (3.1) имеет в круге (3.3) единственный корень  $x^*$ , к которому сходятся последовательные

приближения  $x_n$ , при этом быстрота сходимости определяется неравенством

$$|x_n - x^*| \leq \frac{m}{1-q} q^n. \quad (3.6)$$

Доказательство. Установим, что имеют место неравенства

$$|x_k - x_{k-1}| \leq m q^{k-1} \quad (3.7)$$

при  $k = 1, 2, 3, \dots$

Отметим, что выполнение неравенств (3.7) при  $k = 1, 2, \dots, N$  влечет за собой принадлежность  $x_1, x_2, \dots, x_N$  кругу (3.3). Для  $1 \leq p \leq N$  имеем

$$\begin{aligned} |x_p - x_0| &\leq |x_p - x_{p-1}| + |x_{p-1} - x_{p-2}| + \dots + |x_1 - x_0| \leq \\ &\leq m q^{p-1} + m q^{p-2} + \dots + m < \frac{m}{1-q} \leq \delta, \end{aligned}$$

откуда

$$|x_p - x_0| < \frac{m}{1-q} \leq \delta, \quad (3.8)$$

а это и означает, что  $x_p$  принадлежит кругу (3.3).

Неравенства (3.7) будем доказывать методом математической индукции. При  $k = 1$  неравенство (3.7) выполнено:

$$|x_1 - x_0| = |\varphi(x_0) - x_0| = m$$

(оно обращается в равенство). Предположим, что неравенство (3.7) выполнено при  $k = 1, 2, \dots, n$  и докажем, что оно имеет место при  $k = n + 1$ .

По замечанию из индуктивного предположения вытекает, что  $x_1, x_2, \dots, x_n$  принадлежат кругу (3.3). В силу определения последовательности (3.2) имеем

$$x_{n+1} - x_n = \varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1}).$$

Так как  $x_n$  и  $x_{n-1}$  принадлежат кругу (3.3), то модуль правой части последнего равенства можно оценить, пользуясь условием (3.4):

$$|x_{n+1} - x_n| = |\varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1})| \leq q |x_n - x_{n-1}|.$$

По индуктивному предположению неравенство (3.7) при  $k = n$  имеет место, и мы получаем

$$|x_{n+1} - x_n| \leq q m q^{n-1} = m q^n.$$

Утверждение доказано. Неравенства (3.7) выполнены при всех  $k = 1, 2, 3, \dots$  и, следовательно, все  $x_k$  принадлежат кругу (3.3).

На основании (3.7) имеем

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &\leq |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + \dots + |x_{n+1} - x_n| \leq \\ &\leq mq^{n+p-1} + \dots + mq^n < \frac{m}{1-q} q^n \end{aligned}$$

или

$$|x_{n+p} - x_n| < \frac{m}{1-q} q^n \quad (3.9)$$

при любом  $p = 1, 2, 3, \dots$

Так как  $0 < q < 1$ , то последовательность  $\{x_n\}$  фундаментальная и она имеет предел  $x^*$ . Последовательность  $\{x_n\}$  принадлежит кругу (3.3), поэтому  $x^*$  также принадлежит этому кругу. В силу непрерывности  $\varphi(x)$ , вытекающей из условия (3.4),  $x^*$  является корнем уравнения (3.1).

Докажем единственность  $x^*$  в круге (3.3). Предположим, что  $\tilde{x}$  — некоторый корень уравнения (3.1) из круга (3.3) и докажем, что  $\tilde{x} = x^*$ . Имеем на основании (3.4)

$$|\tilde{x} - x^*| = |\varphi(\tilde{x}) - \varphi(x^*)| \leq q |\tilde{x} - x^*|,$$

что возможно лишь при  $\tilde{x} = x^*$ , так как  $0 < q < 1$ .

Чтобы установить неравенство (3.6), характеризующее быстроту сходимости, достаточно в неравенстве (3.9) перейти к пределу при  $p \rightarrow \infty$ . Теорема доказана.

Если  $\varphi(x)$  — функция комплексного переменного, дифференцируемая в круге (3.3), и при этом для всех точек круга выполнено неравенство

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1, \quad (3.10)$$

то функция  $\varphi(x)$  удовлетворяет условию 1) теоремы 1.

Действительно, пусть  $x'$  и  $x''$  принадлежат кругу (3.3). Из формулы

$$\varphi(x'') - \varphi(x') = \int_{x'}^{x''} \varphi'(x) dx,$$

где интеграл берется по прямолинейному отрезку, соединяющему точки  $x'$  и  $x''$ , получим

$$|\varphi(x') - \varphi(x'')| \leq \max |\varphi'(x)| \cdot |x' - x''| \leq q |x' - x''|.$$

Если функция  $\varphi(x)$  вещественная и разыскивается вещественный корень, то естественно и начальное приближение  $x_0$  брать вещественным. В этом случае теорема 1 остается справедливой, если в условии 1) круг (3.3) заменить отрезком вещественной оси

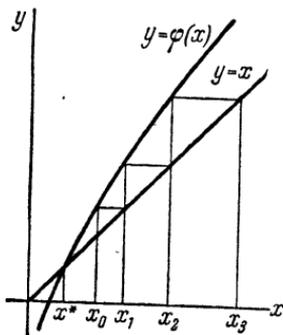


Рис. 6.

к  $x^*$ . Более того, очевидно, что  $\{x_n\}$  не будет сходиться к  $x^*$ , если  $x_0$  выбрать как угодно близко к  $x^*$ .

Запись результатов вычислений естественно производить по схеме:

$n$	$x_n$	$\dots$	$\varphi(x_n)$
0	$x_0$	$\dots$	$\varphi(x_0)$
1	$x_1$	$\dots$	$\varphi(x_1)$

Вычисления нужно вести до тех пор, пока не совпадут два последовательных приближения  $x_n$  и  $x_{n+1}$  с требуемой точностью. Этим правилом можно пользоваться с уверенностью, когда в окрестности корня [в круге (3.3)]  $|\varphi'(x)| \leq q < 1$  и  $q$  не близко к единице. Если  $q$  близко к единице, то могут быть последовательные значения  $x_n$  и  $x_{n+1}$ , близкие друг к другу и далекие от корня. Рассмотрим уравнение

$$x = 0,999x.$$

Здесь  $\varphi(x) = 0,999x$  и  $q = 0,999$ . Будем вычислять корень этого уравнения методом итерации, взяв за начальное приближение  $x_0 = 1$ . Тогда  $x_1 = 0,999$  и  $x_0 - x_1 = 0,001$ , в то время как корень уравнения  $x^* = 0$  отличается от  $x_1$  на  $0,999$ .

Применение теоремы 1 о сходимости метода итерации в вычислительной практике связано со следующим затруднением. При действительном вычислении корня уравнения (3.1) методом итерации счет ведется с определенным числом десятичных знаков (или значащих цифр), поэтому уже на первом шаге метода итерации мы находим, как правило, не  $x_1 = \varphi(x_0)$ , а некоторое близкое к  $x_1$  значение  $\tilde{x}_1$ . Разность  $\tilde{x}_1 - x_1 = \Gamma_0$  назовем ошибкой округления. На втором шаге метода итерации требуется определить  $x_2 = \varphi(x_1)$ . Однако  $x_1$  неизвестно, поэтому при вычислении  $x_2$  ошибка возникает по двум причинам:

- 1) вместо аргумента  $x_1$  в функцию  $\varphi(x)$  подставляется  $\tilde{x}_1$ ;
- 2)  $\varphi(\tilde{x}_1)$  вычисляется с ошибкой округления, так что полученное при этом значение  $\tilde{x}_2$  лишь приближенно равно  $\varphi(\tilde{x}_1)$ :

$$\tilde{x}_2 - \varphi(\tilde{x}_1) = \Gamma_1,$$

$\Gamma_1$  — ошибка округления.

Таким образом, при действительных вычислениях получаем последовательность  $\{\tilde{x}_n\}$ , удовлетворяющую равенствам

$$\tilde{x}_{n+1} = \varphi(\tilde{x}_n) + \Gamma_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $\Gamma_n$  — ошибка округления. Заключение теоремы 1 относится к последовательности  $\{x_n\}$ . Эти заключения без дополнительных предположений для последовательности  $\{\tilde{x}_n\}$  не имеют места. Эта последовательность даже не сходится, вообще говоря, к корню. Так будет, например, всякий раз, когда корень есть иррациональное число.

Докажем теорему о поведении последовательности  $\{\tilde{x}_n\}$ . Для определенности считаем функцию  $\varphi(x)$  и  $x_0$  вещественными.

**Теорема 2.** Пусть уравнение (3.1), начальное приближение  $x_0$  и последовательность  $\{\tilde{x}_n\}$ , определяемая равенствами

$$\tilde{x}_{n+1} = \varphi(\tilde{x}_n) + \Gamma_n, \quad \tilde{x}_0 = x_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.11)$$

удовлетворяют следующим условиям:

1) для любых  $x'$  и  $x''$  из промежутка

$$|x - x_0| \leq \delta \quad (3.12)$$

выполнено неравенство

$$|\varphi(x') - \varphi(x'')| \leq q|x' - x''|, \quad 0 < q < 1; \quad (3.13)$$

2) числа  $\Gamma_n$ , фигурирующие в (3.11), удовлетворяют неравенствам

$$|\Gamma_n| \leq \Gamma q_1^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.14)$$

где  $0 < q_1 \leq 1$ ;

3) выполнено неравенство

$$\frac{1}{1-q} (m + \Gamma) \leq \delta, \quad (3.15)$$

где  $m = |x_0 - \varphi(x_0)|$ .

Тогда уравнение (3.1) в промежутке (3.12) имеет единственный корень  $x^*$ . Если  $0 < q_1 < 1$ , то последовательность  $\{\tilde{x}_n\}$  сходится к  $x^*$ . Если  $q_1 = 1$ , то  $\tilde{x}_n$ , рассматриваемое как приближение к  $x^*$ , удовлетворяет неравенству

$$|\tilde{x}_n - x^*| \leq \frac{1}{1-q} (\Gamma + m q^n). \quad (3.16)$$

Доказательство. Существование корня  $x^*$  и его единственность в промежутке (3.12) следует непосредственно из теоремы 1, так как её условия, очевидно, выполнены.

Докажем, что имеют место неравенства

$$|\tilde{x}_k - x_k| \leq \Gamma \sum_{i=1}^k q^{k-i} q_1^{i-1} \quad (3.17)$$

при  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Так как  $0 < q_1 \leq 1$ , то

$$\sum_{i=1}^k q^{k-i} q_1^{i-1} \leq \sum_{i=1}^k q^{k-i} < \frac{1}{1-q}, \quad (3.18)$$

и из (3.17) следует неравенство

$$|\tilde{x}_k - x_k| < \frac{\Gamma}{1-q}. \quad (3.19)$$

Отметим, что если  $\tilde{x}_k$  удовлетворяет неравенству (3.17), то  $\tilde{x}_k$  принадлежит промежутку (3.12). В самом деле,

$$|\tilde{x}_k - x_0| \leq |\tilde{x}_k - x_k| + |x_k - x_0| < \frac{\Gamma}{1-q} + \frac{m}{1-q} \leq \delta.$$

Здесь мы воспользовались неравенством (3.19), неравенством (3.8) при  $p=k$  и условием (3.15).

Неравенства (3.17) будем доказывать методом математической индукции. Из (3.11) и (3.14) при  $n=0$  получаем

$$|\tilde{x}_1 - x_1| = |\Gamma_0| \leq \Gamma,$$

так что (3.17) при  $k=1$  имеет место. Предположим, что неравенство (3.17) выполнено при  $k=n$  и докажем, что оно справедливо при  $k=n+1$ .

Вычитая почленно из равенства (3.11) равенство (3.2), получим

$$\tilde{x}_{n+1} - x_{n+1} = \varphi(\tilde{x}_n) - \varphi(x_n) + \Gamma_n.$$

Так как  $\tilde{x}_n$  и  $x_n$  принадлежат промежутку (3.12), то на основании (3.13) и (3.14) получаем

$$|\tilde{x}_{n+1} - x_{n+1}| \leq |\varphi(\tilde{x}_n) - \varphi(x_n)| + |\Gamma_n| \leq q|\tilde{x}_n - x_n| + \Gamma q_1^n.$$

Воспользуемся неравенством (3.17) при  $k=n$ :

$$|\tilde{x}_{n+1} - x_{n+1}| \leq q\Gamma \sum_{i=1}^n q^{n-i} q_1^{i-1} + \Gamma q_1^n = \Gamma \sum_{i=1}^{n+1} q^{n+1-i} q_1^{i-1}.$$

Неравенство (3.17) при  $k=n+1$  доказано.

С помощью неравенств (3.17) и (3.6) получим

$$\begin{aligned} |\tilde{x}_n - x^*| &\leq |\tilde{x}_n - x_n| + |x_n - x^*| \leq \\ &\leq \Gamma \sum_{i=1}^n q^{n-i} q_1^{i-1} + \frac{m}{1-q} q^n. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Если  $0 < q_1 < 1$ , то из неравенства (3.20) следует, что

$$|\tilde{x}_n - x^*| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

так как

$$\sum_{i=1}^n q^{n-i} q_1^{i-1} \leq n [\max(q, q_1)]^{n-1} \rightarrow 0,$$

когда  $n \rightarrow \infty$ . Если  $q_1 = 1$ , то из (3.20) получаем неравенство (3.16). Теорема доказана.

Число  $\Gamma_n$  можно рассматривать как ошибку округления, возникающую при вычислениях на  $(n+1)$ -м шаге метода итерации. Теорема 2 дает оценку ошибки  $\tilde{x}_n$  как приближения к  $x^*$  в случае, когда ошибки округления  $\Gamma_n$  не превышают по абсолютной величине заданного числа  $\Gamma$ . Теорема позволяет утверждать, что  $\tilde{x}_n \rightarrow x^*$  при  $n \rightarrow \infty$ , если ошибки округления убывают с быстротой геометрической прогрессии.

При  $\Gamma = 0$  получаем „идеальный метод итерации“. Теорема 2 в этом случае совпадает с теоремой 1.

Все теоремы об оценке ошибки и о сходимости методов вычислений следовало бы формулировать так же, как теорему 2. Тем не менее в последующем мы этого делать не будем, а ограничимся изложением идеальных методов. Вопрос об оценке ошибки с учетом ошибок округления будет рассмотрен для некоторых методов численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений в гл. IV.

**Пример.** Найдём корень уравнения

$$x^3 - 4x^2 + 10x - 10 = 0,$$

расположенный на промежутке  $[1, 2]$  Так как  $P(1) = -3$  и  $P(2) = 2$ , то принимаем в качестве начального приближения  $x_0 = 1,5$ . Запишем уравнение в виде

$$x = \frac{1}{10}(-x^3 + 4x^2 + 10),$$

так что

$$\varphi(x) = -0,1x^3 + 0,4x^2 + 1.$$

Применим теорему 1 о сходимости метода итерации. При выборе величины  $\delta$  нужно иметь в виду следующее: если  $\delta$  взять очень малым, то может оказаться невыполненным неравенство (3.5), если взять  $\delta$  большим, то может случиться, что не выполнено условие  $|\varphi'(x)| \leq q < 1$ . В нашем случае

$$m = |1,5 - \varphi(1,5)| = 0,0625.$$

Найдём значение производной

$$\varphi'(x) = -0,3x^2 + 0,8x$$

при  $x = 1.5$ . Получим  $\varphi'(1.5) = q_0 = 0,525$ . Если бы  $\varphi'(x)$  в окрестности  $x_0$  была постоянной, то в качестве  $\delta$  можно было бы взять

$$\frac{m}{1-q} = \frac{0,0625}{1-0,525} \cong 0,13.$$

Так как на самом деле производная не постоянна, то попробуем взять  $\delta = 0,2$ .

Нетрудно проверить, что  $\max |\varphi'(x)|$  на промежутке

$$|x - 1,5| \leq 0,2 \quad (3.21)$$

достигается при  $x = \frac{4}{3}$  и  $\varphi'\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{8}{15}$ . Следовательно, можно взять  $q = \frac{8}{15}$ . Имеем

$$\frac{m}{1-q} = \frac{0,0625}{1-\frac{8}{15}} = \frac{15}{112} = 0,1339 \dots < 0,2.$$

Условия теоремы 1 выполнены, при этом  $\delta = 0,2$  и  $q = \frac{8}{15}$ , так что последовательность  $\{x_n\}$  сходится и имеет место оценка ошибки

$$|x_n - x^*| \leq \frac{15}{112} \left(\frac{8}{15}\right)^n.$$

Покажем, как в данном примере можно применить оценку (3.16) теоремы 2. Чтобы указать величину  $\Gamma$  — верхнюю границу ошибок округления  $\Gamma_n$ , мы должны дать точное описание процесса вычисления.

Вычисление будем проводить следующим образом. В качестве начального приближения берем  $x_0 = 1,5$ . Приближение  $\tilde{x}_n$  ( $n \geq 0$ ) считаем заданным десятичной дробью с четырьмя десятичными знаками. Приближение  $\tilde{x}_{n+1}$  вычисляем накоплением с четырьмя десятичными знаками по формуле

$$\tilde{x}_{n+1} = \{1 + 0,4(\tilde{x}_n^2) - [0,1(\tilde{x}_n^2)]\tilde{x}_n\}. \quad (3.22)$$

Результаты вычислений приведены в табл. 3.

Таблица 3

$n$	$\tilde{x}_n$	$(\tilde{x}_n^2)$	$[0,1(\tilde{x}_n^2)]$	$\varphi(\tilde{x}_n) + \Gamma_n$
0	1,5	2,25	0,225	1,5625
1	1,5625	2,4414	0,2441	1,5952
2	1,5952	2,5447	0,2545	1,6119
3	1,6119	2,5982	0,2598	1,6205
4	1,6205	2,6260	0,2626	1,6249
5	1,6249	2,6403	0,2640	1,6271
6	1,6271	2,6475	0,2648	1,6281
7	1,6281	2,6507	0,2651	1,6287
8	1,6287	2,6527	0,2653	1,6290
9	1,6290	2,6536	0,2654	1,6291
10	1,6291	2,6540	0,2654	1,6292
11	1,6292	2,6543	0,2654	1,6293
12	1,6293	2,6546	0,2655	1,6293
13	1,6293			

Сделаем пояснения к формуле (3.22). Сначала вычисляется  $\tilde{x}_n^2$  и округляется до четырех десятичных знаков по обычному правилу (если пятый десятичный знак есть 5, а все следующие за ним знаки — нули, то округление производится до ближайшей четной цифры). Результат округления  $\tilde{x}_n^2$  обозначен круглыми скобками  $(\tilde{x}_n^2)$ , так что

$$(\tilde{x}_n^2) = \tilde{x}_n^2 + \varepsilon_n, \quad (3.23)$$

где  $|\varepsilon_n| \leq \varepsilon$ ,  $\varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-4}$ .

Далее, умножаем  $(\tilde{x}_n^2)$  на 0,1 и результат округления обозначаем квадратными скобками, следовательно,

$$[0,1(\tilde{x}_n^2)] = 0,1(\tilde{x}_n^2) + \delta_n, \quad (3.24)$$

где  $|\delta_n| \leq \varepsilon$ . Наконец, вычисляем накоплением

$$1 + 0,4(\tilde{x}_n^2) - [0,1(\tilde{x}_n^2)]\tilde{x}_n$$

и округляем до четырех десятичных знаков. Результат округления обозначаем фигурными скобками:

$$\begin{aligned} \{1 + 0,4(\tilde{x}_n^2) - [0,1(\tilde{x}_n^2)]\tilde{x}_n\} = \\ = 1 + 0,4(\tilde{x}_n^2) - [0,1(\tilde{x}_n^2)]\tilde{x}_n + \gamma_n, \end{aligned} \quad (3.25)$$

где  $|\gamma_n| \leq \varepsilon$ .

Принимая во внимание равенства (3.23), (3.24) и (3.25), можем переписать равенство (3.22) в виде

$$\tilde{x}_{n+1} = 1 + 0,4(\tilde{x}_n^2 + \varepsilon_n) - [0,1(\tilde{x}_n^2 + \varepsilon_n) + \delta_n]\tilde{x}_n + \gamma_n$$

(здесь скобки имеют обычный смысл) или

$$\tilde{x}_{n+1} = \varphi(\tilde{x}_n) + 0,4\varepsilon_n - (0,1\varepsilon_n + \delta_n)\tilde{x}_n + \gamma_n.$$

Из этого равенства видно, что при нашем способе вычисления

$$\Gamma_n = 0,4\varepsilon_n - (0,1\varepsilon_n + \delta_n)\tilde{x}_n + \gamma_n, \quad (3.26)$$

где величины  $\varepsilon_n$ ,  $\delta_n$ ,  $\gamma_n$  таковы, что их абсолютные величины не превосходят  $\varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-4}$ .

С помощью (3.26) получаем неравенство

$$|\Gamma_n| \leq (1,4 + 1,1|\tilde{x}_n|)\varepsilon.$$

Предположим, что  $|\tilde{x}_n|$  принадлежит промежутку (3.21), тогда  $|\tilde{x}_n| \leq 1,7$  и, следовательно,

$$|\Gamma_n| \leq (1,4 + 1,1 \cdot 1,7)\varepsilon < 1,7 \cdot 10^{-4}.$$

Таким образом, можно принять  $\Gamma = 1,7 \cdot 10^{-4}$ . Условия теоремы 2 при таком  $\Gamma$  (и при указанных ранее  $\delta$  и  $q$ ) выполнены, так как неравенство (3.15) имеет место:

$$\frac{1}{1-q}(m + \Gamma) = \frac{15}{7}(0,0625 + 1,7 \cdot 10^{-4}) < 0,2.$$

Из теоремы, в частности, получаем, что  $\tilde{x}_n$  принадлежит промежутку (3.21), так что наше предположение о  $\tilde{x}_n$  оправдано.

Оценка (3.16) запишется так:

$$|\tilde{x}_n - x^*| \leq \frac{15}{7} \left[ 1,7 \cdot 10^{-4} + 0,0625 \left( \frac{8}{15} \right)^n \right]. \quad (3.27)$$

Эта оценка *априорная*, поскольку она найдена до того, как произведено вычисление. Неравенство (3.27) позволяет утверждать, что  $|\tilde{x}_{13} - x^*| \leq 5 \cdot 10^{-4}$ . Как мы увидим  $|\tilde{x}_{13} - x^*| < < 0,7 \cdot 10^{-4}$  и, следовательно, оценка (3.27) является завышенной. Это объясняется тем, что величины  $\Gamma_n$  значительно меньше, чем  $\Gamma = 1,7 \cdot 10^{-4}$ , как показывает табл. 4.

Таблица 4

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$10^4 \Gamma_n$	0	1,07	-0,41	0,19	0,38	0,02	1,14	-0,22	-0,26	-0,78	-0,29	0,20	-0,30

Более точными являются так называемые *апостериорные* оценки ошибки, которые можно применять после того, как приближенное решение некоторой задачи уже найдено. Приведем пример апостериорной оценки. Пусть  $\tilde{x}$  — вычисленное приближенное значение корня уравнения  $P(x) = 0$ . Считаем  $\tilde{x}$  и  $P(x)$  вещественными. Предположим, что в некотором промежутке  $[a, b]$ , содержащем  $\tilde{x}$  внутри себя, производная  $P'(x)$  непрерывна и не обращается в нуль. Для определенности будем считать, что  $P(\tilde{x}) < 0$  и  $P'(x) > 0$  на  $[a, b]$ . Обозначим

$$p = \min_{[a, b]} P'(x).$$

Тогда кривая  $y = P(x)$  при  $\tilde{x} \leq x \leq b$  расположена выше прямой

$$y = P(\tilde{x}) + p(x - \tilde{x}).$$

Если точка пересечения  $X$  этой прямой с осью  $x$  принадлежит  $[a, b]$ :

$$X = \tilde{x} - \frac{P(\tilde{x})}{p} \leq b, \quad (3.28)$$

то в промежутке  $[\tilde{x}, X]$  имеется единственный корень  $x^*$  уравнения  $P(x) = 0$ , и мы получаем

$$0 < x^* - \tilde{x} \leq \frac{-P(\tilde{x})}{p}. \quad (3.29)$$

Неравенство (3.29) и представляет собой апостериорную оценку для  $x^* - \tilde{x}$ .

Выполним оценку ошибки приближенного значения корня  $\tilde{x} = \tilde{x}_{13} = 1,6293$ , найденного в нашем примере. Положим  $P(x) = x - \varphi(x)$  и воспользуемся оценкой (3.29). Имеем

$$0 < -P(\tilde{x}_{13}) < 0,31 \cdot 10^{-4}.$$

В качестве  $[a, b]$  возьмем промежуток (3.21). На нем

$$P'(x) = 1 - \varphi'(x) \geq 1 - \frac{8}{15} = \frac{7}{15},$$

так что  $p \geq \frac{7}{15}$ . С помощью (3.29) получаем

$$0 < x^* - \tilde{x}_{13} < 0,7 \cdot 10^{-4}.$$

Неравенство (3.28), очевидно, выполнено.



Установим достаточные условия сходимости метода итерации для системы (4.2). Для этой цели нам понадобится обобщение теоремы 1, доказанной в § 3.

Множество  $X$  элементов любой природы называется *метрическим пространством*, если каждой паре элементов  $x'$ ,  $x''$  из этого множества сопоставлено вещественное число  $\rho(x', x'')$ , называемое *расстоянием* между элементами  $x'$  и  $x''$ , удовлетворяющее условиям:

1)  $\rho(x', x'') \geq 0$ ,  $\rho(x', x'') = 0$  тогда и только тогда, когда  $x' = x''$ ;

2)  $\rho(x', x'') = \rho(x'', x')$ ;

3)  $\rho(x', x'') \leq \rho(x', x''') + \rho(x''', x'')$ .

Говорят, что последовательность элементов  $\{x_n\}$  метрического пространства  $X$  *сходящаяся*, если существует элемент  $x^* \in X$  такой, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x^*) = 0.$$

Последовательность  $\{x_n\}$  элементов  $X$  называется *фундаментальной* (или *сходящейся в себе*), если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_{n+p}, x_n) = 0$$

при любом  $p = 1, 2, 3, \dots$

Нетрудно видеть, что любая сходящаяся последовательность является фундаментальной. Обратное неверно: имеются метрические пространства, в которых не всякая фундаментальная последовательность является сходящейся. В связи с этим дается определение: метрическое пространство  $X$  называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность элементов  $X$  является сходящейся.

Множество элементов  $x$  метрического пространства  $X$ , удовлетворяющих условию

$$\rho(x, x_0) \leq \delta,$$

называется *сферой* (замкнутой) с центром в  $x_0$  и радиусом  $\delta$ .

Простейшим примером полного метрического пространства является множество вещественных чисел, где за расстояние между числами  $x'$  и  $x''$  принимается абсолютная величина разности этих чисел

$$\rho(x', x'') = |x' - x''|.$$

Другой пример полного метрического пространства — множество комплексных чисел, где за расстояние между двумя комплексными числами принимается модуль разности этих комплексных чисел.

Приведем еще один пример полного метрического пространства. Пусть  $X$  — множество векторов с  $k$  составляющими

$$x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k),$$

где  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$  — вещественные числа. Пусть

$$x' = (\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_k) \quad \text{и} \quad x'' = (\xi''_1, \xi''_2, \dots, \xi''_k).$$

Положим

$$\rho(x', x'') = \max_{1 \leq j \leq k} |\xi'_j - \xi''_j|. \quad (4.5)$$

Нетрудно проверить, что  $\rho(x', x'')$  удовлетворяет перечисленным выше условиям, которым должно удовлетворять расстояние. Векторное  $k$ -мерное пространство, в котором расстояние определяется формулой (4.5), принято обозначать  $m_k$ . Нетрудно доказать, что метрическое пространство  $m_k$  полное.

Пусть  $X$  — полное метрическое пространство. Рассмотрим уравнение

$$x = \varphi(x), \quad (4.6)$$

где  $\varphi(x)$  — операция, сопоставляющая элементу  $x$  пространства  $X$  элемент  $y = \varphi(x)$  того же пространства  $X$ . Имеет место следующая теорема.

**Теорема.** Пусть для уравнения (4.6) и элемента  $x_0$  — начального приближения — выполнены условия:

1) для любых  $x'$  и  $x''$  из сферы

$$\rho(x, x_0) \leq \delta \quad (4.7)$$

справедливо неравенство

$$\rho(\varphi(x'), \varphi(x'')) \leq q\rho(x', x''), \quad (4.8)$$

где  $0 < q < 1$ ;

2) выполнено неравенство

$$\frac{m}{1-q} \leq \delta, \quad (4.9)$$

где  $m = \rho(x_0, \varphi(x_0))$ .

Тогда уравнение (4.6) в сфере (4.7) имеет единственное решение  $x^*$ , к нему сходятся последовательные приближения  $x_n$ , определяемые формулой

$$x_{n+1} = \varphi(x_n),$$

при этом имеет место оценка ошибки

$$\rho(x_n, x^*) \leq \frac{m}{1-q} q^n.$$

Доказательство теоремы точно такое же, как доказательство теоремы § 3. Единственное различие состоит в том, что вместо модуля  $|x - y|$  нужно писать  $\rho(x, y)$ .

Систему (4.2) можно рассматривать как уравнение

$$x = \varphi(x) \quad (4.10)$$

в пространстве  $m_k$ . Операция  $\varphi(x)$  сопоставляет каждому вектору

$$x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$$

вектор

$$y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k),$$

составляющие которого определяются формулами

$$\eta_1 = \varphi_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k),$$

$$\eta_2 = \varphi_2(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k),$$

$$\dots$$

$$\eta_k = \varphi_k(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k).$$

Применим теперь к уравнению (4.10) или, что то же самое, к системе (4.2) общую теорему о сходимости метода итерации.

Сфера (4.7)  $\rho(x, x_0) \leq \delta$  в пространстве  $m_k$  представляет собой  $k$ -мерный куб с центром в точке  $x_c = (\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \dots, \xi_k^{(0)})$

$$\max_{1 \leq j \leq k} |\xi_j - \xi_j^{(0)}| \leq \delta. \quad (4.11)$$

Будем предполагать, что в кубе (4.11) функции  $\varphi_l(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$ ,  $l = 1, 2, \dots, k$ , имеют непрерывные частные

производные  $\frac{\partial \varphi_l}{\partial \xi_j}$ .

Укажем достаточное условие, обеспечивающее выполнение неравенства (4.8). Пусть точки

$$x' = (\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_k) \text{ и } x'' = (\xi''_1, \xi''_2, \dots, \xi''_k)$$

принадлежат кубу (4.11). Воспользуемся формулой конечных приращений:

$$\begin{aligned} \varphi_i(\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_k) - \varphi_i(\xi''_1, \xi''_2, \dots, \xi''_k) = \\ = \sum_{j=1}^k \frac{\partial \varphi_i(\xi'_1 + \theta(\xi''_1 - \xi'_1), \dots, \xi'_k + \theta(\xi''_k - \xi'_k))}{\partial \xi_j} (\xi'_j - \xi''_j). \end{aligned}$$

Очевидно, имеем

$$\begin{aligned} |\varphi_i(\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_k) - \varphi_i(\xi''_1, \xi''_2, \dots, \xi''_k)| \leq \\ \leq \rho(x', x'') \sum_{j=1}^k \left| \frac{\partial \varphi_i(\xi'_1 + \theta(\xi''_1 - \xi'_1), \dots, \xi'_k + \theta(\xi''_k - \xi'_k))}{\partial \xi_j} \right| \leq \\ \leq \rho(x', x'') \max_{\rho(x, x_0) \leq \delta} \sum_{j=1}^k \left| \frac{\partial \varphi_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)}{\partial \xi_j} \right|, \end{aligned}$$

откуда получаем неравенство

$$\begin{aligned} \rho(\varphi(x'), \varphi(x'')) \leq \rho(x', x'') \times \\ \times \max_{1 \leq i \leq k} \left\{ \max_{\rho(x, x_0) \leq \delta} \sum_{j=1}^k \left| \frac{\partial \varphi_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)}{\partial \xi_j} \right| \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом, в качестве  $q$  неравенства (4.8) можно взять множитель при  $\rho(x', x'')$  в правой части последнего неравенства (если он меньше единицы), и мы получаем следующую теорему о сходимости метода итерации для системы (4.2).

**Теорема.** Пусть выполнены условия:

1)

$$q = \max_{1 \leq i \leq k} \left\{ \max_{\rho(x, x_0) \leq \delta} \sum_{j=1}^k \left| \frac{\partial \varphi_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)}{\partial \xi_j} \right| \right\} < 1,$$

здесь внутренний максимум берется по всем точкам куба (4.11);

2)

$$\frac{1}{1-q} \max_{1 \leq i \leq k} |\xi_i^{(0)} - \varphi_i(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \dots, \xi_k^{(0)})| \leq \delta.$$

Тогда в кубе (4.11) система (4.2) имеет единственное решение  $x^* = (\xi_1^*, \xi_2^*, \dots, \xi_k^*)$ , к нему сходятся последовательные приближения (4.4), при этом имеет место оценка ошибки

$$\max_{1 \leq i \leq k} |\xi_i^{(n)} - \xi_i^*| \leq \frac{1}{1-q} \max_{1 \leq i \leq k} |\xi_i^{(0)} - \varphi_i(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \dots, \xi_k^{(0)})| q^n.$$

### § 5. О вычислении значения многочлена и его производных

Пусть имеется многочлен

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n, \quad (5.1)$$

коэффициенты которого  $a_0, a_1, \dots, a_n$  суть вещественные числа. Требуется вычислить значение этого многочлена при  $x = x_0$ . Рассмотрим сначала случай, когда  $x_0$  — вещественное число.

Выполним деление многочлена  $P_n(x)$  на  $x - x_0$ . Получим

$$\begin{aligned} a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n &= \\ &= (s_0 x^{n-1} + s_1 x^{n-2} + \dots + s_{n-1})(x - x_0) + s_n. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Ясно, что

$$s_n = P_n(x_0)$$

и, следовательно, для вычисления  $P_n(x_0)$  достаточно вычислить  $s_n$ .

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях в левой и правой части соотношения (5.2):

$$a_0 = s_0,$$

$$a_1 = s_1 - s_0 x_0,$$

$$a_2 = s_2 - s_1 x_0,$$

$$\dots$$

$$a_n = s_n - s_{n-1} x_0.$$

Разрешая эти равенства относительно  $s_0, s_1, \dots, s_n$ , получим

$$\left. \begin{aligned} s_0 &= a_0, \\ s_1 &= a_1 + s_0 x_0, \\ s_2 &= a_2 + s_1 x_0, \\ &\dots \\ s_n &= a_n + s_{n-1} x_0. \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

Рекуррентные соотношения (5.3) позволяют последовательно определять числа  $s_0, s_1, \dots, s_n$ . Числа  $s_0, s_1, \dots, s_{n-1}$  представляют собой коэффициенты частного от деления  $P_n(x)$  на  $x - x_0$ . Приведенная схема вычисления  $P_n(x_0)$  называется обычно схемой Горнера.

Равенство (5.2) можно использовать для контроля правильности вычислений. Действительно, полагая в нем  $x = 1$ , получим

$$a_0 + a_1 + \dots + a_n = (s_0 + s_1 + \dots + s_{n-1})(1 - x_0) + s_n.$$

Чтобы проверить, выполнено ли это равенство, нужно найти сумму  $P_n(1)$  коэффициентов многочлена  $P_n(x)$ , сумму

$$S = s_0 + s_1 + \dots + s_{n-1}$$

и вычислить величину

$$P_n(1) - S(1 - x_0).$$

При правильном вычислении должно иметь место равенство

$$P_n(1) - S(1 - x_0) = s_n.$$

Для контроля можно использовать также равенство

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - \dots + (-1)^n a_0 &= \\ &= (s_{n-1} - s_{n-2} + \dots + (-1)^{n-1} s_0)(-1 - x_0) + s_n, \end{aligned}$$

которое мы получим, полагая в (5.2)  $x = -1$ .

При вычислении  $P_n(x_0)$  при помощи соотношений (5.3) требуется выполнить  $n$  умножений. Если бы мы стали вычислять  $P_n(x_0)$  обычным путем, то понадобилось бы выполнить  $2n - 1$  умножений:  $n - 1$  умножений при вычислении степеней

$$x_0^2, x_0^3, \dots, x_0^n$$

и  $n$  умножений при вычислении произведений

$$a_0 x_0^n, a_1 x_0^{n-1}, \dots, a_{n-1} x_0.$$

**Пример 1.** Вычислим значение многочлена

$$P_4(x) = x^4 + 3,8491x^3 - 4,9126x^2 + 1,8312x - 2,3844$$

при  $x = 1,2134$ . Имеем:

1	3,8491	- 4,9126	1,8312	- 2,3844
	1,2134	6,1428	1,4927	4,0332
1	5,0625	1,2302	3,3239	1,6488

Мы получили  $P_4(1,2134) = 1,6488$ .

Для контроля правильности вычисления находим

$$P_4(1) = -0,6167, \quad S = s_0 + s_1 + s_2 + s_3 = 10,6166,$$

$$P_4(1) - S(1 - x_0) = -0,6167 + 10,6166 \cdot 0,2134 = 1,6489.$$

Число  $P(1) - S(1 - x_0) = 1,6489$  отличается от  $s_4$  на одну единицу четвертого десятичного знака, что является допустимым при принятой точности вычисления.

Остановимся на вопросе о вычислении значений производных многочлена  $P_n(x)$  при  $x = x_0$  ( $x_0$  — вещественное). Обозначим частное от деления  $P_n(x)$  на  $x - x_0$  через  $P_{n-1}(x)$ , так что

$$P_{n-1}(x) = s_0 x^{n-1} + s_1 x^{n-2} + \dots + s_{n-1}.$$

Соотношение (5.2) запишется так:

$$P_n(x) = P_{n-1}(x)(x - x_0) + s_n.$$

Обозначим частное от деления  $P_{n-1}(x)$  на  $x - x_0$  через

$$P_{n-2}(x) = s_0^{(1)} x^{n-2} + s_1^{(1)} x^{n-3} + \dots + s_{n-2}^{(1)}.$$

Имеем

$$P_{n-1}(x) = P_{n-2}(x)(x - x_0) + s_{n-1}^{(1)},$$

причем числа  $s_j^{(1)}$  определяются по числам  $s_j$  при помощи рекуррентных соотношений

$$s_j^{(1)} = s_j + s_{j-1}^{(1)} x_0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad s_{-1}^{(1)} = 0.$$

Продолжая таким образом, мы получим многочлены

$$P_n(x), P_{n-1}(x), P_{n-2}(x), \dots, P_1(x), P_0(x) \quad (5.4)$$

и треугольную таблицу чисел

$$\left. \begin{array}{cccccc} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ s_0 & s_1 & \dots & s_{n-2} & s_{n-1} & s_n \\ s_0^{(1)} & s_1^{(1)} & \dots & s_{n-2}^{(1)} & s_{n-1}^{(1)} & \\ s_0^{(2)} & s_1^{(2)} & \dots & s_{n-2}^{(2)} & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ s_0^{(n-1)} & s_1^{(n-1)} & & & & \\ s_0^{(n)} & & & & & \end{array} \right\} \quad (5.5)$$

Обозначив

$$a_j = s_j^{(-1)}, \quad s_j = s_j^{(0)}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n,$$

можем утверждать, что числа  $(k+2)$ -й строки  $s_j^{(k)}$  определяются по числам  $(k+1)$ -й строки  $s_j^{(k-1)}$  при помощи рекуррентных соотношений

$$\left. \begin{array}{l} s_0^{(k)} = s_0^{(k-1)}, \\ s_1^{(k)} = s_1^{(k-1)} + s_0^{(k)} x_0, \\ s_2^{(k)} = s_2^{(k-1)} + s_1^{(k)} x_0, \\ \dots \\ s_{n-k}^{(k)} = s_{n-k}^{(k-1)} + s_{n-k-1}^{(k)} x_0, \end{array} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n. \right\} \quad (5.6)$$

При  $k=0$  соотношения (5.6) совпадают с (5.3).

Многочлены (5.4) связаны соотношениями

$$\left. \begin{array}{l} P_n(x) = P_{n-1}(x)(x - x_0) + s_n, \\ P_{n-1}(x) = P_{n-2}(x)(x - x_0) + s_{n-1}^{(1)}, \\ \dots \\ P_2(x) = P_1(x)(x - x_0) + s_2^{(n-2)}, \\ P_1(x) = P_0(x)(x - x_0) + s_1^{(n-1)}, \\ P_0(x) = s_0^{(n)}, \end{array} \right\} \quad (5.7)$$

из которых получаем равенство

$$P_n(x) = s_n + s_{n-1}^{(1)}(x - x_0) + s_{n-2}^{(2)}(x - x_0)^2 + \dots + s_1^{(n-1)}(x - x_0)^{n-1} + s_0^{(n)}(x - x_0)^n. \quad (5.8)$$

Из равенства (5.8), в силу единственности разложения в ряд Тейлора, находим

$$P_n(x_0) = s_n, \quad \frac{P'_n(x_0)}{1!} = s_{n-1}^{(1)}, \quad \frac{P''_n(x_0)}{2!} = s_{n-2}^{(2)}, \dots$$

$$\dots, \quad \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!} = s_0^{(n)}. \quad (5.9)$$

Таким образом, чтобы вычислить значения производных многочлена  $P_n(x)$  при  $x = x_0$ , мы должны составить таблицу чисел (5.5) при помощи рекуррентных соотношений (5.6). Искомые значения производных многочлена  $P_n(x)$  определяются равенствами (5.9).

Равенства (5.7) можно использовать для контроля правильности вычислений. Полагая в них  $x = 1$ , получим контрольные равенства:

$$P_n(1) - S(1 - x_0) = s_n,$$

$$S - S^{(1)}(1 - x_0) = s_{n-1}^{(1)},$$

$$\dots$$

$$S^{(n-2)} - S^{(n-1)}(1 - x_0) = s_1^{(n-1)},$$

$$S^{(n-1)} = s_0^{(n)},$$

где

$$S^{(j)} = s_0^{(j)} + s_1^{(j)} + \dots + s_{n-j-1}^{(j)}, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

$$S^{(0)} = S, \quad S^{(n)} = 0.$$

Можно было получить контрольные равенства, полагая в (5.7)  $x = -1$ .

**Пример 2.** Вычислим значение многочлена

$$P_4(x) = x^4 + 3,8491x^3 - 4,9126x^2 + 1,8312x - 2,3844$$

и его производных при  $x = 1,2134$ . Составим таблицу (5.5):

1	3,8491	- 4,9126	1,8312	- 2,3844	- 0,6167		
1	5,0625	1,2302	3,3239	1,6488	10,6166	1,6489	
1	6,2759	8,8454	14,0569		16,1213	14,0569	
1	7,4893	17,9329			8,4893	17,9329	
1	8,7027				1	8,7027	
1					0	1	

На основании (5.9) получаем

$$\begin{aligned} P_4(1,2134) &= 1,6488; & P_4'(1,2134) &= 14,0569; \\ \frac{P_4''(1,2134)}{2!} &= 17,9329; & \frac{P_4'''(1,2134)}{3!} &= 8,7027; \\ \frac{P_4^{(IV)}(1,2134)}{4!} &= 1. \end{aligned}$$

Два последних столбца таблицы заняты контрольными вычислениями. В предпоследнем столбце выписаны числа

$$P(1), S, S^{(1)}, S^{(2)}, S^{(3)}, S^{(4)}.$$

В последнем столбце записаны числа

$$P(1) - S(1 - x_0), \quad S - S^{(1)}(1 - x_0), \quad \dots$$

Мы видим, что  $P(1) - S(1 - x_0)$  отличается от  $s_4$  на одну единицу четвертого десятичного знака, а прочие числа последнего столбца совпадают с  $s_3^{(1)}, s_2^{(2)}, s_1^{(3)}, s_0^{(4)}$ , что является допустимым при вычислениях с четырьмя десятичными знаками. Конечно, контроль осуществляется не в конце всего вычисления, а последовательно: таблица заполняется по строкам, при этом заполняется вся строка, включая числа контрольных столбцов.

Перейдем к описанию схемы для вычисления значения многочлена (5.1) и его первой производной при  $x = x_0$ , когда  $x_0$  — комплексное число:

$$x_0 = u_0 + iv_0.$$

Квадратный трехчлен

$$x^2 + px + q,$$

где

$$p = -2u_0, \quad q = u_0^2 + v_0^2,$$

имеет своими корнями  $x_0$  и  $\bar{x}_0$ . Через  $\bar{x}_0$  обозначено комплексно-сопряженное с  $x_0$  число:  $\bar{x}_0 = u_0 - iv_0$ .

Разделим многочлен  $P_n(x)$  на  $x^2 + px + q$ . Получим соотношение

$$\begin{aligned} a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n &= \\ &= (b_0x^{n-2} + b_1x^{n-3} + \dots + b_{n-2})(x^2 + px + q) + \\ &\quad + b_{n-1}(x + p) + b_n. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Остаток от деления — линейная функция — записан в специальной форме для того, чтобы получить единообразные рекуррентные соотношения для определения чисел  $b_j$ .

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях  $x$  в соотношении (5.10):

$$\begin{aligned} a_0 &= b_0, \\ a_1 &= b_1 + pb_0, \\ a_2 &= b_2 + pb_1 + qb_0, \\ &\dots \\ a_{n-1} &= b_{n-1} + pb_{n-2} + qb_{n-3}, \\ a_n &= b_n + pb_{n-1} + qb_{n-2}. \end{aligned}$$

Разрешим эти равенства относительно  $b_0, b_1, \dots, b_n$ . Получим рекуррентные соотношения

$$\left. \begin{aligned} b_0 &= a_0, \\ b_1 &= a_1 - pb_0, \\ b_2 &= a_2 - pb_1 - qb_0, \\ &\dots \\ b_{n-1} &= a_{n-1} - pb_{n-2} - qb_{n-3}, \\ b_n &= a_n - pb_{n-1} - qb_{n-2}. \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

при помощи которых последовательно определяются числа  $b_0, b_1, \dots, b_n$ . Из соотношения (5.10) видно, что

$$\begin{aligned} P_n(x_0) &= b_{n-1}(x_0 + p) + b_n = \\ &= B_1 + iB_2 = b_n - u_0 b_{n-1} + i v_0 b_{n-1}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Наряду с  $P_n(x_0)$  мы получаем коэффициенты частного

$$Q(x) = b_0 x^{n-2} + b_1 x^{n-3} + \dots + b_{n-2} \quad (5.13)$$

от деления  $P_n(x)$  на  $x^2 + px + q$ .

При счете на настольной машине числа  $b_j$  следует вычислять накоплением.

Равенство (5.10) можно использовать для контроля правильности вычислений.

Соотношение (5.10) запишем в виде

$$P_n(x) = Q(x)(x^2 + px + q) + b_{n-1}(x + p) + b_n$$



и его первой производной при  $x = 0,52 + i1,16$ . Результаты вычислений записаны по указанной выше схеме:

0,52	1,16	1	-2,7	4	-3,3	1		
-1,04	1,616	1	-1,66	0,6576	0,06646	0,00644	-0,02812	0,07709
		1	-0,62	-1,6032	-1,2808	-0,7192	1,73500	-2,97146

Мы получили

$$P(x_0) = -0,02812 + i0,07799,$$

$$P'(x_0) = 1,73500 - i2,97146.$$

Укажем еще схему для вычисления значений многочлена (5.1) и всех его производных при  $x = x_0 = u_0 + iv_0$ . Положим

$$x = u + iv,$$

где  $u$  и  $v$  — вещественные. Запишем разложение  $P_n(x)$  по формуле Тэйлора в окрестности  $u$  по степеням  $iv$

$$P_n(u + iv) = P_n(u) + ivP'_n(u) - \frac{v^2}{2!} P''_n(u) - \frac{iv^3}{3!} P'''_n(u) + \\ + \frac{v^4}{4!} P_n^{(IV)}(u) + \dots + \frac{i^n v^n}{n!} P_n^{(n)}(u).$$

Отделяя вещественную и мнимую части, получим

$$P_n(u + iv) = X(u, v) + iY(u, v),$$

где

$$X(u, v) = P_n(u) - \frac{P''_n(u)}{2!} v^2 + \frac{P_n^{(IV)}(u)}{4!} v^4 - \dots, \\ Y(u, v) = \frac{P'_n(u)}{1!} v - \frac{P'''_n(u)}{3!} v^3 + \frac{P_n^{(V)}(u)}{5!} v^5 - \dots \quad (5.18)$$

Если  $n$  — четное, то  $X(u_0, v)$  — многочлен степени  $n$ , а  $Y(u_0, v)$  — многочлен степени  $n - 1$  относительно  $v$ . Если  $n$  — нечетное, то  $X(u_0, v)$  — многочлен степени  $n - 1$  и  $Y(u_0, v)$  — многочлен степени  $n$ . Коэффициенты многочленов

$X(u_0, v)$  и  $Y(u_0, v)$  легко найти. Достаточно составить таблицу чисел (5.5) по коэффициентам многочлена  $P_n(x)$  и вещественному числу  $u_0$ .

После того как мы нашли коэффициенты многочленов  $X(u_0, v)$  и  $Y(u_0, v)$ , можно вычислить значения этих многочленов и их производных по  $v$  при  $v = v_0$ :

$$X(u_0, v_0), \quad \frac{1}{1!} \frac{\partial X(u_0, v_0)}{\partial v}, \quad \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 X(u_0, v_0)}{\partial v^2}, \quad \dots,$$

$$Y(u_0, v_0), \quad \frac{1}{1!} \frac{\partial Y(u_0, v_0)}{\partial v}, \quad \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 Y(u_0, v_0)}{\partial v^2}, \quad \dots$$

составляя для  $X(u_0, v)$  и  $Y(u_0, v)$  таблицы (5.5).

Нетрудно видеть, что имеют место равенства

$$P_n(x_0) = X(u_0, v_0) + iY(u_0, v_0),$$

$$\therefore \frac{i}{1!} P_n'(x_0) = \frac{1}{1!} \left[ \frac{\partial X(u_0, v_0)}{\partial v} + i \frac{\partial Y(u_0, v_0)}{\partial v} \right],$$

$$- \frac{1}{2!} P_n''(x_0) = \frac{1}{2!} \left[ \frac{\partial^2 X(u_0, v_0)}{\partial v^2} + i \frac{\partial^2 Y(u_0, v_0)}{\partial v^2} \right], \quad (5.19)$$

. . . . .

$$\frac{i^n}{n!} P_n^{(n)}(x_0) = \frac{1}{n!} \left[ \frac{\partial^n X(u_0, v_0)}{\partial v^n} + i \frac{\partial^n Y(u_0, v_0)}{\partial v^n} \right].$$

Таким образом, вычисление многочлена и всех его производных при комплексном значении аргумента сводится к вычислению значений трех многочленов и их производных при вещественных значениях аргументов по схеме (5.5).

**Пример 4.** Найдем значение многочлена

$$P_4(x) = x^4 - 2,7x^3 + 4x^2 - 3,3x + 1$$

и его производных при  $x = 0,52 + i1,16$ .

По коэффициентам многочлена и по числу  $u = 0,52$  составляем таблицу (5.5):

1	-2,7	4	-3,3	1
1	-2,18	2,8664	-1,80947	0,05908
1	-1,66	2,00320	-0,76781	
1	-1,14	1,4104		
1	-0,62			
1				

Записываем многочлены (5.18)

$$X(0,52; v) = 0,05908 - 1,4104v^2 + v^4,$$

$$Y(0,52; v) = -0,76781v + 0,62v^3.$$

Составляем таблицу (5.5) для многочлена  $X(0,52; \nu)$  и для числа  $\nu = 1,16$ :

1	0	-1,4104	0	0,05908
1	1,16	-0,06480	-0,07517	-0,02812
1	2,32	2,6264	2,97145	
1	3,48	6,6632		
1	4,64			
1				

а также для многочлена  $Y(0,52; \nu)$  и  $\nu = 1,16$ :

0,62	0	-0,76781	0
0,62	0,7192	0,06646	0,07709
0,62	1,4384	1,73500	
0,62	2,1576		
0,62			

Записываем равенства (5.19)

$$\begin{aligned}
 P_4(x_0) &= -0,02812 + i0,07709, \\
 iP_4'(x_0) &= 2,97145 + i1,73500, \\
 -\frac{1}{2}P_4''(x_0) &= 6,6632 + i2,1576, \\
 -\frac{i}{6}P_4'''(x_0) &= 4,64 + i0,62, \\
 \frac{1}{24}P_4^{(IV)}(x_0) &= 1,
 \end{aligned}$$

откуда находим

$$\begin{aligned}
 P_4(x_0) &= -0,02812 + i0,07709, \\
 P_4'(x_0) &= 1,73500 - i2,97145, \\
 P_4''(x_0) &= -13,3264 - i4,3152, \\
 P_4'''(x_0) &= -3,72 + i27,84, \\
 P_4^{(IV)}(x_0) &= 24.
 \end{aligned}$$

## § 6. Метод Ньютона

Метод Ньютона является весьма эффективным методом для решения алгебраических и трансцендентных уравнений. Его основное достоинство состоит в том, что при сравнительно несложной схеме вычисления он обладает очень быстрой

сходимостью. Метод Ньютона, как и метод итерации, универсален. Он пригоден для решения обширного класса нелинейных функциональных уравнений.

В рассматриваемом нами случае алгебраических и трансцендентных уравнений метод, конечно, годится для определения как вещественных, так и комплексных корней уравнений.

Перейдем к описанию метода Ньютона. Пусть дано уравнение

$$P(x) = 0 \quad (6.1)$$

и начальное приближение  $x_0$  к корню этого уравнения. Будем предполагать, что в окрестности  $x_0$  на плоскости комплексного переменного функция  $P(x)$  дифференцируема. Если функция  $P(x)$  — вещественная и речь идет о нахождении вещественного корня, то естественно и  $x_0$  считать вещественным и достаточно требовать дифференцируемости  $P(x)$  в окрестности  $x_0$  на вещественной оси.

Заменим уравнение (6.1) в окрестности  $x_0$  линейным уравнением

$$P(x_0) + P'(x_0)(x - x_0) = 0, \quad (6.2)$$

левая часть которого представляет собой первые два члена разложения функции  $P(x)$  в ряд Тэйлора. Корень уравнения (6.2)

$$x_1 = x_0 - \frac{P(x_0)}{P'(x_0)}$$

и принимается за новое приближение к корню уравнения (6.1). Аналогично определяются следующие приближения:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{P(x_n)}{P'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.3)$$

Мы предполагаем, что

$$P'(x_n) \neq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Иногда целесообразно применять модифицированный метод Ньютона, в котором последовательные приближения определяются формулами

$$x'_{n+1} = x'_n - \frac{P(x'_n)}{P'(x'_n)}, \quad x_0 = x'_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.4)$$



и начальное приближение к ее решению  $x_0 = (\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \dots, \xi_k^{(0)})$ . Будем предполагать функции  $P_j(\xi_1, \dots, \xi_k)$  вещественными и имеющими непрерывные частные производные в окрестности начального приближения  $x_0$ , которое мы считаем (так же как и искомое решение) вещественным.

Систему (6.5) запишем в виде одного уравнения

$$P(x) = 0, \quad (6.6)$$

где  $P(x)$  — оператор, преобразующий вектор-столбец

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \xi_k \end{pmatrix}$$

в вектор-столбец

$$P(x) = \begin{pmatrix} P_1(\xi_1, \dots, \xi_k) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ P_k(\xi_1, \dots, \xi_k) \end{pmatrix}.$$

Нуль в правой части уравнения (6.6) означает  $k$ -мерный вектор-столбец с нулевыми составляющими.

Введем в рассмотрение матрицу Якоби левых частей системы (6.5)

$$P'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P_1(\xi_1, \dots, \xi_k)}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial P_1(\xi_1, \dots, \xi_k)}{\partial \xi_k} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \frac{\partial P_k(\xi_1, \dots, \xi_k)}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial P_k(\xi_1, \dots, \xi_k)}{\partial \xi_k} \end{pmatrix}.$$

Заменим систему (6.6) линейной алгебраической системой

$$P(x_0) + P'(x_0)(x - x_0) = 0. \quad (6.7)$$

Будем предполагать, что определитель матрицы  $P'(x_0)$  отличен от нуля. Тогда система (6.7) разрешима и ее решение — вектор  $x_1$  — принимается за первое приближение к решению системы (6.5).

Приближение  $x_{n+1}$  определяется из системы

$$P(x_n) + P'(x_n)(x - x_n) = 0. \quad (6.8)$$





4) числа  $B$ ,  $\eta$ ,  $K$  подчинены условию

$$h = BK\eta \leq \frac{1}{2}. \quad (7.6)$$

Если

$$\delta \geq \frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h} \eta, \quad (7.7)$$

то уравнение (7.1) в круге (7.4) имеет корень  $x^*$ , к которому сходятся последовательные приближения

$$x_{n+1} = x_n - \frac{P(x_n)}{P'(x_n)}, \quad (7.8)$$

при этом имеет место оценка ошибки

$$|x_n - x^*| \leq t^* - t_n, \quad (7.9)$$

где  $t_n$  — последовательные приближения метода Ньютона для квадратного уравнения

$$f(t) \equiv \frac{1}{2} Kt^2 - \frac{1}{B} t + \frac{\eta}{B} = 0, \quad (7.10)$$

$t_0 = 0$  и  $t^*$  — наименьший положительный корень уравнения (7.10).

Доказательство. Дискриминант квадратного трехчлена  $f(t)$  равен

$$\frac{1}{B^2} - 4 \cdot \frac{1}{2} K \frac{\eta}{B} = \frac{1}{B^2} (1 - 2h)$$

и, в силу (7.6), он неотрицателен. Следовательно, уравнение (7.10) имеет вещественные корни, причем оба корня, как нетрудно видеть, положительны. Последовательные приближения основного метода Ньютона  $t_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $t_0 = 0$ , для уравнения (7.10) сходятся к наименьшему положительному корню этого уравнения

$$t^* = \frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h} \eta,$$

при этом

$$t_0 < t_1 < t_2 < \dots$$

Отметим еще неравенство

$$1 \leq \frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h} \leq 2 \quad \text{при} \quad 0 \leq h \leq \frac{1}{2}, \quad (7.11)$$

которое сразу следует из равенства

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 2h}}.$$

Докажем теперь, что

$$|x_{k+1} - x_k| \leq t_{k+1} - t_k \quad (7.12)$$

при  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Применим метод индукции. Полагая в (7.8)  $n = 0$  и пользуясь неравенством (7.3), получим

$$|x_1 - x_0| = \left| \frac{P(x_0)}{P'(x_0)} \right| \leq \eta;$$

но  $t_1 = \eta$  и, следовательно,

$$|x_1 - x_0| \leq t_1 - t_0.$$

Таким образом, неравенство (7.12) при  $k = 0$  установлено.

В частности, отсюда вытекает, что  $x_1$  принадлежит кругу (7.4), так как в силу (7.11) и (7.7)

$$|x_1 - x_0| \leq \eta \leq \frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h} \eta \leq \delta.$$

Предположим теперь, что неравенство (7.12) верно при  $k = 0, 1, \dots, n-1$  и докажем его справедливость при  $k = n$ . Из индуктивного предположения следует, что  $x_1, \dots, x_n$  принадлежат кругу (7.4). Действительно,

$$\begin{aligned} |x_0 - x_k| &\leq |x_0 - x_1| + |x_1 - x_2| + \dots + |x_{k-1} - x_k| \leq \\ &\leq t_1 + (t_2 - t_1) + \dots + (t_k - t_{k-1}) = t_k < \frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h} \eta \leq \delta \end{aligned}$$

при  $k = 1, 2, \dots, n$ . Мы получили также

$$|x_0 - x_k| \leq t_k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (7.13)$$

На основании определения приближения  $x_n$  имеем

$$P(x_n) = P(x_n) - P(x_{n-1}) - P'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1});$$

В правой части стоит остаточный член разложения функции  $P(x)$  по формуле Тэйлора в окрестности точки  $x_{n-1}$ . Записывая остаточный член в интегральной форме, получим

$$P(x_n) = \int_{x_{n-1}}^{x_n} P''(z)(x_n - z) dz, \quad (7.14)$$

где интеграл берется по прямолинейному отрезку  $\overline{x_{n-1}x_n}$ , соединяющему точки  $x_{n-1}$  и  $x_n$ . Сделаем в интеграле замену переменной

$$z = x_{n-1} + t(x_n - x_{n-1}).$$

Получим

$$P(x_n) = \int_0^1 P''(x_{n-1} + t(x_n - x_{n-1}))(x_n - x_{n-1})^2 (1-t) dt.$$

Так как точки  $x_{n-1}$  и  $x_n$  принадлежат кругу (7.4), то отрезок  $x_{n-1}x_n$  также принадлежит ему, и по условию (7.5)

$$|P''(x_{n-1} + t(x_n - x_{n-1}))| \leq K.$$

Оценим теперь последний интеграл:

$$|P(x_n)| \leq K |x_n - x_{n-1}|^2 \int_0^1 (1-t) dt = \frac{1}{2} K |x_n - x_{n-1}|^2.$$

Пользуясь неравенством (7.12) при  $k = n - 1$ , получим

$$|P(x_n)| \leq \frac{1}{2} K (t_n - t_{n-1})^2. \quad (7.15)$$

Соотношение, аналогичное (7.14), имеет место и для  $f(t_n)$ :

$$f(t_n) = \int_{t_{n-1}}^{t_n} f''(t) (t_n - t) dt,$$

откуда немедленно, ввиду равенства  $f''(t) = K$ , получаем

$$f(t_n) = \frac{1}{2} K (t_n - t_{n-1})^2.$$

Сопоставляя последнее равенство с неравенством (7.15), имеем

$$|P(x_n)| \leq f(t_n). \quad (7.16)$$

Докажем, что

$$|P'(x_n)| \geq |f'(t_n)|. \quad (7.17)$$

Из соотношения

$$P'(x_n) - P'(x_0) = \int_{x_0}^{x_n} P''(z) dz,$$

где интеграл берется по отрезку  $\overline{x_0 x_n}$ , концы которого  $x_0$  и  $x_n$  принадлежат кругу (7.4), в силу неравенства  $|P''(z)| \leq K$ , получаем

$$|P'(x_n) - P'(x_0)| \leq K |x_0 - x_n| \leq K t_n. \quad (7.18)$$

Здесь мы воспользовались неравенством (7.13).

Имеем

$$|P'(x_n)| \geq |P'(x_0)| - |P'(x_n) - P'(x_0)|.$$

Вспользуемся условием (7.2) и неравенством (7.18). Получим

$$|P'(x_n)| \geq \frac{1}{B} - K t_n = |f'(t_n)|,$$

и неравенство (7.17) доказано.

Теперь легко установить неравенство (7.12) при  $k = n$ . Имеем

$$|x_{n+1} - x_n| = \left| \frac{P(x_n)}{P'(x_n)} \right|.$$

Так как в силу (7.16) и (7.17)

$$\left| \frac{P(x_n)}{P'(x_n)} \right| \leq \left| \frac{f(t_n)}{f'(t_n)} \right| = t_{n+1} - t_n,$$

то получаем

$$|x_{n+1} - x_n| \leq t_{n+1} - t_n.$$

Из неравенства (7.12) вытекает

$$|x_{n+p} - x_n| \leq |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + \dots + |x_{n+1} - x_n| \leq t_{n+p} - t_n \quad (7.19)$$

при  $p = 1, 2, \dots$ . Так как последовательность  $\{t_n\}$  сходится, то отсюда вытекает, что последовательность  $\{x_n\}$  сходится. Предел этой последовательности  $x^*$ , очевидно, принадлежит кругу (7.4) и является корнем уравнения (7.1). Чтобы убедиться в последнем, достаточно перейти к пределу при  $n \rightarrow \infty$  в неравенстве (7.16) и принять во внимание непрерывность  $P(x)$ .

Мы получим оценку ошибки (7.9), если перейдем в неравенстве (7.19) к пределу при  $p \rightarrow \infty$ . Теорема полностью доказана.

**Теорема 2** (о единственности корня). Пусть выполнены условия теоремы 1. При  $h < \frac{1}{2}$  корень  $x^*$  уравнения (7.1) единственен в круге (7.4), если

$$\delta < t^{**} = \frac{1 + \sqrt{1 - 2h}}{h} \eta. \quad (7.20)$$

При  $h = \frac{1}{2}$  единственность  $x^*$  в круге (7.4) имеет место, если

$$\delta = t^{**} = \frac{1 + \sqrt{1 - 2h}}{h} \eta = 2\eta. \quad (7.21)$$

**Доказательство.** Пусть  $h < \frac{1}{2}$ . В этом случае квадратное уравнение (7.10) имеет два различных корня  $t^*$  и  $t^{**}$ . Докажем, что в круге (7.4)  $|x - x_0| \leq \delta$  уравнение (7.1) имеет единственный корень  $x^*$ .

Пусть  $\tilde{x}$  — некоторый корень уравнения (7.1) из круга (7.4). Ввиду неравенства (7.20)

$$|\tilde{x} - x_0| = \theta t^{**}, \quad (7.22)$$

где  $0 \leq \theta < 1$ .

Имеем

$$x_1 - \tilde{x} = \frac{1}{P'(x_0)} [P(\tilde{x}) - P(x_0) - P'(x_0)(\tilde{x} - x_0)].$$

Выражение в квадратных скобках представляет собой остаточный член разложения функции  $P(x)$  по формуле Тэйлора. Проводя такое же рассуждение, как в теореме 1, и пользуясь тем, что  $\tilde{x}$  принадлежит кругу (7.4), получим оценку

$$|x_1 - \tilde{x}| \leq \frac{1}{|P'(x_0)|} \frac{1}{2} K |\tilde{x} - x_0|^2.$$

На основании неравенств (7.17) и (7.22) получаем

$$|x_1 - \tilde{x}| \leq \frac{1}{|f'(t_0)|} \frac{1}{2} K \theta^2 t^{**2}.$$

Но, очевидно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{f'(t_0)} \cdot \frac{1}{2} K t^{**2} &= \frac{1}{f'(t_0)} [f(t^{**}) - f(t_0) - f'(t_0)(t^{**} - t_0)] = \\ &= -t^{**} + t_0 - \frac{f(t_0)}{f'(t_0)} = t_1 - t^{**}, \end{aligned}$$

поэтому

$$|x_1 - \tilde{x}| \leq \theta^2 (t^{**} - t_1).$$

Таким же путем получим

$$|x_n - \tilde{x}| \leq \theta^{2^n} (t^{**} - t_n). \quad (7.23)$$

Так как  $0 \leq \theta < 1$ , то  $|x_n - \tilde{x}| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  и  $\tilde{x} = x^*$ .

Если  $h = \frac{1}{2}$ , то имеет место равенство (7.21), поэтому в (7.22)  $\theta$  может равняться единице. Но в этом случае  $t^* = t^{**}$  и  $t_n \rightarrow t^*$ , и из (7.23) вновь получаем  $|x_n - \tilde{x}| \rightarrow 0$ . Теорема доказана.

**Теорема 3** (о сходимости модифицированного метода Ньютона). Пусть для уравнения (7.1)  $P(x) = 0$  и начального приближения  $x_0$  выполнены условия теоремы 1. Тогда последовательные приближения

$$x'_{n+1} = x'_n - \frac{P(x'_n)}{P'(x'_n)}, \quad x_0 = x'_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.24)$$

сходятся к решению  $x^*$  уравнения (7.1), причем имеет место оценка ошибки

$$|x'_n - x^*| \leq t^* - t'_n, \quad (7.25)$$

где  $t'_n$  — последовательные приближения модифицированного метода Ньютона для квадратного уравнения (7.10),  $t'_0 = 0$  и  $t^*$  — наименьший положительный корень уравнения (7.10).

**Доказательство.** Последовательные приближения  $t'_n$  модифицированного метода Ньютона для уравнения (7.10) стремятся к  $t^*$ , монотонно возрастают:

$$t'_0 = 0 < t'_1 < t'_2 < \dots$$

Установим неравенство

$$|x'_{k+1} - x'_k| \leq t'_{k+1} - t'_k. \quad (7.26)$$

Для  $k=0$  это неравенство уже установлено при доказательстве теоремы 1, так как  $x'_1 = x_1$ ,  $t'_1 = t_1$ .

Предположим, что неравенство (7.26) верно при  $k=0, 1, 2, \dots, n-1$  и докажем, что оно верно при  $k=n$ . Из сделанного предположения вытекает, что

$$|x_0 - x'_k| \leq t'_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (7.27)$$

в частности,  $x'_k$  принадлежит кругу (7.4).

На основании определения последовательных приближений (7.24) имеем

$$x'_{n+1} - x'_n = -\frac{1}{P'(x_0)} [P(x'_n) - P(x'_{n-1}) - P'(x_0)(x'_n - x'_{n-1})].$$

Выражение в квадратных скобках отлично от остатка разложения  $P(x)$  по формуле Тэйлора в окрестности точки  $x'_{n-1}$ , поэтому прибавим и вычтем  $P'(x'_{n-1})(x'_n - x'_{n-1})$ :

$$\begin{aligned} x'_{n+1} - x'_n = & -\frac{1}{P'(x_0)} [P(x'_n) - P(x'_{n-1}) - P'(x'_{n-1})(x'_n - x'_{n-1})] - \\ & - \frac{1}{P'(x_0)} (x'_n - x'_{n-1}) [P'(x'_{n-1}) - P'(x_0)]. \end{aligned} \quad (7.28)$$

Теперь выражения в квадратных скобках можно представить в виде интегралов

$$\begin{aligned} P(x'_n) - P(x'_{n-1}) - P'(x'_{n-1})(x'_n - x'_{n-1}) &= \int_{x'_{n-1}}^{x'_n} P''(z)(x'_n - z) dz, \\ P'(x'_{n-1}) - P'(x_0) &= \int_{x_0}^{x'_{n-1}} P''(z) dz. \end{aligned}$$

Так как  $x'_n$  и  $x'_{n-1}$ , в силу (7.27), принадлежат кругу (7.4), то при оценке интегралов можно воспользоваться неравенством  $|P''(x)| \leq K$ ,

и мы получим

$$|P(x'_n) - P(x'_{n-1}) - P'(x'_{n-1})(x'_n - x'_{n-1})| \leq \frac{1}{2} K |x'_n - x'_{n-1}|^2,$$

$$|P'(x'_{n-1}) - P'(x_0)| \leq K |x'_{n-1} - x_0|.$$

Оценим левую часть соотношения (7.28), приняв во внимание последние неравенства

$$|x'_{n+1} - x'_n| \leq \frac{1}{|P'(x_0)|} \left[ \frac{1}{2} K |x'_n - x'_{n-1}|^2 + |x'_n - x'_{n-1}| K |x'_{n-1} - x_0| \right].$$

Воспользуемся теперь неравенствами (7.26) и (7.27) при  $k = n - 1$ . Получим

$$|x'_{n+1} - x'_n| \leq \frac{1}{|P'(x_0)|} \left[ \frac{1}{2} K (t'_n - t'_{n-1})^2 + (t'_n - t'_{n-1}) K t'_{n-1} \right] =$$

$$= \frac{1}{|P'(x_0)|} \cdot \frac{1}{2} K (t_n'^2 - t_{n-1}'^2).$$

Принимая во внимание условие (7.2), можем переписать последнее неравенство в виде:

$$|x'_{n+1} - x'_n| \leq \frac{1}{2} BK (t_n'^2 - t_{n-1}'^2). \quad (7.29)$$

По определению  $t'_k$  имеем

$$t'_k = t'_{k-1} - \frac{f(t'_{k-1})}{f'(t_0)} = t'_{k-1} + B \left[ \frac{1}{2} K t_{k-1}'^2 - \frac{1}{B} t'_{k-1} + \frac{\eta}{B} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} BK t_{k-1}'^2 + \eta.$$

Запишем это равенство для  $k = n + 1$  и  $k = n$ :

$$t'_{n+1} = \frac{1}{2} BK t_n'^2 + \eta,$$

$$t'_n = \frac{1}{2} BK t_{n-1}'^2 + \eta$$

и вычтем почленно второе равенство из первого. Получим

$$t'_{n+1} - t'_n = \frac{1}{2} BK (t_n'^2 - t_{n-1}'^2).$$

Из (7.29) и последнего равенства вытекает справедливость неравенства (7.26) при  $k = n$ .

Из неравенства (7.26) находим

$$|x'_{n+p} - x'_n| \leq t'_{n+p} - t'_n. \quad (7.30)$$

откуда вытекает существование  $\lim_{n \rightarrow \infty} x'_n$ . Переходом к пределу при  $n \rightarrow \infty$  в соотношении (7.24) убеждаемся в том, что этот предел есть решение уравнения (7.1) и по теореме единственности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = x^*.$$

Оценку ошибки (7.25) получим переходом к пределу в неравенстве (7.30) при  $p \rightarrow \infty$ . Теорема доказана.

Сделаем некоторые дополнения к доказанным теоремам. В качестве  $\delta$  — радиуса круга (7.4) — можно брать

$$\delta = 2\eta, \quad (7.31)$$

так как для такого  $\delta$  условие (7.7) выполнено в силу неравенства (7.11).

В случае, когда  $P(x)$  и начальное приближение  $x_0$  вещественны, теоремы 1, 2 и 3, также как и их доказательства, остаются в силе, если потребовать существование  $P'(x)$  и  $P''(x)$  и выполнение неравенства (7.5)  $|P''(x)| \leq K$  не в круге (7.4), а на отрезке вещественной оси  $|x - x_0| \leq \delta$ .

Заметим, что все неравенства, полученные в теоремах 1, 2 и 3 являются точными в том смысле, что они обращаются в равенства для квадратного уравнения (7.10)  $f(t) = 0$ . В частности, точны оценки ошибки (7.9) и (7.25).

Для того чтобы воспользоваться оценкой ошибки (7.9) [или (7.25)], необходимо найти решение уравнения (7.10)

$$f(t) \equiv \frac{1}{2} K t^2 - \frac{1}{B} t + \frac{\eta}{B} = 0$$

и найти приближение  $t_n$  (или  $t'_n$ ) метода Ньютона для уравнения (7.10).

В уравнении (7.10) сделаем замену неизвестной  $t = \eta\tau$ . Получим

$$f(\eta\tau) = \frac{\eta}{B} \left( \frac{1}{2} h\tau^2 - \tau + 1 \right) = \frac{\eta}{B} \varphi(\tau).$$

Рассмотрим теперь квадратное уравнение

$$\varphi(t) \equiv \frac{1}{2} h\tau^2 - \tau + 1 = 0. \quad (7.32)$$

Обозначим последовательные приближения метода Ньютона для этого уравнения через  $\{\tau_n\}$  и  $\{\tau'_n\}$ ,  $\tau_0 = \tau'_0 = 0$ . Легко

проверить, что

$$t_n = \eta \tau_n; \quad t'_n = \eta \tau'_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.33)$$

Так как уравнение (7.32) зависит только от одного параметра  $h$ , то можно составить таблицу величин  $\tau^* - \tau_n$  и  $\tau' - \tau'_n$  для  $0 \leq h \leq \frac{1}{2}$  и  $n = 0, 1, 2, \dots$

Таблица 5

$h \backslash n$	0	1	2	3	4	5
0,05	1,026	$0,263 \cdot 10^{-1}$	$0,183 \cdot 10^{-4}$	$0,877 \cdot 10^{-11}$	$0,203 \cdot 10^{-23}$	
0,10	1,056	$0,557 \cdot 10^{-1}$	$0,173 \cdot 10^{-3}$	$0,166 \cdot 10^{-8}$	$0,155 \cdot 10^{-18}$	
0,15	1,089	$0,889 \cdot 10^{-1}$	$0,698 \cdot 10^{-3}$	$0,436 \cdot 10^{-7}$	$0,171 \cdot 10^{-15}$	
0,20	1,127	0,127	$0,202 \cdot 10^{-2}$	$0,525 \cdot 10^{-6}$	$0,356 \cdot 10^{-13}$	
0,25	1,172	0,172	$0,491 \cdot 10^{-2}$	$0,425 \cdot 10^{-5}$	$0,319 \cdot 10^{-11}$	$0,180 \cdot 10^{-23}$
0,30	1,225	0,225	$0,109 \cdot 10^{-1}$	$0,278 \cdot 10^{-4}$	$0,184 \cdot 10^{-9}$	$0,802 \cdot 10^{-20}$
0,35	1,292	0,292	$0,230 \cdot 10^{-1}$	$0,166 \cdot 10^{-3}$	$0,885 \cdot 10^{-8}$	$0,250 \cdot 10^{-16}$
0,40	1,382	0,382	$0,486 \cdot 10^{-1}$	$0,101 \cdot 10^{-2}$	$0,459 \cdot 10^{-6}$	$0,942 \cdot 10^{-13}$
0,45	1,519	0,519	0,110	$0,749 \cdot 10^{-2}$	$0,395 \cdot 10^{-4}$	$0,111 \cdot 10^{-8}$
0,50	2	1	0,5	0,25	0,125	$0,625 \cdot 10^{-1}$

В табл. 5 приведены значения  $\tau^* - \tau_n$  для равноотстоящих значений аргумента  $h$  с шагом 0,05 и для  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ . Табл. 5 полезна при оценке ошибки  $|x_n - x^*|$ . Действительно, в силу (7.33) оценку (7.9) можно переписать так:

$$|x_n - x^*| \leq \eta (\tau^* - \tau_n). \quad (7.34)$$

В случае модифицированного метода Ньютона получим вместо (7.25) оценку

$$|x'_n - x^*| \leq \eta (\tau^* - \tau'_n). \quad (7.35)$$

Выясним характер быстроты сходимости  $\tau^* - \tau_n$  к нулю при  $n \rightarrow \infty$ . Мы имеем

$$\begin{aligned} \varphi(\tau_n) &= \varphi(\tau_n) - \varphi(\tau_{n-1}) - \varphi'(\tau_{n-1})(\tau_n - \tau_{n-1}) = \\ &= \frac{1}{2} \varphi''(\xi)(\tau_n - \tau_{n-1})^2 = \frac{1}{2} h (\tau_n - \tau_{n-1})^2, \end{aligned}$$

$$\varphi'(\tau_n) = h\tau_n - 1.$$

Из этих соотношений получаем

$$\tau_{n+1} - \tau_n = -\frac{\varphi(\tau_n)}{\varphi'(\tau_n)} = \frac{1}{2} \frac{h}{1-h\tau_n} (\tau_n - \tau_{n-1})^2. \quad (7.36)$$

Так как  $\tau_0 = 0$ ,  $\tau_1 = 1$  и  $h \leq \frac{1}{2}$ , то (7.36) при  $n = 1$  дает

$$\tau_2 - \tau_1 = \frac{1}{2} \frac{h}{1-h} \leq \frac{1}{2}.$$

Очевидно,

$$\tau_2 = \tau_1 + (\tau_2 - \tau_1) \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Снова из соотношения (7.36) при  $n = 2$  находим

$$\tau_3 - \tau_2 = \frac{1}{2} \frac{h}{1-h\tau_2} (\tau_2 - \tau_1)^2 \leq \frac{1}{2} \frac{h}{1-h\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4},$$

и, следовательно,

$$\tau_3 = \tau_2 + (\tau_3 - \tau_2) \leq \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}.$$

Продолжая таким же образом, мы получим при любом  $n = 0, 1, 2 \dots$

$$\tau_n \leq 2 - 2^{1-n}. \quad (7.37)$$

Соотношение

$$\tau_n - \tau^* = \frac{1}{\varphi'(\tau_{n-1})} [\varphi(\tau^*) - \varphi(\tau_{n-1}) - \varphi'(\tau_{n-1})(\tau^* - \tau_{n-1})],$$

которое является следствием определения  $\tau_n$  и равенства  $\varphi(\tau^*) = 0$ , на основании формулы Тэйлора можно переписать следующим образом:

$$\tau^* - \tau_n = \frac{1}{1-h\tau_{n-1}} \frac{1}{2} h (\tau_{n-1} - \tau^*)^2.$$

Очевидно, первый множитель, в силу (7.37), можно оценить сверху:

$$\frac{1}{1-h\tau_{n-1}} \leq \frac{1}{1-\frac{1}{2}(2-2^{2-n})} = 2^{n-1},$$

поэтому

$$\tau^* - \tau_n \leq 2^{n-2} h (\tau_{n-1} - \tau^*)^2. \quad (7.38)$$

Так как по (7.11)

$$\tau^* = \frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h} \leq 2,$$

то при  $n = 1$  из (7.38) находим

$$\tau^* - \tau_1 \leq 2h.$$

Учитывая это последнее неравенство, снова из (7.38) при  $n = 2$  находим

$$\tau^* - \tau_2 \leq h(2h)^2 = \frac{1}{2}(2h)^3.$$

Продолжая оценки, получим

$$\tau^* - \tau_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}(2h)^{2^n-1}. \quad (7.39)$$

Это и есть то неравенство, которое мы хотели установить. Оно показывает, что при  $2h < 1$  разность  $\tau^* - \tau_n$  быстро стремится к нулю: погрешность при переходе от  $n$  к  $n+1$ , грубо говоря, возводится в квадрат. В таких случаях говорят, что сходимость *квадратическая*.

Установим теперь, что  $\tau^* - \tau'_n$  стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$  со скоростью геометрической прогрессии, если  $h < \frac{1}{2}$ . С этой целью заметим, что приближения  $\tau'_n$  и  $\tau'_{n+1}$  связаны зависимостью

$$\tau'_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} h \tau_n'^2.$$

Для корня  $\tau^*$  также справедливо соотношение

$$\tau^* = 1 + \frac{1}{2} h \tau^{*2}.$$

Вычитая почленно из второго равенства первое, получим

$$\tau^* - \tau'_{n+1} = \frac{1}{2} h (\tau^* + \tau_n') (\tau^* - \tau_n').$$

Так как  $\tau_n' < \tau^*$ , то отсюда получаем

$$\tau^* - \tau'_{n+1} \leq h \tau^* (\tau^* - \tau_n'). \quad (7.40)$$

Но мы имеем

$$h \tau^* = 1 - \sqrt{1 - 2h} = q,$$



Матрицу Якоби левых частей системы (7.42), как в § 6, будем обозначать через  $P'(x)$ , так что элемент матрицы  $P'(x)$  с индексами  $i, j$  равен

$$\{P'(x)\}_{ij} = \frac{\partial P_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)}{\partial \xi_j}.$$

**Теорема 4.** Пусть для системы (7.42) и начального приближения (7.43) к ее решению выполнены условия:

1) матрица Якоби левых частей системы (7.42) на начальном приближении  $P'(x_0)$  неособенная и известна оценка нормы обратной к ней матрицы  $\| [P'(x_0)]^{-1} \| \leq B$ ;

2) левые части системы на начальном приближении удовлетворяют неравенству

$$\max_{1 \leq i \leq k} |P_i(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \dots, \xi_k^{(0)})| \leq \eta;$$

3) для всех точек  $k$ -мерного куба

$$|\xi_i - \xi_i^{(0)}| \leq 2B\eta, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (7.44)$$

выполнены неравенства

$$\left| \frac{\partial^2 P_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)}{\partial \xi_p \partial \xi_q} \right| \leq L, \quad i, p, q = 1, 2, \dots, k;$$

4) постоянные  $B, \eta, L$  удовлетворяют условию

$$h = B^2 \eta L k^2 \leq \frac{1}{2}.$$

Тогда система (7.42) в кубе

$$|\xi_i - \xi_i^{(0)}| \leq \frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h} B\eta, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

имеет решение  $x^* = (\xi_1^*, \xi_2^*, \dots, \xi_k^*)$ , единственное в кубе (7.44), к нему сходятся последовательные приближения основного метода Ньютона

$$x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots, \xi_k^{(n)}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

определяемые из систем (6.8), при этом имеет место оценка ошибки

$$\max_{1 \leq i \leq k} |\xi_i^{(n)} - \xi_i^*| \leq \frac{1}{2^{n-1}} (2h)^{2^{n-1}} B\eta.$$

К решению  $x^*$  сходятся и последовательные приближения модифицированного метода Ньютона  $x'_n$ , определяемые из системы (6.9).

**§ 8. Замечания о практическом применении метода Ньютона**

Вычисление корня уравнения  $P(x) = 0$  методом Ньютона можно производить по следующей схеме:

$n$	0	1	2
$x_n$	$x_0$	$x_1 = x_0 + \Delta x_0$	
$P(x_n)$	$P(x_0)$		
$P'(x_n)$	$P'(x_0)$		
$\Delta x_n = -\frac{P(x_n)}{P'(x_n)}$	$\Delta x_0$		

Если речь идет о вычислении комплексных корней, то удобно пользоваться схемой, в которой фигурируют лишь вещественные числа:

$n$	0		1		2
$x_n = u_n + i v_n$	$u_0$	$v_0$	$u_1 = u_0 + \Delta u_0$	$v_1 = v_0 + \Delta v_0$	
$P(x_n) = a_n + i b_n$	$a_0$	$b_0$			
$P'(x_n) = c_n + i d_n$	$c_0$	$d_0$			
$P(x_n) \overline{P'(x_n)}$	$a_0 c_0 + b_0 d_0$	$b_0 c_0 - a_0 d_0$			
$P'(x_n) \overline{P'(x_n)}$	$c_0^2 + d_0^2$				
$\Delta x_n = -\frac{\overline{P} \overline{P'}}{P' \overline{P'}}$	$\Delta u_0 = -\frac{a_0 c_0 + b_0 d_0}{c_0^2 + d_0^2}$	$\Delta v_0 = -\frac{b_0 c_0 - a_0 d_0}{c_0^2 + d_0^2}$			

В случае модифицированного метода Ньютона вычислительная схема упрощается.

Вычисления нужно вести до тех пор, пока не совпадут с требуемым числом знаков два последовательных приближения  $x_k$  и  $x_{k+1}$ . Перед вычислением полезно убедиться в том, что последовательность  $x_n$  (или  $x'_n$ ) сходится к искомому корню. Для этой цели достаточно проверить выполнение условий теоремы 1 из § 7.

Если  $P(x)$  — многочлен, то вычисление значений  $P(x_n)$  и  $P'(x_n)$  как при вещественных, так и комплексных  $x_n$ , следует производить по схемам из § 5. При этом производную многочлена вычислять не нужно.

Отметим, что в некоторых книгах по численным методам (см., например, [5], стр. 125) делается необоснованное утверждение о том, что применение метода Ньютона для вычисления комплексных корней алгебраических уравнений нецелесообразно или менее целесообразно, чем применение методов выделения множителей.

Укажем одно достаточное условие сходимости метода Ньютона для вещественного уравнения  $P(x) = 0$  и вещественного  $x_0$ . Очевидно, что в этом случае метод Ньютона может привести лишь к вещественному корню уравнения. Предположим, что имеется промежуток  $[a, b]$ , для которого

$$P(a)P(b) < 0,$$

при этом

$$P'(x) \text{ и } P''(x)$$

сохраняют свой знак на  $[a, b]$ . Если, например,

$$P(b)P''(b) > 0,$$

то последовательности  $\{x_n\}$  и  $\{x'_n\}$ , начинающиеся с  $x_0 = x'_0 = b$ , сходятся к единственному в  $[a, b]$  решению  $x^*$  уравнения  $P(x) = 0$ . Это предложение геометрически очевидно. На рис. 10 изображен случай, когда  $P'(x) > 0$ ,  $P''(x) > 0$  на  $[a, b]$  и  $P(b)P''(b) > 0$ .

Упомянем о так называемом комбинированном методе касательных и хорд, применяемом при соблюдении указанных выше условий. Мы ограничимся указанием геометрической интерпретации метода (см. рис. 11). На первом шаге находится приближение по методу хорд  $a_1$  и приближение по

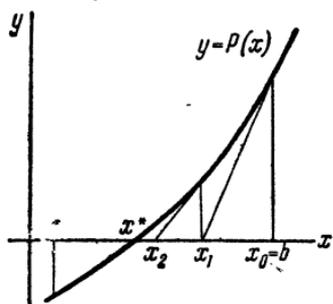


Рис. 10.

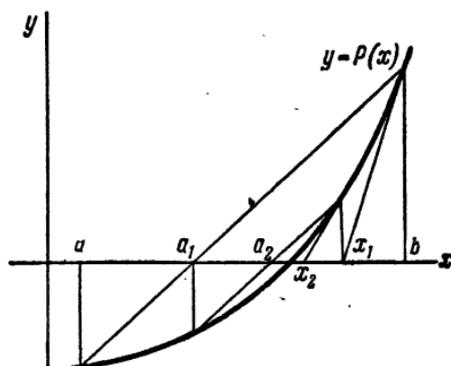


Рис. 11.

методу Ньютона  $x_1$ . Точно так же на втором шаге определяются  $a_2$  и  $x_2$  и т. д. Ясно, что корень  $x^*$  находится между  $a_n$  и  $x_n$ . На рисунке

$$a_1 < a_2 < x^* < x_2 < x_1.$$

Следовательно, комбинированный метод позволяет указать оценку ошибки  $|x_n - x^*|$ .

Приведем численные примеры.

**Пример 1.** Вычислим наименьший положительный корень уравнения

$$P(x) \equiv x - \operatorname{tg} x = 0$$

методом Ньютона. Начальное приближение  $x_0 = 4,5$  было найдено в § 1. Очевидно,  $P'(x) = -\operatorname{tg}^2 x$ . При вычислениях будем пользоваться „Пятизначными математическими таблицами“ Б. И. Сегала и К. А. Семендяева [26].

Применим теорему 1 из § 7. Вычисляем

$$P(x_0) = -0,1373, \quad P'(x_0) = -21,505;$$

в качестве  $\eta$  и  $B$  можно взять

$$\left| \frac{P(x_0)}{P'(x_0)} \right| < \eta = 0,0064, \quad B = \frac{1}{21,5} \cong 0,047.$$

Абсолютную величину  $P''(x)$  будем оценивать на отрезке  $|x - x_0| \leq 2\eta$ ; в нашем случае на отрезке

$$|x - 4,5| \leq 0,0128 \quad (8.1)$$

Нетрудно проверить, что функция

$$P''(x) = -2 \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

достигает своего наибольшего по абсолютной величине значения в (8.1) на правом конце этого промежутка, т. е. при  $x = 4,5128$ . Это значение  $P''(x)$  равно 251,51, поэтому мы можем взять  $K = 252$ . Величина  $h = BK\eta \cong 0,076 < \frac{1}{2}$ . Все условия теоремы 1 выполнены. Отсюда вытекает существование корня в промежутке (8.1), сходимость последовательности  $x_n$  и оценка ошибки.

При оценке ошибки воспользуемся табл. 5. При  $h = 0,1$   $\tau^* - \tau_1 = 0,056$ , поэтому

$$|x_1 - x^*| < 0,0064 \cdot 0,056 < 0,00036.$$

Таким образом,  $x_1$  отличается от корня не более, чем на четыре единицы четвертого десятичного знака. Аналогично для  $x_2$  получим

$$|x_2 - x^*| < 0,12 \cdot 10^{-5},$$

т. е.  $x_2$  отличается от корня не более, чем на две единицы шестого десятичного знака.

Следует иметь в виду, что при вычислениях мы не получим  $x_2$ , а получим некоторое  $\tilde{x}_2$  (см. § 3). Ошибка  $\tilde{x}_2$  (как приближения к  $x^*$ ) не обязана удовлетворять последнему неравенству, так как мы пользуемся пятизначными таблицами и ведем вычисления с пятью значащими цифрами.

Результаты вычислений приведены в табл. 6.

Таблица 6

$n$	0	1	2	3
$x_n$	4,5	4,4936	4,4934	4,4934
$\operatorname{tg} x_n$	4,6373	4,4975	4,4932	
$P'(x_n) = -\operatorname{tg}^2 x_n$	-21,505	-20,228	-20,189	
$P(x_n) = x_n - \operatorname{tg} x_n$	-0,1373	-0,0041	0,0002	
$\Delta x_n = -\frac{P(x_n)}{P'(x_n)}$	-0,0064	-0,0002	0,0000	

**Пример 2.** Вычислим комплексный корень уравнения

$$P(x) \equiv x^4 - 2,7x^3 + 4x^2 - 3,3x + 1 = 0,$$

взяв за начальное приближение  $x_0 = 0,52 + i1,16$ .

Сначала проверим выполнение условий теоремы 1 из § 7. Вычисление дает

$$\left| \frac{P(x_0)}{P'(x_0)} \right| = 0,02385, \quad \frac{1}{|P'(x_0)|} = 0,29062,$$

поэтому можно взять

$$\eta = 0,024, \quad B = 0,3.$$

Теперь нужно оценить сверху модуль  $|P''(x)|$  в круге  $|x - x_0| \leq 2\eta$ , т. е. в нашем случае в круге

$$|x - x_0| \leq 0,048. \quad (8.2)$$

Для этой цели используем значения производных от  $P(x)$ , вычисленные в § 5 (пример 4):

$$P''(x_0) = -13,3264 - i4,3152,$$

$$P'''(x_0) = -3,72 + i27,84,$$

$$P^{(IV)}(x_0) = 24.$$

Модули производных равны

$$|P''(x_0)| = 14,0076, \quad |P'''(x_0)| = 28,087, \quad |P^{(IV)}(x_0)| = 24.$$

Можно было указать не сами модули, а их верхние границы. Мы имеем разложение  $P''(x)$  в ряд Тэйлора

$$P''(x) = P''(x_0) + P'''(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}P^{(IV)}(x_0)(x - x_0)^2,$$

откуда для  $x$  из круга (8.2) получаем неравенство

$$|P''(x)| \leq 14,0076 + 28,087 \cdot 0,048 + 12 \cdot 0,048^2 = 15,383.$$

Следовательно, можно взять  $K = 16$ .

Имеем

$$h = BK\eta = 0,3 \cdot 16 \cdot 0,024 = 0,12 < 0,5.$$

Все условия теоремы выполнены, поэтому в окрестности  $x_0$  имеется корень уравнения и к нему сходятся последовательные приближения  $x_n$ . Оценим ошибку приближения  $x_2$ . С помощью табл. 5 находим  $\tau^* - \tau_2 = 0,21 \cdot 10^{-3}$  (для  $h = 0,12$ ), откуда

$$|x_2 - x^*| \leq 0,024 \cdot 0,21 \cdot 10^{-3} < 0,6 \cdot 10^{-5}. \quad (8.3)$$

Из оценки (8.3) видно, что вычисление следующих приближений при счете с пятью десятичными знаками бесполезно.

Т а б л и ц а 7

		1	-2,7	4	-3,3	1		
0,52 -1,04	1,16 1,616	1 1	-1,66 -0,62	0,6576 -1,6032	0,06646 -1,2808	0,00644 -0,7192	-0,02812 1,73500	0,07709 -2,97146
0,54347 -1,08694	1,15576 1,63114	1 1	-1,61306 -0,52612	0,61556 -1,58744	0,00020 -1,30151	-0,00385 -0,60807	-0,00396 1,40577	0,00023 -3,00847
0,54404 -1,08808	1,15681 1,63419	1	-1,61192	0,61191	-0,00001	0,00001	0,00002	-0,00001

Вычисления приведены в табл. 7 и 8. В табл. 7 вычисляются значения  $P(x_n)$  и  $P'(x_n)$  по схеме, указанной в § 5.

Таблица 8

$n$	0		1		2	
$x_n$	0,52	1,16	0,54347	1,15576	0,54404	1,15681
$P(x_n)$	-0,02812	0,07709	-0,00396	0,00023	0,00002	-0,00001
$P'(x_n)$	1,73500	-2,97146	1,40577	-3,00847		
$P \bar{P}'$	-0,27786	0,05019	-0,00626	-0,01159		
$P' \bar{P}'$	11,840		11,027			
$\Delta x_n$	0,02347	-0,00424	0,00057	0,00105		

**Пример 3.** Найдем решение системы

$$\left. \begin{aligned} P(\xi, \eta) &\equiv \xi^3 + \eta^3 - 4 = 0, \\ Q(\xi, \eta) &\equiv \xi^4 + \eta^2 - 3 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (8.4)$$

расположенное в первой координатной четверти. Начальное приближение

$$\xi_0 = 1, \quad \eta_0 = 1.4$$

было получено в § 1 (пример 5).

Для определения первого приближения  $(\xi_1, \eta_1)$  по методу Ньютона нужно решить линейную алгебраическую систему [см. (6.7)]:

$$\left. \begin{aligned} P(\xi_0, \eta_0) + \frac{\partial P(\xi_0, \eta_0)}{\partial \xi} (\xi - \xi_0) + \frac{\partial P(\xi_0, \eta_0)}{\partial \eta} (\eta - \eta_0) &= 0, \\ Q(\xi_0, \eta_0) + \frac{\partial Q(\xi_0, \eta_0)}{\partial \xi} (\xi - \xi_0) + \frac{\partial Q(\xi_0, \eta_0)}{\partial \eta} (\eta - \eta_0) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.5)$$

Эту систему (так же как системы для определения следующих приближений) будем решать при помощи определите-

Таблица 9

$m$	$\xi_0^m$	$\eta_{10}^m$	$\xi_1^m$	$\eta_{11}^m$	$\xi_2^m$	$\eta_{12}^m$	$\xi_3^m$	$\eta_{13}^m$
1	1	1,4	0,96815	1,45979	0,96764	1,45716	0,96764	1,45715
2	1	1,96	0,93731	2,13099	0,93633	2,12332		2,12329
3	1	2,744	0,90746	3,11080	0,90603	3,09402		3,09395
4	1		0,87855		0,87671			

Таблица 10

	$(\frac{\partial}{\partial \xi})_0$	$(\frac{\partial}{\partial \eta})_0$	$-( )_0$	$(\frac{\partial}{\partial \xi})_1$	$(\frac{\partial}{\partial \eta})_1$	$-( )_1$	$(\frac{\partial}{\partial \xi})_2$	$(\frac{\partial}{\partial \eta})_2$	$-( )_2$	$-( )_3$
$P$	3	5,88	0,256	2,81193	6,39297	-0,01826	2,80899	6,36996	-0,00005	0,00002
$Q$	4	2,8	0,04	3,62984	2,91958	-0,00954	3,62412	2,91432	-0,00003	0,00000
		0,4816	-15,12	0,00768	0,03946	-14,996	0,00005	0,00010	-14,899	
		-0,03185	0,05979	-0,00051	-0,00263		0,00000	-0,00001		

лей. Заметим, что численное решение линейных алгебраических систем при помощи определителей удобно лишь для систем двух уравнений. В случае систем большего числа уравнений гораздо выгоднее пользоваться, например, методом исключения Гаусса.

Результаты вычислений приведены в табл. 9 и 10. В первых двух строчках табл. 10 записываются коэффициенты и правые части линейных алгебраических систем, из которых определяются поправки  $(\xi_1 - \xi_0, \eta_1 - \eta_0), (\xi_2 - \xi_1, \eta_2 - \eta_1), \dots$  к последовательным приближениям  $(\xi_0, \eta_0), (\xi_1, \eta_1), \dots$ . Третья строка занята определителями и в четвертой строке записаны найденные поправки.

### § 9. Метод Лобачевского

В отличие от рассмотренных выше методов, которые можно применять как к алгебраическим, так и к трансцендентным уравнениям, метод Лобачевского применяется для нахождения корней лишь алгебраических уравнений

$$P(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0. \quad (9.1)$$

Будем предполагать, что коэффициенты  $a_0, a_1, \dots, a_n$  вещественны и  $a_0 \neq 0$ .

Для применения метода Лобачевского не требуется знать начальные приближения к корням уравнения, поэтому метод можно применять для отыскания начального приближения.

Укажем способ, позволяющий построить многочлен степени  $n$ , корни которого являются квадратами корней уравнения (9.1). Обозначим корни уравнения (9.1) через  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Мы имеем

$$P(x) = a_0 (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n). \quad (9.2)$$

Рассмотрим многочлен

$$P^*(x) = a_0 x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - \dots + (-1)^n a_n. \quad (9.3)$$

Ясно, что корни этого многочлена суть

$$-x_1, -x_2, \dots, -x_n,$$

поэтому

$$P^*(x) = a_0 (x + x_1)(x + x_2) \dots (x + x_n). \quad (9.4)$$





Ясно, что при достаточно большом  $k$ , в силу неравенств (9.9), в левых частях равенств (9.8) преобладающими будут первые слагаемые, и мы получим приближенные равенства

$$\left. \begin{aligned} x_1^m &\cong \frac{a_1^{(k)}}{a_0^{(k)}}, \\ x_1^m x_2^m &\cong \frac{a_2^{(k)}}{a_0^{(k)}}, \\ x_1^m x_2^m x_3^m &\cong \frac{a_3^{(k)}}{a_0^{(k)}}, \\ &\dots \\ x_1^m x_2^m \dots x_n^m &\cong \frac{a_n^{(k)}}{a_0^{(k)}} \end{aligned} \right\} \quad (9.10)$$

из которых последовательно находим

$$\left. \begin{aligned} x_1^m &\cong \frac{a_1^{(k)}}{a_0^{(k)}}, \\ x_2^m &\cong \frac{a_2^{(k)}}{a_1^{(k)}}, \\ &\dots \\ x_n^m &\cong \frac{a_n^{(k)}}{a_{n-1}^{(k)}} \end{aligned} \right\} \quad (9.11)$$

Равенства (9.11) позволяют определить абсолютные величины корней уравнения (9.1)  $|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|$ . Знаки корней можно определить подстановкой в уравнение.

Таким образом, основная работа при применении метода Лобачевского состоит в вычислении коэффициентов

$$a_0^{(k)}, a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \dots, a_n^{(k)}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Вычисления удобно располагать в таблицу:

$k$	$a_0^{(k)}$	$a_1^{(k)}$	$a_2^{(k)}$	...	$a_{n-1}^{(k)}$	$a_n^{(k)}$
0	$a_0$	$a_1$	$a_2$	...	$a_{n-1}$	$a_n$
	$a_0^2$	$a_1^2$ $-2a_0a_2$	$a_2^2$ $-2a_1a_3$ $2a_0a_4$		$a_{n-1}^2$ $-2a_{n-2}a_n$	$a_n^2$
1	$a_0^{(1)}$	$a_1^{(1)}$	$a_2^{(1)}$	...	$a_{n-1}^{(1)}$	$a_n^{(1)}$
	$a_0^{(1)2}$	$a_1^{(1)2}$ $-2a_0^{(1)}a_2^{(1)}$	$a_2^{(1)2}$ $-2a_1^{(1)}a_3^{(1)}$ $2a_0^{(1)}a_4^{(1)}$		$a_{n-1}^{(1)2}$ $-2a_{n-2}^{(1)}a_n^{(1)}$	$a_n^{(1)2}$
2	$a_0^{(2)}$	$a_1^{(2)}$	$a_2^{(2)}$	...	$a_{n-1}^{(2)}$	$a_n^{(2)}$

Остается выяснить вопрос о том, на каком значении  $k$  нужно остановить вычисления, иначе говоря, как узнать, что равенства (9.10) имеют место с принятой степенью точности. Чтобы сделать это, представим себе, что при некотором  $k = k_0$  равенства (9.10) выполнены с требуемой степенью точности:

$$x_1^{m_0} = \frac{a_1^{(k_0)}}{a_0^{(k_0)}}, \quad x_1^{m_0} x_2^{m_0} = \frac{a_2^{(k_0)}}{a_0^{(k_0)}}, \quad x_1^{m_0} x_2^{m_0} x_3^{m_0} = \frac{a_3^{(k_0)}}{a_0^{(k_0)}}, \quad \dots \quad (9.12)$$

Здесь  $m_0 = 2^{k_0}$ . При  $k = k_0 + 1$  равенства (9.10) тем более будут иметь место:

$$x_1^{2m_0} = \frac{a_1^{(k_0+1)}}{a_0^{(k_0+1)}}, \quad x_1^{2m_0} x_2^{2m_0} = \frac{a_2^{(k_0+1)}}{a_0^{(k_0+1)}}, \quad x_1^{2m_0} x_2^{2m_0} x_3^{2m_0} = \frac{a_3^{(k_0+1)}}{a_0^{(k_0+1)}}, \quad \dots \quad (9.13)$$

Так как  $a_0^{(k_0+1)} = a_0^{(k_0)2}$ , то из (9.12) и (9.13) находим

$$a_1^{(k_0+1)} = a_1^{(k_0)2}, \quad a_2^{(k_0+1)} = a_2^{(k_0)2}, \quad a_3^{(k_0+1)} = a_3^{(k_0)2}, \quad \dots$$

Следовательно, вычисления нужно остановить тогда, когда получим многочлен  $P_{k_0+1}(x)$ , коэффициенты которого являются с принятой точностью квадратами коэффициентов многочлена  $P_{k_0}(x)$ , полученного на предыдущем шаге.

Рассмотрим теперь более общий случай, когда все корни уравнения (9.1) вещественные, но среди них могут быть равные (или близкие) по абсолютной величине. Пусть, например, имеются два равных по абсолютной величине корня  $x_2$  и  $x_3$ , причем

$$|x_1| > |x_2| = |x_3| > |x_4| > \dots > |x_n|. \quad (9.14)$$

Из соотношений (9.8) и (9.14) вытекает, что при достаточно большом  $m = 2^k$  будут справедливы приближенные равенства

$$\left. \begin{aligned} x_1^m &\cong \frac{a_1^{(k)}}{a_0^{(k)}}, \\ 2x_1^m x_2^m &\cong \frac{a_2^{(k)}}{a_0^{(k)}}, \\ x_1^m x_2^{2m} &\cong \frac{a_3^{(k)}}{a_0^{(k)}}, \\ x_1^m x_2^{2m} x_4^m &\cong \frac{a_4^{(k)}}{a_0^{(k)}}, \\ \dots &\dots \\ x_1^m x_2^{2m} x_4^m \dots x_n^m &\cong \frac{a_n^{(k)}}{a_0^{(k)}}. \end{aligned} \right\} \quad (9.15)$$

Отсюда получаем

$$x_1^m \cong \frac{a_1^{(k)}}{a_0^{(k)}}, \quad x_2^{2m} \cong \frac{a_3^{(k)}}{a_1^{(k)}}, \quad x_4^m \cong \frac{a_4^{(k)}}{a_3^{(k)}}, \quad \dots$$

Из этих равенств можно определить абсолютные величины корней.

Чтобы узнать, на каком  $k$  нужно прекратить вычисления, предположим, что при  $k = k_0$  равенства (9.15) имеют место с принятой степенью точности. Записывая, как в пре-





в уравнение). Чтобы найти  $x_2$ , воспользуемся соотношением

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_n = -\frac{a_1}{a_0}$$

или

$$x_1 + 2r \cos \varphi + x_4 + \dots + x_n = -\frac{a_1}{a_0},$$

из которого найдем  $\cos \varphi$ . Вычислив  $\sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}$ , получим

$$x_2 = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Мы ограничились рассмотрением наиболее важных частных случаев, которые могут встретиться при вычислении корней методом Лобачевского. Более полное изложение метода Лобачевского можно найти, например, в книгах [13] и [31]. Вообще говоря, метод Лобачевского позволяет найти все корни уравнения.

Рассмотрим численные примеры.

**Пример 1.** Найдем корни уравнения

$$x^4 - 3,6x^3 + 4,2x^2 - 1,8x + 0,2 = 0.$$

Основные вычисления приведены в табл. 11. В таблице каждый шаг вычислений занимает две строки. В первой строке

Таблица 11

$k$	$a_0^{(k)}$	$a_1^{(k)}$	$a_2^{(k)}$	$a_3^{(k)}$	$a_4^{(k)}$
0	1	-3,6	4,2	-1,8	0,2
	2	-7,2	8,4	-3,6	0,4
1	1	4,56	5,08	1,56	0,04
	2	9,12	10,16	3,12	0,08
2	1	$0,10634 \cdot 10^2$	$0,11659 \cdot 10^2$	$0,20272 \cdot 10$	0,0016
	2	$0,21268 \cdot 10^2$	$0,23318 \cdot 10^2$	$0,40544 \cdot 10$	0,0032
3	1	$0,89764 \cdot 10^2$	$0,92821 \cdot 10^2$	$0,40722 \cdot 10$	$0,256 \cdot 10^{-5}$
	2	$0,17953 \cdot 10^3$	$0,18564 \cdot 10^3$	$0,81444 \cdot 10$	$0,512 \cdot 10^{-5}$
4	1	$0,78719 \cdot 10^4$	$0,78847 \cdot 10^4$	$0,16582 \cdot 10^2$	$0,65536 \cdot 10^{-11}$
	2	$0,15744 \cdot 10^5$	$0,15769 \cdot 10^5$	$0,33164 \cdot 10^2$	$0,13107 \cdot 10^{-10}$
5	1	$0,61951 \cdot 10^8$	$0,61907 \cdot 10^8$	$0,27496 \cdot 10^3$	$0,42950 \cdot 10^{-22}$
	2	$0,12390 \cdot 10^9$	$0,12381 \cdot 10^9$	$0,54992 \cdot 10^3$	$0,85900 \cdot 10^{-22}$
6	1	$0,38379 \cdot 10^{16}$	$0,38325 \cdot 10^{16}$	$0,75603 \cdot 10^5$	$0,18447 \cdot 10^{-44}$

(отвечающей  $k=0$ ) выписаны коэффициенты многочлена. Первый шаг вычислений начинается с заполнения второй строки, в которой записываются удвоенные коэффициенты многочлена. Это сделано для того, чтобы можно было вычислять коэффициенты  $a_i^{(1)}$  накоплением

$$a_i^{(1)} = a_i^2 - (2a_{i-1}) \times a_{i+1} + (2a_{i-2}) \times a_{i+2} - \dots$$

В третьей строке (отвечающей  $k=1$ ) записываются коэффициенты  $a_i^{(1)}$ .

Вычисления остановлены после того, как сделан шестой шаг, так как в пределах пяти значащих цифр выполнены равенства

$$a_i^{(6)} = a_i^{(5)^2}, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Из этих же равенств вытекает, что все корни уравнения вещественны. Из равенств

$$x_i^{64} = \frac{a_i^{(6)}}{a_{i-1}^{(6)}}, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

находим абсолютные величины корней  $|x_i|$ .

Найдем, например,  $|x_1|$ . Имеем

$$x_1^{64} = 0,38379 \cdot 10^{16},$$

откуда

$$64 \lg |x_1| = 15 + \lg 3,8379. \quad (9.18)$$

Пользуясь пятизначными таблицами логарифмов, находим

$$\lg 3,8379 = 0,58409.$$

Из (9.18) получаем

$$\lg |x_1| = 0,24350.$$

Снова при помощи таблиц логарифмов находим

$$|x_1| = 1,7519.$$

Но из самого уравнения видно, что ни один из его корней не может быть отрицательным, так как при нечетных степенях  $x$  коэффициенты отрицательны. Поэтому  $x_1 = 1,7519$ .

Аналогичным путем определяются прочие корни. Они оказываются равными

$$x_2 = 0,99999, \quad x_3 = 0,68033, \quad x_4 = 0,16780.$$

Для проверки правильности результата вычислений можно найденные значения корней подставить в левую часть уравнения. При этом следует пользоваться схемой Горнера.

**Пример 2.** Вычислим корни уравнения

$$x^4 + 0,75x^3 + 0,625x^2 - 0,375x - 0,125 = 0.$$

Вычисления приведены в табл. 12.

Таблица 12

$k$	$a_0^{(k)}$	$a_1^{(k)}$	$a_2^{(k)}$	$a_3^{(k)}$	$a_4^{(k)}$
0	1	0,75	0,625	-0,375	-0,125
	2	1,5	1,25	-0,75	-0,25
1	1	-0,6875	0,70312	0,29688	$0,15625 \cdot 10^{-1}$
	2	$-0,13750 \cdot 10$	$0,14062 \cdot 10$	0,59376	$0,31250 \cdot 10^{-1}$
2	1	-0,93358	0,93384	$0,66166 \cdot 10^{-1}$	$0,24414 \cdot 10^{-2}$
	2	$-0,18672 \cdot 10$	$0,18677 \cdot 10$	0,13233	$0,48828 \cdot 10^{-2}$
3	1	-0,99611	0,99609	$0,39220 \cdot 10^{-2}$	$0,59604 \cdot 10^{-7}$
	2	$-0,19922 \cdot 10$	$0,19922 \cdot 10$	$0,78440 \cdot 10^{-2}$	$0,11921 \cdot 10^{-6}$
4	1	-0,99994	$0,10000 \cdot 10$	$0,15263 \cdot 10^{-4}$	$0,35526 \cdot 10^{-14}$
	2	$-0,19999 \cdot 10$	$0,20000 \cdot 10$	$0,30740 \cdot 10^{-4}$	$0,71052 \cdot 10^{-14}$
5	1	$-0,10001 \cdot 10$	$0,10000 \cdot 10$	$0,23296 \cdot 10^{-9}$	$0,12621 \cdot 10^{-28}$

В поведении коэффициента  $a_1^{(k)}$  нет правильности, все прочие коэффициенты на пятом шаге вычислений оказываются квадратами соответствующих коэффициентов, полученных на четвертом шаге. Отсюда мы заключаем, что уравнение имеет два комплексных корня  $x_1$  и  $x_2$  и два вещественных —  $x_3$  и  $x_4$ , при этом

$$|x_1| = |x_2| > |x_3| > |x_4|.$$

Модуль комплексного корня  $|x_1|$  и абсолютные величины  $|x_3|$  и  $|x_4|$  вещественных корней находим из соотношений

$$|x_1|^{64} = \frac{a_2^{(5)}}{a_0^{(5)}}, \quad x_3^{32} = \frac{a_3^{(5)}}{a_2^{(5)}}, \quad x_4^{32} = \frac{a_4^{(5)}}{a_3^{(5)}}.$$

В результате вычислений получим

$$|x_1| = 1,00000, \quad x_3 = 0,50001, \quad x_4 = -0,24999.$$

Из соотношения

$$2|x_1| \cos \varphi + x_3 + x_4 = -\frac{a_1}{a_0}$$

находим  $\cos \varphi = -0,50001$  и

$$x_{1,2} = -0,50001 \pm i 0,86602.$$

## § 10. Методы выделения множителей

Указанные в заглавии методы применяются к разысканию корней алгебраического уравнения

$$P(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0. \quad (10.1)$$

Они позволяют находить многочлен степени  $m < n$ , являющийся делителем многочлена  $P(x)$ . Рассмотрим наиболее важный частный случай  $m = 2$ , когда разыскивается делитель второй степени. Будем также предполагать, что  $a_0, a_1, \dots, a_n$  — вещественные числа.

Одним из известных методов выделения множителей является метод предпоследнего остатка, предложенный Лин Ши-нге. К изложению метода предпоследнего остатка мы и переходим. Пусть  $x^2 + p_0 x + q_0$  — начальное приближение к одному из делителей второй степени многочлена  $P(x)$ . Выполним деление  $P(x)$  на  $x^2 + p_0 x + q_0$ . Так как этот квадратный трехчлен не является точным делителем, то в результате деления получим остаток — некоторую линейную функцию. Однако мы не будем производить деление до конца, а остановимся на предпоследнем остатке, который будет, вообще говоря, квадратным трехчленом

$$ax^2 + bx + c.$$

Разделим коэффициенты этого квадратного трехчлена на  $a$ , предполагая, что  $a \neq 0$ . Получим так называемый приведенный предпоследний остаток

$$x^2 + p_1 x + q_1.$$

Таким же образом по  $P(x)$  и  $x^2 + p_1 x + q_1$  строится приведенный предпоследний остаток  $x^2 + p_2 x + q_2$  и т. д.

Если существуют пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p^* \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = q^*, \quad (10.2)$$

то квадратный трехчлен

$$x^2 + p^*x + q^*,$$

как мы увидим, является делителем многочлена  $P(x)$ .

Укажем, как вычислять коэффициенты предпоследнего остатка. Воспользуемся соотношением (5.10)

$$\begin{aligned} a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = \\ = (b_0^{(0)}x^{n-2} + b_1^{(0)}x^{n-3} + \dots + b_{n-2}^{(0)})(x^2 + p_0x + q_0) + \\ + b_{n-1}^{(0)}(x + p_0) + b_n^{(0)}. \end{aligned}$$

Видно, что предпоследний остаток от деления  $P(x)$  на  $x^2 + p_0x + q_0$  равен

$$\begin{aligned} b_{n-2}^{(0)}(x^2 + p_0x + q_0) + b_{n-1}^{(0)}(x + p_0) + b_n^{(0)} = \\ = b_{n-2}^{(0)}x^2 + (p_0b_{n-2}^{(0)} + b_{n-1}^{(0)})x + b_n^{(0)} + p_0b_{n-1}^{(0)} + q_0b_{n-2}^{(0)} \end{aligned}$$

или, если воспользоваться последним из рекуррентных соотношений (5.11), равен

$$b_{n-2}^{(0)}x^2 + (p_0b_{n-2}^{(0)} + b_{n-1}^{(0)})x + a_n.$$

Таким образом, коэффициенты приведенного предпоследнего остатка  $p_1$  и  $q_1$  вычисляются по формулам

$$p_1 = p_0 + \frac{b_{n-1}^{(0)}}{b_{n-2}^{(0)}}, \quad q_1 = \frac{a_n}{b_{n-2}^{(0)}}.$$

Предполагается, что  $b_{n-2}^{(0)} \neq 0$ . Числа  $b_j^{(0)}$  ( $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ) определяются последовательно рекуррентными соотношениями (5.11)

$$\begin{aligned} b_j^{(0)} = a_j - p_0b_{j-1}^{(0)} - q_0b_{j-2}^{(0)}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n-1, \\ b_{-1} = b_{-2} = 0. \end{aligned}$$

Точно так же по коэффициентам  $p_k$  и  $q_k$  определяются числа  $b_j^{(k)}$  ( $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ) и находятся коэффициенты

$$p_{k+1} = p_k + \frac{b_{n-1}^{(k)}}{b_{n-2}^{(k)}}, \quad q_k = \frac{a_n}{b_{n-2}^{(k)}}. \quad (10.3)$$

Результаты вычислений удобно располагать в следующую таблицу:

$k$	$p_k$	$q_k = \frac{a_n}{b_{n-2}^{(k)}}$	$a_0$	$a_1$	...	$a_{n-2}$	$a_{n-1}$	$\frac{b_{n-1}^{(k)}}{b_{n-2}^{(k)}}$
0	$p_0$	$q_0$	$b_0^{(0)}$	$b_1^{(0)}$	...	$b_{n-2}^{(0)}$	$b_{n-1}^{(0)}$	$\frac{b_{n-1}^{(0)}}{b_{n-2}^{(0)}}$
1	$p_1$	$q_1$	...	...	...	...	...	...

Вычисления ведем до тех пор, пока с требуемой точностью не будут выполнены равенства

$$p_{k_0} = p_{k_0+1}, \quad q_{k_0} = q_{k_0+1}.$$

Решая квадратное уравнение

$$x^2 + p_{k_0}x + q_{k_0} = 0,$$

мы получим два корня уравнения (10.1).

Для построения начального приближения  $x^2 + p_0x + q_0$  к делителю многочлена  $P(x)$  нужно знать начальные приближения к двум корням уравнения (10.1). Если известны начальные приближения  $x_0^{(1)}$  и  $x_0^{(2)}$  к вещественным корням, то полагаем

$$p_0 = -x_0^{(1)} - x_0^{(2)}, \quad q_0 = x_0^{(1)}x_0^{(2)}. \quad (10.4)$$

Если известно начальное приближение  $x_0 = u_0 + iv_0$  к комплексному корню, то  $\bar{x}_0 = u_0 - iv_0$  — начальное приближение к комплексно-сопряженному корню, и можно взять

$$p_0 = -2u_0, \quad q_0 = u_0^2 + v_0^2. \quad (10.5)$$

К методам выделения множителей можно прийти следующим путем. Остаток от деления многочлена  $P(x)$  на квадратный трехчлен  $x^2 + px + q$  представляет собой линейную функцию

$$b_{n-1}x + b_n + pb_{n-1}. \quad (10.6)$$

где  $b_j$  определяются рекуррентными соотношениями (5.11)

$$b_j = a_j - pb_{j-1} - qb_{j-2}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (10.7)$$

$$b_{-1} = b_{-2} = 0.$$

Величины  $b_j$  суть непрерывные дифференцируемые функции переменных  $p$  и  $q$  (многочлены от  $p$  и  $q$ ).

Для того чтобы квадратный трехчлен  $x^2 + px + q$  был делителем многочлена  $P(x)$ , необходимо и достаточно, чтобы линейная функция (10.6) была равна нулю тождественно или, что то же самое, чтобы

$$b_n + pb_{n-1} = 0, \quad b_{n-1} = 0. \quad (10.8)$$

Таким образом, вопрос о нахождении делителя второй степени многочлена  $P(x)$  равносильен вопросу об определении решения  $(p^*, q^*)$  системы (10.8). Очевидно, система (10.8) равносильна системе

$$b_n = 0, \quad b_{n-1} = 0. \quad (10.9)$$

Методы выделения множителей представляют собой различные варианты метода итерации для решения системы (10.8) или (10.9). Например, метод предпоследнего остатка представляет собой метод итерации для решения системы (10.8), соответствующий записи этой системы в виде

$$p = p + \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}, \quad q = q + \frac{b_n + pb_{n-1}}{b_{n-2}}.$$

В самом деле, последовательные приближения метода итерации для этой системы вычисляются по формулам:

$$p_{k+1} = p_k + \frac{b_{n-1}^{(k)}}{b_{n-2}^{(k)}}, \quad q_{k+1} = q_k + \frac{b_n^{(k)} + p_k b_{n-1}^{(k)}}{b_{n-2}^{(k)}}, \quad (10.10)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

Здесь индекс  $k$  у  $b_{n-j}^{(k)}$ ,  $j = 0, 1, 2$ , означает, что функция  $b_j$  вычислена для значений  $p = p_k$ ,  $q = q_k$ , другими словами,  $b_j^{(k)}$  определяется соотношениями (10.7) при  $p = p_k$ ,  $q = q_k$ . Очевидно, соотношения (10.10) совпадают с соотношениями (10.3), откуда и вытекает наше утверждение о методе предпоследнего остатка.

Указанная интерпретация метода предпоследнего остатка делает очевидным высказанное выше утверждение о том, что если выполнены соотношения (10.2), то  $x^2 + p^*x + q^*$  является делителем многочлена  $P(x)$ . В самом деле, при соблюдении соотношений (10.2)  $p^*$  и  $q^*$  удовлетворяют системе (10.8).

Можно указать и другие методы выделения множителей. Если записать систему (10.9) в виде

$$p = p + b_n, \quad q = q + b_{n-1},$$

то получим метод, в котором приближения  $(p_{k+1}, q_{k+1})$  определяются формулами

$$p_{k+1} = p_k + b_n^{(k)}, \quad q_{k+1} = q_k + b_{n-1}^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (10.11)$$

Недостатком метода предпоследнего остатка и метода, определяемого формулой (10.11), является то обстоятельство, что даже в случае, когда начальное приближение как угодно близко к делителю многочлена, оба эти метода могут расходиться. Такого недостатка лишены методы, которые мы получим, применяя для решения системы (10.9) основной и модифицированный методы Ньютона.

Нам понадобятся частные производные первого порядка по  $p$  и  $q$  от функций  $b_j$ . Дифференцируя обе части соотношения (10.7) по  $p$  и по  $q$ , получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial b_j}{\partial p} &= -b_{j-1} - p \frac{\partial b_{j-1}}{\partial p} - q \frac{\partial b_{j-2}}{\partial p}, \\ \frac{\partial b_j}{\partial q} &= -b_{j-2} - p \frac{\partial b_{j-1}}{\partial q} - q \frac{\partial b_{j-2}}{\partial q}, \\ j &= 0, 1, 2, \dots, n, \quad b_{-1} = b_{-2} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.12)$$

Определим числа  $c_j$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$ , при помощи рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} c_j &= b_j - pc_{j-1} - qc_{j-2}, \\ j &= 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad c_{-1} = c_{-2} = 0. \end{aligned} \quad (10.13)$$

Числа  $c_j$  получаются из чисел  $b_j$  таким же путем, каким числа  $b_j$  получаются из чисел  $a_j$ .

Записывая соотношения (10.12) в виде

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\partial b_j}{\partial p}\right) &= b_{j-1} - p \left(-\frac{\partial b_{j-1}}{\partial p}\right) - q \left(-\frac{\partial b_{j-2}}{\partial p}\right), \\ \left(-\frac{\partial b_j}{\partial q}\right) &= b_{j-2} - p \left(-\frac{\partial b_{j-1}}{\partial q}\right) - q \left(-\frac{\partial b_{j-2}}{\partial q}\right) \end{aligned}$$

и сравнивая их с (10.13), заключаем, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_j}{\partial p} &= -c_{j-1}, & \frac{\partial b_j}{\partial q} &= -c_{j-2}, \\ j &= 0, 1, 2, \dots, n, & c_{-1} &= c_{-2} = 0. \end{aligned} \quad (10.14)$$

Будем теперь применять к решению системы (10.9) метод Ньютона. Матрица Якоби левых частей системы, в силу (10.14), такова:

$$C = \begin{pmatrix} \frac{\partial b_n}{\partial p} & \frac{\partial b_n}{\partial q} \\ \frac{\partial b_{n-1}}{\partial p} & \frac{\partial b_{n-1}}{\partial q} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} c_{n-1} & c_{n-2} \\ c_{n-2} & c_{n-3} \end{pmatrix}, \quad (10.15)$$

поэтому системой для определения  $(\Delta p_k, \Delta q_k)$  методом Ньютона является [см. (6.8)]:

$$- \begin{pmatrix} c_{n-1}^{(k)} & c_{n-2}^{(k)} \\ c_{n-2}^{(k)} & c_{n-3}^{(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta p_k \\ \Delta q_k \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} b_n^{(k)} \\ b_{n-1}^{(k)} \end{pmatrix}. \quad (10.16)$$

Здесь  $c_{n-j}^{(k)}$ ,  $j = 1, 2, 3$ , определяются рекуррентными соотношениями (10.13), в которых следует положить  $p = p_k$ ,  $q = q_k$ .

Предположим, что определитель матрицы

$$C_k = - \begin{pmatrix} c_{n-1}^{(k)} & c_{n-2}^{(k)} \\ c_{n-2}^{(k)} & c_{n-3}^{(k)} \end{pmatrix} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

отличен от нуля. Обозначим его через  $\Delta_k$ . Нетрудно записать решение системы (10.16)

$$\left. \begin{aligned} \Delta p_k &= \alpha_{11}^{(k)} b_n^{(k)} + \alpha_{12}^{(k)} b_{n-1}^{(k)}, \\ \Delta q_k &= \alpha_{21}^{(k)} b_n^{(k)} + \alpha_{22}^{(k)} b_{n-1}^{(k)}, \end{aligned} \right\} \quad (10.17)$$

где

$$\alpha_{11}^{(k)} = \frac{c_{n-3}^{(k)}}{\Delta_k}, \quad \alpha_{12}^{(k)} = \alpha_{21}^{(k)} = -\frac{c_{n-2}^{(k)}}{\Delta_k}, \quad \alpha_{22}^{(k)} = \frac{c_{n-1}^{(k)}}{\Delta_k}. \quad (10.18)$$

Чтобы найти  $(\Delta p_k, \Delta q_k)$  по формулам (10.17), мы должны вычислить два ряда чисел

$$b_0^{(k)}, b_1^{(k)}, \dots, b_{n-1}^{(k)}, b_n^{(k)}, \\ c_0^{(k)}, c_1^{(k)}, \dots, c_{n-1}^{(k)}$$

при помощи соотношений (10.7) и (10.13).

Для упрощения вычислений можно применять модифицированный метод Ньютона. В этом случае нам понадобится вычислить лишь один раз числа

$$c_0^{(0)}, c_1^{(0)}, \dots, c_{n-1}^{(0)}.$$

Формулы для определения  $(\Delta p'_k, \Delta q'_k)$  таковы:

$$\left. \begin{aligned} \Delta p'_k &= \alpha_{11}^{(0)} b_n^{(k)} + \alpha_{12}^{(0)} b_{n-1}^{(k)}, \\ \Delta q'_k &= \alpha_{21}^{(0)} b_n^{(k)} + \alpha_{22}^{(0)} b_{n-1}^{(k)}. \end{aligned} \right\} \quad (10.19)$$

Здесь числа  $\alpha_{ij}^{(0)}$  ( $i, j = 1, 2$ ) определяются формулами (10.18) при  $k=0$ ;  $b_j^{(k)}$  ( $j=0, 1, 2, \dots, n$ ) определяются рекуррентными соотношениями (10.7), в которых следует положить

$$p = p'_k, \quad q = q'_k \quad (p'_0 = p_0, q'_0 = q_0).$$

Мы уже указывали, что методы, определяемые формулами (10.17) и (10.19) будут сходиться, если начальное приближение  $(p_0, q_0)$  достаточно близко к коэффициентам квадратного трехчлена  $x^2 + p^*x + q^*$  — делителя многочлена  $P(x)$ . Конечно, при этом предполагается, что матрица Якоби (10.15) системы (10.9) в некоторой окрестности  $(p_0, q_0)$  неособенная. Это утверждение является следствием теоремы 4 из § 7.

**Пример 1.** Вычислим корни уравнения

$$x^4 - 6,4x^3 + 14x^2 - 11,5x + 3 = 0 \quad (10.20)$$

методом предпоследнего остатка. Находим начальные приближения к корням уравнения (10.20):

$$x_0^{(1)} = 0,5, \quad x_0^{(2)} = 1.$$

На основании (10.4) берем

$$p_0 = -1,5, \quad q_0 = 0,5.$$

Результаты вычислений приведены в табл. 13.

Таблица 13

$k$	$p_k$	$q_k$	1	-6,4	14	-11,5	$\Delta p_k$
0	-1,5	0,5	1	-4,9	6,15	0,175	0,02846
1	-1,47154	0,48780	1	-4,92846	6,25977	0,11560	0,01847
2	-1,45307	0,47925	1	-4,94693	6,33251	0,07240	0,01143
3	-1,44164	0,47375	1	-4,95836	6,37808	0,04392	0,00689
4	-1,43475	0,47036	1	-4,96525	6,40575	0,02610	0,00407
5	-1,43068	0,46833	1	-4,96932	6,42216	0,01534	0,00239
6	-1,42829	0,46713	1	-4,97171	6,43183	0,00895	0,00139
7	-1,42690	0,46643	1	-4,97310	6,43745	0,00520	0,00081
8	-1,42609	0,46602	1	-4,97391	6,44074	0,00302	0,00047
9	-1,42562	0,46578	1	-4,97438	6,44264	0,00172	0,00027
10	-1,42535	0,46565	1	-4,97465	6,44373	0,00102	0,00016
11	-1,42519	0,46557	1	-4,97481	6,44438	0,00059	0,00009
12	-1,42510	0,46552	1	-4,97490	6,44475	0,00033	0,00005
13	-1,42505	0,46550	1	-4,97495	6,44495	0,00022	0,00003
14	-1,42502	0,46548	1	-4,97498	6,44507	0,00011	0,00002
15	-1,42500	0,46547	1	-4,97500	6,44516	0,00007	0,00001
16	-1,42499	0,46547	1	-4,97501	6,44519	0,00005	0,00001
17	-1,42498	0,46546	1	-4,97502	6,44524	0,00001	0,00000
18	-1,42498	0,46546					

Из таблицы видно, что

$$x^2 - 1,42498x + 0,46546$$

является искомым делителем многочлена  $P(x)$ . Корни этого квадратного трехчлена

$$x_1 = 0,50710, \quad x_2 = 0,91787$$

являются корнями уравнения (10.20). Два других корня уравнения (10.20) находим из квадратного уравнения

$$x^2 - 4,97502x + 6,44524 = 0.$$

Они оказываются равными

$$x_{3,4} = 2,48751 \pm i0,50748.$$

**Пример 2.** Уравнение

$$x^4 + 0,75x^3 + 0,625x^2 - 0,375x - 0,125 = 0 \quad (10.21)$$

было решено в § 9 методом Лобачевского. Один из его корней оказался равным

$$-0,50001 + i0,86602.$$

Решим это уравнение методом, определяемым формулами (10.17), взяв за начальное приближение к корню

$$x_0 = -0,55 + i0,9.$$

По формулам (10.5) находим начальное приближение к коэффициентам искомого квадратного трехчлена

$$p_0 = 1,1, \quad q_0 = 1,1125. \quad (10.22)$$

Вычисления приведены в табл. 14. В таблице на каждый шаг отведено две строки. В первой строке записаны, в частности, числа  $b_j^{(k)}$ ,  $j=0, 1, 2, 3, 4$ , во второй строке записаны числа  $c_j^{(k)}$ ,  $j=0, 1, 2, 3$ . Мы видим, что в пределах пяти десятичных знаков  $\Delta p_3 = \Delta q_3 = 0$ . В действительности  $p_3 = 1$ ,  $q_3 = 1$  являются точными коэффициентами делителя  $x^2 + x + 1$  многочлена (10.21). Корни делителя суть

$$x_{1,2} = -0,5 \pm i0,86602.$$

Два других корня уравнения (10.21) являются корнями квадратного трехчлена

$$x^2 - 0,25x - 0,125$$

и они равны

$$x_3 = 0,5, \quad x_4 = -0,25.$$

В табл. 15 приведены результаты решения уравнения (10.21) методом выделения множителей, полученным при помощи модифицированного метода Ньютона. Величины  $\Delta p'_k$  и  $\Delta q'_k$  вычислялись по формулам (10.19), которые в нашем случае записываются так:

$$\Delta p'_k = 0,70332b_n^{(k)} + 0,18432b_{n-1}^{(k)},$$

$$\Delta q'_k = 0,18432b_n^{(k)} - 0,64135b_{n-1}^{(k)}.$$

Числа  $\alpha_{ij}^{(0)}$ ,  $i, j = 1, 2$ , взяты из табл. 14.

Таблица 14

$k$	$P_k$	$q_k$	1	0,75	0,625	-0,375	-0,125	$\Delta_k$	$a_{11}^{(k)}$	$a_{12}^{(k)}$	$a_{22}^{(k)}$	$\Delta P_k$	$\Delta q_k$
0	1,1	1,1125	1	-0,35	-0,1025	0,12712	-0,15080	-2,06165	0,70332	0,18432	-0,64135	-0,08263	-0,10932
1	1,01737	1,00318	1	-1,45	0,38	1,32224	-0,01974	-1,43806	0,89338	0,13748	-0,75721	-0,01747	-0,00365
2	0,99990	0,99953	1	-1,28474	-0,10617	0,00123	0,00017	-1,41946	0,88048	0,08841	-0,79125	0,00010	0,00047
3	1,00000	1,00000	1	-1,24980	-0,12465	-1,00058	0,00000						
				-0,25000	-0,12550	0,00000	0,00000						
					-0,12500	0,00000	0,00000						

Таблица 15

$k$	$P'_k$	$q'_k$	1	0,75	0,625	-0,375	-0,125	$b_3^{(k)}$	$b_4^{(k)}$	$\Delta P'_k$	$\Delta q'_k$
0	1,1	1,1125	1	-0,35	-0,1025	0,12712	-0,15080	0,12712	-0,15080	-0,08263	-0,10932
1	1,01737	1,00318	1	-0,26737	-0,10617	0,00123	0,00017	0,00123	-0,01974	-0,01366	-0,00443
2	1,00371	0,99875	1	-0,25371	-0,11910	-0,00207	-0,00207	-0,00207	-0,00397	-0,00317	0,00060
3	1,00054	0,99935	1	-0,25054	-0,12367	-0,00089	-0,00089	-0,00089	-0,00052	-0,00053	0,00047
4	1,00001	0,99982	1	-0,25001	-0,12481	-0,00022	-0,00022	-0,00022	0,00001	-0,00003	0,00014
5	0,99998	0,99996	1	-0,24998	-0,12498	-0,00005	-0,00005	-0,00005	0,00002	0,00000	0,00003
6	0,99998	0,99999	1	-0,24998	-0,12501	-0,00001	-0,00001	-0,00001	0,00000	0,00001	0,00001
7	0,99999	1,00000	1	-0,24999	-0,12501	0,00000	0,00000	0,00000	0,00001	0,00001	0,00000
8	1,00000	1,00000	1	-0,25000	-0,12500	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00001	0,00000

Отметим, что метод предпоследнего остатка для уравнения (10.21) и начального приближения (10.22) не сходится к делителю  $x^2 + x + 1$ , несмотря на то, что  $(p_0, q_0)$  близко к  $(1, 1)$ . В отсутствии сходимости на первых шагах можно убедиться, если фактически провести вычисления.

Причина отсутствия сходимости метода предпоследнего остатка к делителю  $x^2 + x + 1$  заключается в следующем. Мы видели, что метод предпоследнего остатка представляет собой метод итерации для решения нелинейной системы

$$\left. \begin{aligned} p &= \varphi(p, q) \equiv p + \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}, \\ q &= \psi(p, q) \equiv \frac{a_n}{b_{n-2}}. \end{aligned} \right\} \quad (10.23)$$

В малой окрестности  $(p^*, q^*)$ , где  $p^*$  и  $q^*$  — коэффициенты точного делителя многочлена, нелинейная система (10.23) близка к линейной алгебраической системе

$$\left. \begin{aligned} p &= \varphi(p^*, q^*) + \frac{\partial \varphi(p^*, q^*)}{\partial p} (p - p^*) + \frac{\partial \varphi(p^*, q^*)}{\partial q} (q - q^*), \\ q &= \psi(p^*, q^*) + \frac{\partial \psi(p^*, q^*)}{\partial p} (p - p^*) + \frac{\partial \psi(p^*, q^*)}{\partial q} (q - q^*). \end{aligned} \right\} \quad (10.24)$$

Отсюда вытекает, что при достаточной малости  $p_0 - p^*$ ,  $q_0 - q^*$  характер сходимости метода итерации для системы (10.23) определяется, вообще говоря, характером сходимости метода итерации для системы (10.24).

Известно, что для сходимости метода итерации для линейной алгебраической системы

$$x = Ax + b$$

необходимо и достаточно, чтобы все собственные числа матрицы  $A$  по модулю были меньше единицы. Матрица  $A$  системы (10.24) имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi(p^*, q^*)}{\partial p} & \frac{\partial \varphi(p^*, q^*)}{\partial q} \\ \frac{\partial \psi(p^*, q^*)}{\partial p} & \frac{\partial \psi(p^*, q^*)}{\partial q} \end{pmatrix}.$$

С помощью формул (10.14) находим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial p} &= 1 + \frac{-c_{n-2}b_{n-2} + b_{n-1}c_{n-3}}{b_{n-2}^2}, & \frac{\partial \varphi}{\partial q} &= \frac{-c_{n-3}b_{n-2} + b_{n-1}c_{n-4}}{b_{n-2}^2}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial p} &= \frac{a_n c_{n-3}}{b_{n-2}^2}, & \frac{\partial \psi}{\partial q} &= \frac{a_n c_{n-4}}{b_{n-2}^2}. \end{aligned} \right\} \quad (10.25)$$

Возвращаясь к нашему примеру, вычислим величины  $b_j, c_j$  по формулам (10.7) и (10.13) при  $p = p^* = 1, q = q^* = 1$ :

$j$	0	1	2	3	4
$a_j$	1	0,75	0,625	-0,375	-0,125
$b_j$	1	-0,25	-0,125	0	0
$c_j$	1	-1,25	0,125	1,125	

и подставим их в правые части (10.25). Получим

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -10 \\ 10 & -8 \end{pmatrix}.$$

Собственные числа матрицы  $A$  суть корни уравнения

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -10 \\ 10 & -8-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

равные

$$\lambda_{1,2} = 3 \pm i5\sqrt{3}.$$

Мы видим, что  $|\lambda_{1,2}|$  значительно больше единицы. Этим и объясняется отсутствие сходимости метода предпоследнего остатка к делителю  $x^2 + x + 1$ .

## ГЛАВА II

### АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ

#### § 1. Введение

Многие методы вычислений основаны на идее замены функций, входящих в формулировку задачи, более простыми функциями и близкими к данным в каком-либо смысле. Например, при решении уравнения  $\varphi(x) = 0$  методом Ньютона функция  $\varphi(x)$  в окрестности начального приближения  $x_0$  к корню заменяется линейной функцией

$$\varphi_0(x) \equiv \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x - x_0).$$

Корень функции  $\varphi_0(x)$  и принимается за следующее приближение к корню уравнения  $\varphi(x) = 0$ .

Формула Симпсона

$$\int_a^b \varphi(x) dx \cong \frac{b-a}{6} \left[ \varphi(a) + 4\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) + \varphi(b) \right]$$

для приближенного вычисления интеграла основана на замене подынтегральной функции  $\varphi(x)$  многочленом  $P(x)$  второй (или меньшей) степени, который при

$$x = a, \quad \frac{a+b}{2}, \quad b$$

имеет те же значения, что и  $\varphi(x)$ . Интеграл

$$\int_a^b P(x) dx = \frac{b-a}{6} \left[ \varphi(a) + 4\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) + \varphi(b) \right]$$

и принимается за приближенное значение интеграла  $\int_a^b \varphi(x) dx$ .

В обоих примерах в качестве приближающих функций брались многочлены. Основой для применения многочленов в качестве приближений к непрерывным функциям является свойство полноты многочленов в классе непрерывных функций, выражаемое теоремой Вейерштрасса:

Если  $f(x)$  непрерывная на конечном замкнутом промежутке  $[a, b]$  функция, то для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать такой многочлен  $P(x)$ , что

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon$$

при всех  $x$  из  $[a, b]$ .

Другое важное свойство многочленов состоит в том, что они являются функциями простой природы. Чтобы вычислить значение многочлена, нужно выполнить конечное число арифметических операций: сложение, вычитание и умножение. Производная и интеграл (неопределенный) от многочлена сами являются многочленами.

Теорема Вейерштрасса не дает способа для построения приближающего многочлена, она указывает лишь на принципиальную возможность построения такого многочлена. Существуют различные способы приближения функций при помощи многочленов. В методах вычислений большое применение получил способ интерполирования, сущность которого сводится к следующему.

Выберем на  $[a, b]$   $n + 1$  различных точек

$$x_0, x_1, \dots, x_n,$$

называемых узлами интерполирования, и построим многочлен степени не выше  $n$

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n,$$

значения которого в точках  $x_0, x_1, \dots, x_n$  совпадают с значениями заданной на  $[a, b]$  непрерывной функции  $f(x)$ . Как мы увидим в последующем, такой многочлен всегда существует и является единственным. Он и принимается за приближение к  $f(x)$ . Это так называемое интерполирование по значениям функции, о нем шла речь во втором из приведенных выше примеров.

Иногда требуют, чтобы в узлах интерполирования совпадали не только значения  $f(x)$  и  $P(x)$ , но и значения их последовательных производных до некоторого порядка.

С интерполированием такого рода мы имели дело в первом примере.

В настоящей главе мы рассмотрим основные факты теории интерполирования многочленами или, как говорят, алгебраического интерполирования.

## § 2. Конечные разности

Пусть известны значения некоторой функции  $y = f(x)$  для равноотстоящих значений аргумента  $x_k = x_0 + kh$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, N$ ,  $h > 0$ :

$$y_0 = f(x_0), \quad y_1 = f(x_1), \quad y_2 = f(x_2), \quad \dots, \quad y_N = f(x_N).$$

Будем говорить, что задана *таблица функции*  $f(x)$  с шагом  $h$ , начальным значением аргумента  $x_0$  и конечным значением аргумента  $x_N$ . То обстоятельство, что таблица функции  $f(x)$  задана с шагом  $h$  от  $x = x_0$  до  $x = x_N$ , принято записывать так:

$$x = x_0(h) x_N.$$

Конечными разностями первого порядка функции  $f(x)$  называются числа

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0, \quad \Delta y_1 = y_2 - y_1, \quad \Delta y_2 = y_3 - y_2, \quad \dots$$

Аналогичным образом определяются конечные разности второго порядка

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0, \quad \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1, \quad \dots$$

Пусть уже известны конечные разности порядка  $k$

$$\Delta^k y_0, \quad \Delta^k y_1, \quad \Delta^k y_2, \quad \dots$$

Тогда разности  $(k+1)$ -го порядка определяются соотношениями

$$\Delta^{k+1} y_0 = \Delta^k y_1 - \Delta^k y_0, \quad \Delta^{k+1} y_1 = \Delta^k y_2 - \Delta^k y_1, \quad \dots$$

Таблицу значений функции и ее конечных разностей принято записывать следующим образом:

$x$	$y$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
$x_0$	$y_0$				
$x_1$	$y_1$	$\Delta y_0$			
$x_2$	$y_2$	$\Delta y_1$	$\Delta^2 y_0$		
$x_3$	$y_3$	$\Delta y_2$	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_0$	
$x_4$	$y_4$	$\Delta y_3$	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_0$
$x_5$	$y_5$	$\Delta y_4$	$\Delta^2 y_3$	$\Delta^3 y_2$	$\Delta^4 y_1$

Таким образом, все разности четного порядка располагаются в тех же горизонтальных строчках, что и аргументы, все нечетные разности располагаются в промежуточных строчках.

Иногда таблицу конечных разностей записывают в виде:

$x$	$y$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
$x_0$	$y_0$	$\Delta y_0$	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$
$x_1$	$y_1$	$\Delta y_1$	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_1$
$x_2$	$y_2$	$\Delta y_2$	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$	
$x_3$	$y_3$	$\Delta y_3$	$\Delta^2 y_3$		
$x_4$	$y_4$	$\Delta y_4$			
$x_5$	$y_5$				

**Пример 1.** Построим таблицу конечных разностей функции  $y = \sin x$ ,  $x = 0 (0,1) 0,7$ . Значения  $\sin x$  берем из [26]. Результаты вычислений приведены в табл. 16. В таблице у разностей не пишутся нули, предшествующие первой значащей цифре. Это делается для того, чтобы сделать таблицу более компактной и не тратить время на выписывание нулей.

Таблица 16

$x$	$y$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	0				
0,1	0,09983	9983	—99		
0,2	0,19867	9884	—199	—100	4
0,3	0,29552	9685	—295	—96	2
0,4	0,38942	9390	—389	—94	3
0,5	0,47943	9001	—480	—91	8
0,6	0,56464	8521	—563	—83	
0,7	0,64422	7958			

Конечные разности для функций, заданных в виде таблицы, играют роль, подобную той, которую играют производные для функций с непрерывно изменяющимся аргументом. Указываемые ниже основные свойства конечных разностей аналогичны соответствующим свойствам производных.

1. Конечная разность суммы двух функций  $F(x) = f(x) + g(x)$  равна сумме конечных разностей слагаемых  $f(x)$  и  $g(x)$ .

2. Если  $F(x) = Af(x)$ , где  $A$  — постоянная, то

$$\Delta F(x_i) = A\Delta f(x_i).$$

Ясно, что свойства 1 и 2 имеют место для разностей любого порядка.

Конечная разность от многочлена степени  $n$  является многочленом степени  $n - 1$ . Для многочлена  $P(x) = x^k$  это утверждение очевидно:

$$(x+h)^k - x^k = khx^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2}h^2x^{k-2} + \dots$$

На основании свойств 1 и 2 утверждение справедливо для любого многочлена.

Отсюда вытекает следующее свойство.

3. Конечная разность порядка  $n$  от многочлена степени  $n$  равна постоянной величине  $u$ , следовательно, все разности более высокого порядка равны нулю.

Разность порядка  $k$  можно выразить непосредственно через значения функции. Имеем

$$\begin{aligned}\Delta y_l &= y_{l+1} - y_l, \\ \Delta^2 y_l &= \Delta y_{l+1} - \Delta y_l = (y_{l+2} - y_{l+1}) - (y_{l+1} - y_l) = \\ &= y_{l+2} - 2y_{l+1} + y_l.\end{aligned}$$

По индукции можно установить, что

$$\Delta^k y_l = y_{k+l} - \frac{k}{1!} y_{k+l-1} + \frac{k(k-1)}{2!} y_{k+l-2} - \dots + (-1)^k y_l.$$

Если ввести оператор сдвига  $E$ , применение которого к функции  $f(x)$  увеличивает ее аргумент на величину  $h$ :

$$Ef(x) = f(x+h), \quad Ey_m = y_{m+1},$$

то предыдущую формулу можно записать следующим образом:

$$\Delta^k y_l = (E - 1)^k y_l.$$

Это символическое равенство следует понимать так. Выражение  $(E - 1)^k$  записывается по формуле бинома Ньютона и полученный многочлен умножается на  $y_l$ :

$$E^k y_l - \frac{k}{1!} E^{k-1} y_l + \frac{k(k-1)}{2!} E^{k-2} y_l - \dots + (-1)^k y_l.$$

Чтобы получить отсюда формулу для  $\Delta^k y_l$ , нужно воспользоваться равенствами

$$E^m y_l = y_{l+m}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Легко проверить также справедливость формулы

$$y_{k+l} = y_l + \frac{k}{1!} \Delta y_l + \frac{k(k-1)}{2!} \Delta^2 y_l + \dots + \Delta^k y_l,$$

которая дает представление значения функции через конечные разности. Эту формулу можно записать компактно в символической форме

$$y_{k+l} = (1 + \Delta)^k y_l.$$

В таблицах функций, с которыми приходится иметь дело в приближенных вычислениях, значения задаются приближенно, с ошибкой округления, не превышающей обычно половину единицы последней удерживаемой цифры. Поэтому интересно выяснить, какое влияние на конечные разности оказывает ошибка в значении функции. Рассмотрим простейший случай, когда на некотором участке таблицы имеется ошибка только в одном значении функции. Влияние этой ошибки на конечные разности можно усмотреть из приводимой ниже таблицы, где в значении  $y_l$  допущена ошибка  $\varepsilon$ .

$x$	$y$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
$x_{l-3}$	$y_{l-3}$	$\Delta y_{l-3}$			
$x_{l-2}$	$y_{l-2}$	$\Delta y_{l-2}$	$\Delta^2 y_{l-3}$		
$x_{l-1}$	$y_{l-1}$	$\Delta y_{l-1} + \varepsilon$	$\Delta^2 y_{l-2} + \varepsilon$	$\Delta^3 y_{l-3} + \varepsilon$	$\Delta^4 y_{l-4} + \varepsilon$
$x_l$	$y_l + \varepsilon$	$\Delta y_l - \varepsilon$	$\Delta^2 y_{l-1} - 2\varepsilon$	$\Delta^3 y_{l-2} - 3\varepsilon$	$\Delta^4 y_{l-3} - 4\varepsilon$
$x_{l+1}$	$y_{l+1}$	$\Delta y_{l+1}$	$\Delta^2 y_l + \varepsilon$	$\Delta^3 y_{l-1} + 3\varepsilon$	$\Delta^4 y_{l-2} + 6\varepsilon$
$x_{l+2}$	$y_{l+2}$	$\Delta y_{l+2}$	$\Delta^2 y_{l+1}$	$\Delta^3 y_l - \varepsilon$	$\Delta^4 y_{l-1} - 4\varepsilon$
$x_{l+3}$	$y_{l+3}$				$\Delta^4 y_l + \varepsilon$

Из таблицы видно, что ошибка влияет на  $k+1$  значений  $k$ -й разности, при этом коэффициентами при  $\varepsilon$  являются биномиальные коэффициенты

$$C_k^{(m)} = \frac{k(k-1)\dots(k-m+1)}{m!}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, k,$$

с чередующимися знаками.

Если функция достаточно гладкая, т. е. если она сама и ее производные достаточно хорошо аппроксимируются многочленами невысоких степеней, то понятно, что разности некоторого порядка должны быть постоянны с точностью до

Таблица 17

$x$	$P(x)$	$\Delta P(x)$	$\Delta^2 P(x)$	$\Delta^3 P(x)$	$\Delta^4 P(x)$
0	1				
0,02	0,63489	-36511	6544		
0,04	0,33522	-29967	5912	-632	27
0,06	0,09467	-24055	5307	-605	27
0,08	-0,09281	-18748	4729	-578	19
0,10	-0,23300	-14019	4170	-559	60
0,12	-0,33149	-9849	3671	-499	-23
0,14	-0,39327	-6178	3149	-522	58
0,16	-0,42356	-3029	2685	-464	23
0,18	-0,42700	-344	2244	-441	
0,20	-0,40800	1900			

одной — двух единиц последнего знака. Это обстоятельство можно использовать для контроля правильности вычисления значений функции. Приведенная выше таблица распространения ошибки в конечных разностях позволяет обнаружить „изолированную“ ошибку и устранить ее.

**Пример 2.** Приведем пример, иллюстрирующий процесс обнаружения ошибки в таблице. В табл. 17 приведены конечные разности многочлена

$$P(x) = 70x^4 - 140x^3 + 90x^2 - 20x + 1,$$

$$x = 0(0,02)0,20.$$

Если бы значения  $P(x)$  были заданы точно, без ошибок округления, то четвертые разности по свойству 3 были бы постоянными. Так как значения  $P(x)$  заданы с пятью десятичными знаками, то в наиболее невыгодном случае отклонение четвертой разности от ее точного значения будет равно

$$0,5 \cdot 10^{-5} (1 + 4 + 6 + 4 + 1) = 8 \cdot 10^{-5},$$

так как на величину четвертой разности влияют значения ошибок округления в пяти значениях  $P(x)$ , причем эти ошибки войдут в четвертую разность с коэффициентами  $C_4^{(k)}$  ( $k = 0, 1, 2, 3, 4$ ). Поэтому четвертые разности в нашем случае не могут отличаться друг от друга более, чем на 16 единиц пятого знака. Но в таблице четвертые разности колеблются значительно сильнее, и это указывает на наличие ошибки.

В таблице более всего искажена четвертая разность, расположенная в строке  $x = 0,12$ . Это показывает, что ошибочным, по-видимому, является значение  $P(x)$  при  $x = 0,12$ . Можно указать величину ошибки. Обозначим через  $\alpha$  величину четвертой разности. Так как сумма биномиальных коэффициентов с чередующимися знаками равна нулю, то сумма всех четвертых разностей (в нашем случае их семь) приближенно равна  $7\alpha$ :

$$191 \cong 7\alpha,$$

откуда  $\alpha = 27$  единиц пятого десятичного знака. Величина четвертой разности в строке  $x = 0,12$  равна  $\alpha + 6\epsilon$ , откуда

$$27 + 6\epsilon \cong -23$$

и  $\epsilon = -8$ .

Исправленное значение многочлена равно

$$P(0,12) = -0,33149 + 0,00008 = -0,33141,$$

что отличается от истинного значения  $-0,3314048$  на половину единицы пятого десятичного знака. Значения четвертых разностей после исправления (в единицах пятого десятичного знака) таковы:

$$27; 27; 27; 28; 25; 26; 31.$$

### § 3. Разностные отношения

Часто приходится иметь дело с функциями, значения которых известны для неравноотстоящих значений аргумента. Конечные разности при этом использовать нельзя, и в этом случае применяются так называемые *разностные отношения* или *разделенные разности*.

Пусть задана таблица значений функции  $f(x)$  для различных аргументов  $x_0, x_1, \dots, x_N$

$$f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_N).$$

Значения  $x_0, x_1, \dots, x_N$  не предполагаются равноотстоящими, они не обязаны также монотонно возрастать или убывать с возрастанием индекса.

Разностными отношениями первого порядка называются числа

$$f(x_1, x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \quad f(x_2, x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

$$f(x_3, x_2) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}, \dots$$

Геометрически разностные отношения первого порядка представляют собой угловые коэффициенты хорд графика функции  $y = f(x)$ .

По разностным отношениям первого порядка определяются разностные отношения второго порядка

$$f(x_2, x_1, x_0) = \frac{f(x_2, x_1) - f(x_1, x_0)}{x_2 - x_0},$$

$$f(x_3, x_2, x_1) = \frac{f(x_3, x_2) - f(x_2, x_1)}{x_3 - x_1}, \dots$$

Аналогично определяются разностные отношения третьего порядка

$$f(x_3, x_2, x_1, x_0) = \frac{f(x_3, x_2, x_1) - f(x_2, x_1, x_0)}{x_3 - x_0}, \dots \text{ и т. д.}$$

Таблицу разностных отношений функции записывают так же, как таблицу конечных разностей.

$x$	Разностные отношения порядка			
	0	1	2	3
$x_0$	$f(x_0)$			
$x_1$	$f(x_1)$	$f(x_1, x_0)$		
$x_2$	$f(x_2)$	$f(x_2, x_1)$	$f(x_2, x_1, x_0)$	
$x_3$	$f(x_3)$	$f(x_3, x_2)$	$f(x_3, x_2, x_1)$	$f(x_3, x_2, x_1, x_0)$
$x_4$	$f(x_4)$	$f(x_4, x_3)$	$f(x_4, x_3, x_2)$	$f(x_4, x_3, x_2, x_1)$

Составление таблицы разностных отношений требует большей затраты вычислительного труда, чем составление таблицы конечных разностей.

**Пример.** Составим разностные отношения многочлена

$$P(x) = x^4 + 2,5x^2 - 3x^2 + 2x + 1,8$$

для системы аргументов

$$x_0 = 1,2, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 1,3, \quad x_3 = 1,5, \quad x_4 = 1,1, \quad x_5 = 1,8.$$

Вычисления приведены в табл. 18.

Таблица 18

x	Разностные отношения порядка				
	0	1	2	3	4
1,2	6,27360				
1	4,30000	9,86800			
1,3	7,67860	11,26200	13,94000		
1,5	11,55000	19,35700	16,19000	7,50000	1,00000
1,1	5,16160	15,97100	16,93000	7,40000	1,00000
1,8	20,75760	22,28000	21,03000	8,20000	

Отметим основные свойства разностных отношений.

1. Разностное отношение суммы функций  $F(x) = f(x) + g(x)$  равно сумме разностных отношений слагаемых  $f(x)$  и  $g(x)$ .

2. Если  $F(x) = Af(x)$ , где  $A$  — постоянная, то

$$F(x_{i+1}, x_i) = Af(x_{i+1}, x_i).$$

Свойства 1 и 2 справедливы для разностных отношений любого порядка.

3. Разностное отношение порядка  $n$  от многочлена степени  $n$  является постоянной величиной и, следовательно, разностные отношения более высокого порядка равны нулю.

В силу сказанного выше, достаточно установить это свойство для простейшего многочлена  $P(x) = x^n$ , а для этого,

в свою очередь, достаточно доказать, что разностное отношение первого порядка  $P(x_1, x_0)$  является многочленом степени  $n-1$  от аргументов  $x_0, x_1$ . Но это очевидно:

$$P(x_1, x_0) = \frac{x_1^n - x_0^n}{x_1 - x_0} = x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x_0 + \dots + x_0^{n-1}.$$

Выразим разностное отношение любого порядка непосредственно через значения функции  $f(x)$ . Имеем

$$f(x_1, x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0}.$$

Преобразуем теперь разностное отношение второго порядка:

$$\begin{aligned} f(x_2, x_1, x_0) &= \frac{f(x_2, x_1) - f(x_1, x_0)}{x_2 - x_0} = \\ &= \frac{1}{x_2 - x_0} \left\{ \left[ \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} + \frac{f(x_2)}{x_2 - x_1} \right] - \left[ \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0} \right] \right\} = \\ &= \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} + \\ &\quad + \frac{f(x_1)}{x_2 - x_0} \left[ \frac{1}{x_1 - x_2} - \frac{1}{x_1 - x_0} \right] = \\ &= \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что разностное отношение порядка  $n$  представляется в виде

$$\begin{aligned} f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0) &= \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f(x_k)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_{k+1} - x_k) \dots (x_k - x_n)}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Введем специальное обозначение для многочлена степени  $n+1$ , корнями которого являются числа  $x_0, x_1, \dots, x_n$ :

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n). \quad (3.2)$$

Очевидно,

$$\omega'(x_k) = (x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n). \quad (3.3)$$

Если воспользоваться соотношением (3.3), то формулу (3.1) можно записать в более компактной форме:

$$f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0) = \sum_{k=0}^n \frac{f(x_k)}{\omega'(x_k)}. \quad (3.4)$$

Из формулы (3.4) вытекает следующее свойство разностных отношений.

4. *Разностное отношение является симметрической функцией своих аргументов, иначе говоря, оно не изменяется при любой перестановке аргументов.*

Укажем еще формулу, которая выражает значение функции  $f(x_k)$  через разностные отношения:

$$\begin{aligned} f(x_k) = & f(x_0) + (x_k - x_0) f(x_0, x_1) + \\ & + (x_k - x_0)(x_k - x_1) f(x_0, x_1, x_2) + \dots \\ & \dots + (x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1}) f(x_0, x_1, \dots, x_k). \end{aligned} \quad (3.5)$$

При  $k=1$  формула (3.5) следует из определения разностного отношения

$$f(x_1) = f(x_0) + (x_1 - x_0) f(x_0, x_1).$$

Воспользуемся методом математической индукции. Предположим, что формула (3.5) верна при  $k=n-1$  и докажем ее справедливость при  $k=n$ . По индуктивному предположению

$$\begin{aligned} f(x_n) = & f(x_1) + (x_n - x_1) f(x_1, x_2) + \\ & + (x_n - x_1)(x_n - x_2) f(x_1, x_2, x_3) + \dots \\ & \dots + (x_n - x_1)(x_n - x_2) \dots (x_n - x_{n-1}) f(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (3.6)$$

По определению разностных отношений

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_k) = & f(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}) + \\ & + (x_k - x_0) f(x_0, x_1, \dots, x_k). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Подставим в (3.6) вместо  $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  правую часть равенства (3.7). Получим

$$\begin{aligned} f(x_n) = & f(x_0) + (x_1 - x_0) f(x_0, x_1) + \\ & + (x_n - x_1) [f(x_0, x_1) + (x_2 - x_0) f(x_0, x_1, x_2)] + \\ & + (x_n - x_1)(x_n - x_2) [f(x_0, x_1, x_2) + \\ & + (x_3 - x_0) f(x_0, x_1, x_2, x_3)] + \dots \\ & \dots + (x_n - x_1)(x_n - x_2) \dots (x_n - x_{n-1}) \times \\ & \times [f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) + (x_n - x_0) f(x_0, x_1, \dots, x_n)]. \end{aligned}$$

Объединяя слагаемые, содержащие одинаковые разностные отношения, мы и получим формулу (3.5) при  $k = n$ .

Отметим один важный факт, вытекающий из формулы (3.5). Рассмотрим многочлен степени не выше  $n$

$$\begin{aligned} P(x) = & f(x_0) + (x - x_0) f(x_0, x_1) + \\ & + (x - x_0)(x - x_1) f(x_0, x_1, x_2) + \dots \\ & \dots + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) f(x_0, x_1, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (3.8)$$

В силу формулы (3.5) этот многочлен при  $x = x_k$  равен  $f(x_k)$ :

$$P(x_k) = f(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (3.9)$$

Связь между разностными отношениями и производными дается следующей теоремой.

**Теорема 1.** Если  $f(x)$  дифференцируема  $n$  раз на промежутке  $[a, b]$  и точки  $x_0, x_1, \dots, x_n$  принадлежат  $[a, b]$ , то существует точка  $\xi$ ,  $a < \xi < b$ , такая, что

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \quad (3.10)$$

Доказательство. Составим разность

$$\varphi(x) = f(x) - P(x),$$

где  $P(x)$  — многочлен, определяемый формулой (3.8).

Функция  $\varphi(x)$   $n$  раз дифференцируема на  $[a, b]$  и обращается в нуль в  $n+1$  различных точках  $x_0, x_1, \dots, x_n$  этого промежутка. По теореме Ролля  $\varphi'(x)$  имеет по меньшей мере  $n$  различных корней внутри  $[a, b]$ . По теореме Ролля в применении к  $\varphi'(x)$  вторая производная  $\varphi''(x)$  имеет по меньшей мере  $n-1$  различных корней внутри  $[a, b]$ .

Продолжая таким же образом, получим что  $\varphi^{(n)}(x)$  имеет внутри  $[a, b]$  по крайней мере один корень. Обозначим его через  $\xi$ ,  $a < \xi < b$ .

В производную

$$\varphi^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - n!f(x_0, x_1, \dots, x_n)$$

подставим  $x = \xi$ . Так как  $\varphi^{(n)}(\xi) = 0$ , то мы получаем (3.10).

Если аргументы  $x_k$  равноотстоящие

$$x_k = x_0 + kh, \quad h > 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N,$$

то для  $f(x)$  можно построить конечные разности, и мы получим

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta f(x_0)}{h},$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta f(x_1)}{h}.$$

По определению разностного отношения и конечной разности второго порядка имеем

$$\begin{aligned} f(x_0, x_1, x_2) &= \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0} = \\ &= \frac{1}{2h} \left[ \frac{\Delta f(x_1)}{h} - \frac{\Delta f(x_0)}{h} \right] = \frac{1}{2!} \frac{\Delta^2 f(x_0)}{h^2}. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что при любом  $n$

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n) = \frac{\Delta^n f(x_0)}{n! h^n}. \quad (3.11)$$

Сравнивая формулы (3.10) и (3.11), получаем теорему, устанавливающую связь между конечными разностями и производными.

**Теорема 2.** Если  $f(x)$  дифференцируема  $n$  раз на  $[x_0, x_0 + nh]$ , то внутри этого промежутка имеется точка  $\xi$  такая, что

$$\Delta^n f(x_0) = h^n f^{(n)}(\xi). \quad (3.12)$$

Из формулы (3.12) вытекает, что  $\Delta^n f(x_0)$  является малой величиной порядка  $h^n$  (если  $h$  мало) и что при уменьшении шага таблицы  $h$  в  $r$  раз происходит уменьшение разности  $n$ -го порядка приблизительно в  $r^n$  раз.

## § 4. Общая задача интерполирования

Задачу интерполирования, в достаточно общем для наших целей виде, можно сформулировать следующим образом. Пусть для функции  $f(x)$  известны ее значения в  $p_0$  различных точках

$$x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_{p_0}^{(0)},$$

известны значения ее производной  $f'(x)$  в  $p_1$  различных точках

$$x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_{p_1}^{(1)}$$

и т. д., известны значения производной порядка  $m$   $f^{(m)}(x)$  в  $p_m$  различных точках

$$x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_{p_m}^{(m)}.$$

Таким образом, о функции  $f(x)$  мы имеем всего

$$n = p_0 + p_1 + \dots + p_m$$

данных. Требуется построить функцию, аппроксимирующую  $f(x)$ . Одним из способов решения этой задачи является построение обобщенного интерполяционного многочлена.

Выберем систему линейно-независимых функций простого вида

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \dots, \varphi_k(x), \dots \quad (4.1)$$

и составим линейную комбинацию с произвольными постоянными коэффициентами из первых  $n$  функций системы

$$S_n(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \dots + c_n\varphi_n(x). \quad (4.2)$$

$S_n(x)$  можно назвать *обобщенным многочленом*. Подберем постоянные  $c_1, c_2, \dots, c_n$  так, чтобы в точке  $x_i^{(k)}$  производная порядка  $k$  обобщенного многочлена  $S_n(x)$  совпадала с  $k$ -й производной функции  $f(x)$ :

$$S_n^{(k)}(x_i^{(k)}) = f^{(k)}(x_i^{(k)}), \quad (4.3)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, m. \quad i = 1, 2, \dots, p_k.$$



ческую систему

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos kx, \sin kx, \dots$$

В этом случае обобщенный многочлен (4.2) является тригонометрическим многочленом и интерполирование называется тригонометрическим.

Отметим, что система тригонометрических многочленов по второй теореме Вейерштрасса полна в классе непрерывных  $2\pi$ -периодических функций.

### § 5. Интерполирование по значениям функции

Рассмотрим простейший частный случай алгебраического интерполирования, когда в узлах интерполирования

$$x_0, x_1, \dots, x_n$$

заданы значения функции

$$f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n).$$

Узлы предполагаются различными. Требуется построить многочлен

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n, \quad (5.1)$$

совпадающий с  $f(x)$  в точках  $x_i$ :

$$P_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (5.2)$$

Обозначим через  $M_k$  точку на плоскости  $(x, y)$  с координатами  $(x_k, f(x_k))$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ . Геометрически

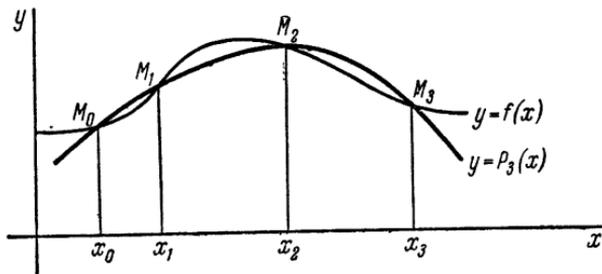


Рис. 12.

условия (5.2) означают, что график многочлена  $y=P_n(x)$  должен проходить через точки  $M_0, M_1, \dots, M_n$ . На рис. 12



вестными":  $a_0, a_1, \dots, a_n, -1$ . Но тогда ее определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & x_0 & 1 & f(x_0) \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 & f(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \dots & x_n & 1 & f(x_n) \\ x^n & x^{n-1} & \dots & x & 1 & P_n(x) \end{vmatrix} = 0.$$

Раскладывая определитель на сумму двух определителей

$$\begin{vmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & x_0 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \dots & x_n & 1 & 0 \\ x^n & x^{n-1} & \dots & x & 1 & P_n(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & x_0 & 1 & f(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \dots & x_n & 1 & f(x_n) \\ x^n & x^{n-1} & \dots & x & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

и замечая, что первый определитель равен  $P_n(x)W_{n+1}$ , мы получаем представление интерполяционного многочлена при помощи определителей

$$P_n(x) = -\frac{1}{W_{n+1}} \begin{vmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & x_0 & 1 & f(x_0) \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 & f(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \dots & x_n & 1 & f(x_n) \\ x^n & x^{n-1} & \dots & x & 1 & 0 \end{vmatrix}. \quad (5.4)$$

Укажем еще два представления  $P_n(x)$  — формулу Лагранжа и формулу Ньютона, которые во многих случаях оказываются более удобными, чем представление (5.4). Начнем с построения интерполяционного многочлена в форме Лагранжа.

Построим многочлен  $\omega_k(x)$ , равный единице при  $x = x_k$  и равный нулю в остальных узлах  $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$ . Очевидно,

$$\omega_k(x) = C(x - x_0)(x - x_1) \dots \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n),$$

где постоянную  $C$  следует определить из условия  $\omega_k(x_k) = 1$ . Таким образом,

$$\omega_k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)}.$$

Ясно, что

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \omega_k(x) f(x_k). \quad (5.5)$$

Действительно,  $P_n(x)$ , как линейная комбинация с постоянными коэффициентами многочленов степени  $n$ , является многочленом степени  $\leq n$ , при этом

$$P_n(x_i) = \sum_{k=0}^n \omega_k(x_i) f(x_k) = f(x_i).$$

Воспользуемся обозначением (3.2)

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n).$$

Имеем

$$\omega_k(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_k) \omega'(x_k)},$$

и формулу (5.5) можно переписать в виде

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\omega(x)}{(x - x_k) \omega'(x_k)} f(x_k). \quad (5.6)$$

Формула (5.6) называется *интерполяционной формулой Лагранжа*.

*Интерполяционная формула Ньютона* была по существу уже установлена в § 3. Формула (3.8) дает представление интерполяционного многочлена в форме Ньютона:

$$P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0) f(x_0, x_1) + \dots + (x - x_0)(x - x_1) f(x_0, x_1, x_2) + \dots \dots + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) f(x_0, x_1, \dots, x_n). \quad (5.7)$$

Формула Ньютона обладает преимуществом по сравнению с формулой Лагранжа в следующем отношении. Если многочлен  $P_n(x)$  уже построен и дает недостаточно хорошее приближение, то возникает надобность в добавлении нового узла и построении  $P_{n+1}(x)$ . При добавлении нового узла как в формуле Ньютона, так и в формуле Лагранжа добавится одно слагаемое, но при этом в формуле Ньютона прежние слагаемые останутся без изменения, а в формуле Лагранжа все слагаемые изменятся.

Вычисление значения  $P_n(x)$  при  $x = \tilde{x}$  с помощью формулы Ньютона производится следующим образом. Составляем таблицу разностных отношений функции  $f(x)$  (для определенности считаем  $n = 4$ ).

x	Разностные отношения порядка				
	0	1	2	3	4
$x_0$	$f(x_0)$				
$x_1$	$f(x_1)$	$f(x_1, x_0)$			
$x_2$	$f(x_2)$	$f(x_2, x_1)$	$f(x_2, x_1, x_0)$		
$x_3$	$f(x_3)$	$f(x_3, x_2)$	$f(x_3, x_2, x_1)$	$f(x_3, x_2, x_1, x_0)$	
$x_4$	$f(x_4)$	$f(x_4, x_3)$	$f(x_4, x_3, x_2)$	$f(x_4, x_3, x_2, x_1)$	$f(x_4, x_3, x_2, x_1, x_0)$

В интерполяционную формулу Ньютона входят разностные отношения, расположенные в верхней косой строке таблицы. Эти значения в таблице подчеркнуты. Перепишем формулу (5.7) при  $x = \tilde{x}$  в виде

$$\begin{aligned}
 P_4(\tilde{x}) = & \{ [ (f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) (\tilde{x} - x_3) + \\
 & + f(x_0, x_1, x_2, x_3)) (\tilde{x} - x_2) + \\
 & + f(x_0, x_1, x_2)] (\tilde{x} - x_1) + f(x_0, x_1) \} (\tilde{x} - x_0) + f(x_0). \quad (5.8)
 \end{aligned}$$

Отсюда видно, что вычисление  $P_n(\tilde{x})$  можно производить по схеме, аналогичной схеме Горнера для вычисления значения многочлена.

Пример. Дана таблица функции  $f(x) = \text{sh } x$ :

$x$	0,40	0,55	0,65	0,80	0,90	1,05
$f(x)$	0,41075	0,57815	0,69675	0,88811	1,02652	1,25386

Требуется найти приближенное значение  $\text{sh}(x)$  при  $x = \tilde{x} = 0,596$ .

В табл. 19 вычислены разностные отношения  $f(x)$ . Из таблицы видно, что разностные отношения четвертого порядка постоянны, поэтому будем заменять  $f(x)$  многочленом  $P_4(x)$ .

Таблица 19

$x$	Разностные отношения порядка				
	0	1	2	3	4
0,40	0,41075				
0,55	0,57815	1,1160			
0,65	0,69675	1,1860	0,2800		
0,80	0,88811	1,2757	0,3588	0,197	
0,90	1,02652	1,3841	0,4336	0,214	0,034
1,05	1,25386	1,5156	0,5260	0,231	0,034

Возьмем  $x_0 = 0,40$ . При вычислении  $P_4(\tilde{x})$  по формуле Ньютона понадобятся числа

$$\tilde{x} - x_3 = -0,204, \quad \tilde{x} - x_2 = -0,054,$$

$$\tilde{x} - x_1 = 0,046, \quad \tilde{x} - x_0 = 0,196.$$

Вычисление  $P_4(\tilde{x})$  по формуле (5.8) записываем так же, как в случае схемы Горнера:

$$\begin{array}{r}
 0,034 \quad 0,197 \quad 0,2800 \quad 1,1160 \quad 0,41075 \\
 \quad -0,007 \quad -0,0103 \quad 0,0124 \quad 0,22117 \\
 \hline
 \quad \quad 0,190 \quad 0,2697 \quad 1,1284 \quad 0,63192
 \end{array}$$

Последнее значение в третьей строке равно  $P_4(\tilde{x})$ . Таким образом,  $\text{sh } \tilde{x} \cong 0,63192$ . Найденное приближенное значение  $\text{sh } 0,596$  совпадает с тем, которое указано в [26].

### § 6. Об остаточном члене интерполирования

Если интерполируемая функция  $f(x)$  сама является многочленом степени меньшей или равной  $n$ , то интерполяционный многочлен  $P_n(x)$  совпадает с  $f(x)$  тождественно:

$$f(x) - P_n(x) \equiv 0.$$

Это вытекает из единственности интерполяционного многочлена.

Если  $f(x)$  на промежутке  $[a, b]$ , содержащем узлы интерполирования  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , не является многочленом степени меньшей или равной  $n$ , то разность

$$R_n(f, x) = f(x) - P_n(x) \tag{6.1}$$

будет равна нулю при  $x = x_0, x_1, \dots, x_n$ , но заведомо отлична от тождественного нуля на  $[a, b]$ . Функция  $R_n(f, x)$  характеризует точность приближения функция  $f(x)$  интерполяционным многочленом  $P_n(x)$  и называется *остаточным членом* или *остатком интерполирования*.

Докажем теорему о представлении остаточного члена интерполирования в форме Лагранжа.

**Теорема.** Если  $f(x)$  дифференцируема  $n+1$  раз на промежутке  $[a, b]$ , содержащем узлы интерполирования  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , то для любой точки  $x$  из  $[a, b]$  существует точка  $\xi$ ,  $a < \xi < b$ , такая, что

$$R_n(f, x) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \tag{6.2}$$

где

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n).$$

Доказательство. Возьмем точку  $x \in [a, b]$ , отличную от всех узлов  $x_0, x_1, \dots, x_n$  и рассмотрим значения функции

$$f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n), f(x).$$

По формуле (3.5) для  $k = n + 1$  ( $x_{n+1} = x$ ) имеем

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_0, x_1) + \dots \\ \dots + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})f(x_0, x_1, \dots, x_n) + \\ + \omega(x)f(x_0, x_1, \dots, x_n, x).$$

Сумма первых  $n + 1$  слагаемых в правой части совпадает с интерполяционным многочленом  $P_n(x)$  [см. (5.7)], поэтому последнюю формулу можно переписать в виде

$$R_n(f, x) = \omega(x)f(x_0, x_1, \dots, x_n, x). \quad (6.3)$$

По теореме 1 из § 3 имеется точка  $\xi$ ,  $a < \xi < b$ , такая, что

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n, x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Сопоставляя последнее равенство с (6.3), получим (6.2).

Представление (6.2) получено в предположении, что  $x$  отлично от всех узлов. Но при  $x = x_k$  оно, очевидно, имеет место.

Обозначим через  $W_{n+1}(M)$  класс функций, заданных на промежутке  $[a, b]$  и имеющих производную  $(n + 1)$ -го порядка, удовлетворяющую на  $[a, b]$  неравенству

$$|f^{(n+1)}(x)| \leq M.$$

Пусть узлы интерполирования  $x_0, x_1, \dots, x_n$  принадлежат  $[a, b]$ . Тогда по теореме о представлении остатка интерполирования в виде (6.2) для любой функции  $f(x) \in W_{n+1}(M)$  имеем

$$|R_n(f, x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |\omega(x)|. \quad (6.4)$$

С другой стороны, для функции

$$f_0(x) = \frac{M}{(n+1)!} \omega(x) \in W_{n+1}(M)$$

интерполяционный многочлен совпадает с тождественным нулем и, следовательно,

$$|R_n(f_0, x)| = \frac{M}{(n+1)!} |\omega(x)|.$$

Отсюда и из (6.4) вытекает, что

$$r(x, x_0, x_1, \dots, x_n) = \sup |R_n(f, x)| = \frac{M}{(n+1)!} |\omega(x)|, \quad (6.5)$$

где точная верхняя граница берется по всем функциям  $f$  из класса  $W_{n+1}(M)$ . Таким образом, точная верхняя граница остатка интерполирования функций класса  $W_{n+1}(M)$  в точке  $x$  зависит от узлов интерполирования и от  $x$ , что и оправдывает обозначение  $r(x, x_0, x_1, \dots, x_n)$ .

Предположим, что на промежутке  $[a, b]$  задана таблица значений произвольной функции  $f(x) \in W_{n+1}(M)$  для значений аргументов

$$x'_1, x'_2, \dots, x'_m, \quad (6.6)$$

где  $m > n + 1$ . Поставим задачу: какие из аргументов (6.6) нужно выбрать в качестве узлов интерполирования  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , чтобы в заданной точке  $x$  точная верхняя граница (6.5) была наименьшей. Это задача о минимизации остатка интерполирования для класса функций  $W_{n+1}(M)$  в точке  $x$ . Будем ее решать следующим образом. Возьмем из (6.6) те точки в качестве узлов интерполирования, для которых правая часть соотношения (6.5) или, что то же самое, величина

$$|\omega(x)| = |x - x_0| |x - x_1| \dots |x - x_n|$$

принимает наименьшее значение.

Такой выбор произвести легко. В качестве  $x_0$  возьмем ту из точек (6.6), для которой разность

$$|x - x'_k|, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

наименьшая. В качестве  $x_1$  возьмем ту из оставшихся  $m - 1$  точек (6.6), для которой  $|x - x'_k|$  наименьшая и т. д. Очевидно, что при таком выборе узлов  $|\omega(x)|$  имеет наименьшее значение.

Рассмотренная задача о минимизации остатка интерполирования в точке возникает тогда, когда приходится иметь дело с функцией  $f(x)$ , заданной таблично. Предположим теперь, что функция  $f(x) \in W_{n+1}(M)$  задана аналитически и требуется построить ее интерполяционный многочлен на

промежутке  $[a, b]$  по  $n+1$  узлам. В этом случае имеется полная свобода в выборе узлов на промежутке  $[a, b]$ .

Поставим задачу: расположить узлы  $x_0, x_1, \dots, x_n$  на  $[a, b]$  так, чтобы максимум по  $x$  на  $[a, b]$  точной верхней границы (6.5) был наименьшим. Это задача о минимизации остатка интерполирования в классе функций  $W_{n+1}(M)$  на промежутке  $[a, b]$ .

Максимум точной верхней границы (6.5) по  $x$  на  $[a, b]$  равен

$$\frac{M}{(n+1)!} \max_{a \leq x \leq b} |\omega(x)|$$

и, следовательно, задача о минимизации остатка интерполирования на промежутке сводится к нахождению таких узлов  $x_0, x_1, \dots, x_n$  на  $[a, b]$ , для которых величина

$$\max_{a \leq x \leq b} |\omega(x)|$$

имеет наименьшее значение.

Такой выбор узлов, как можно показать, всегда возможен. В случае промежутка  $[a, b] \equiv [-1, 1]$  искомыми узлами являются корни многочлена Чебышева

$$T_{n+1}(t) = \cos(n+1) \arccos t. \quad (6.7)$$

Эти корни равны

$$t_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Они вещественны, различны и лежат внутри промежутка  $(-1, 1)$ .

Для промежутка  $[a, b]$  требуемыми узлами  $x_k$  будут

$$x_k = \frac{b-a}{2} t_k + \frac{a+b}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

## § 7. Интерполирование по равноотстоящим узлам. Формулы Ньютона для интерполирования в начале и в конце таблицы

Выше были указаны различные представления интерполяционного многочлена  $P_n(x)$  для любого расположения узлов  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . В практике и теории приближенных вычислений большую роль играет интерполирование по равноот-

стоящим узлам. Рассмотрим представления интерполяционного многочлена для этого случая.

Начнем с вывода формулы Ньютона для интерполирования в начале таблицы. Эта формула дает интерполяционный многочлен  $P_n(x)$  для функции, которая в точках

$$a + kh, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N, \quad N \geq n, \quad (7.1)$$

принимает значения

$$y_k = f(a + kh). \quad (7.2)$$

Формула предназначена для вычисления значения функции  $f(x)$  при  $x$ , расположенном вблизи  $a$ ,  $a \leq x \leq a + \frac{h}{2}$ . Предполагается, что левее точки  $a$  таблица  $f(x)$  не задана, т. е. неизвестны значения  $y_{-k} = f(a - kh)$  при  $k = 1, 2, \dots$ . Это означает, что таблица начинается в точке  $a$ , и это обстоятельство отмечено в наименовании формулы.

На основании сказанного в § 6 о минимизации остатка интерполирования в точке, к интерполированию следует привлечь ближайшие к точке  $x$   $n + 1$  узлов

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + h, \quad \dots, \quad x_n = a + nh. \quad (7.3)$$

Воспользуемся интерполяционной формулой Ньютона (5.7)

$$\begin{aligned} P_n(x) = & f(x_0) + (x - x_0) f(x_0, x_1) + \\ & + (x - x_0)(x - x_1) f(x_0, x_1, x_2) + \dots \\ & \dots + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) f(x_0, x_1, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (7.4)$$

Если узлы интерполирования перенумеровать в ином порядке, например, взять

$$\begin{aligned} x_0 = a, \quad x_1 = a + nh, \quad x_2 = a + 2h, \dots \\ \dots, \quad x_{n-1} = a + (n-1)h, \quad x_n = a + h, \end{aligned}$$

то мы получим то же самое значение  $P_n(x)$ . Однако для вычислений весьма существенно брать узлы именно в порядке (7.3). Предположим, что применяя формулу (7.4) для  $n + 1$  узлов, мы обнаружили, что получим достаточную точность, если ограничимся  $n$  узлами. Тогда естественно

в формуле (7.4) отбросить последний член и воспользоваться интерполяционным многочленом

$$f(x_0) + (x - x_0)f(x_0, x_1) + \dots + (x - x_0)(x - x_1) \dots \\ \dots (x - x_{n-2})f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Последний многочлен при нумерации узлов в порядке, указанном в (7.3), имеет минимальную оценку остатка в точке  $x$ . Это верно по отношению ко всем многочленам

$$f(x_0), \\ f(x_0) + (x - x_0)f(x_0, x_1), \\ f(x_0) + (x - x_0)f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1)f(x_0, x_1, x_2), \\ \dots \\ f(x_0) + (x - x_0)f(x_0, x_1) + \dots + (x - x_0)(x - x_1) \dots \\ \dots (x - x_{n-1})f(x_0, x_1, \dots, x_n).$$

Последнее утверждение равносильно тому, что абсолютные величины коэффициентов при разностных отношениях в формуле (7.4) при нумерации узлов в порядке (7.3) меньше абсолютных величин соответствующих коэффициентов формулы (7.4) при другом выборе узлов.

Преобразуем формулу (7.4), заменив разностные отношения конечными разностями на основании (3.11):

$$f(x_0, x_1, \dots, x_k) = \frac{\Delta^k f(x_0)}{k! h^k}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Получим

$$P_n(x) = f(x_0) + \\ + \frac{x - x_0}{1! h} \Delta f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2! h^2} \Delta^2 f(x_0) + \dots \\ \dots + \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})}{n! h^n} \Delta^n f(x_0). \quad (7.5)$$

Введем новую независимую переменную

$$t = \frac{x - x_0}{h} = \frac{x - a}{h}. \quad (7.6)$$

Формула (7.5) запишется теперь так:

$$P_n(a + ht) = y_0 + \frac{t}{1!} \Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \dots \\ \dots + \frac{t(t-1) \dots (t-n+1)}{n!} \Delta^n y_0. \quad (7.7)$$

Формула (7.7) дает *интерполяционный многочлен Ньютона для интерполирования в начале таблицы*. Отметим, что в правую часть формулы (7.7) входят конечные разности, расположенные в верхней косой строке таблицы конечных разностей.

В предположении существования  $f^{(n+1)}(x)$  на  $[a, a + nh]$  укажем остаточный член интерполирования при помощи многочлена (7.7) [см. (6.2)]:

$$R_n(f, x) = f(x) - P_n(x) = h^{n+1} \frac{t(t-1) \dots (t-n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad (7.8)$$

где  $a < \xi < a + nh$ .

Переходим к построению интерполяционного многочлена Ньютона для интерполирования в конце таблицы. Пусть для равноотстоящих значений аргументов

$$a - kh, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N, \quad N \geq n, \quad (7.9)$$

заданы значения функции  $f(x)$ :

$$y_{-k} = f(a - kh). \quad (7.10)$$

Требуется построить интерполяционный многочлен по  $n + 1$  значениям функции  $f(x)$ , предназначенный для вычисления  $f(x)$  в точке  $x$ , расположенной вблизи  $a$ :  $a - \frac{h}{2} \leq x \leq a$ . Считаем, что при  $x = a + kh$ ,  $k = 1, 2, \dots$  значения  $f(x)$  неизвестны, так что таблица  $f(x)$  действительно заканчивается в точке  $a$ .

Воспользуемся интерполяционной формулой Ньютона (7.4). Ясно, что к интерполированию нужно привлечь узлы

$$x_0 = a, \quad x_1 = a - h, \quad \dots, \quad x_n = a - nh$$

и в том порядке, какой здесь указан. В формуле (7.4) заменим разностные отношения конечными разностями

$$f(x_0, x_1, \dots, x_k) = f(a - kh, \dots, a - h, a) = \\ = \frac{\Delta^k f(a - kh)}{k! h^k} = \frac{\Delta^k y_{-k}}{k! h^k}.$$

Получим

$$P_n(x) = y_0 + \frac{x - x_0}{1! h} \Delta y_{-1} + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2! h^2} \Delta^2 y_{-2} + \dots \\ \dots + \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})}{n! h^n} \Delta^n y_{-n}. \quad (7.11)$$

Введя новую независимую переменную по формуле (7.6)

$$t = \frac{x - a}{h},$$

получим *интерполяционный многочлен Ньютона для интерполирования в конце таблицы*:

$$P_n(a + ht) = y_0 + \frac{t}{1!} \Delta y_{-1} + \frac{t(t+1)}{2!} \Delta^2 y_{-2} + \dots \\ \dots + \frac{t(t+1) \dots (t+n-1)}{n!} \Delta^n y_{-n}. \quad (7.12)$$

В правую часть формулы (7.12) входят конечные разности, расположенные в нижней косой строке таблицы разностей.

Остаточный член формулы Ньютона для интерполирования в конце таблицы:

$$R_n(f, x) = h^{n+1} \frac{t(t+1) \dots (t+n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad a - nh < \xi < a. \quad (7.13)$$

Введем обозначение

$$C_t^{(k)} = \frac{t(t-1) \dots (t-k+1)}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

тогда формулу (7.7) можно переписать следующим образом:

$$P_n(a + ht) = y_0 + C_t^{(1)} \Delta y_0 + C_t^{(2)} \Delta^2 y_0 + \dots + C_t^{(n)} \Delta^n y_0. \quad (7.14)$$

Очевидно,

$$C_{-t}^{(k)} = (-1)^k \frac{t(t+1) \dots (t+k-1)}{k!},$$

поэтому формулу (7.12) можно записать в виде

$$P_n(a+ht) = y_0 - C_{-t}^{(1)} \Delta y_{-1} + C_{-t}^{(2)} \Delta^2 y_{-2} - \dots \\ \dots + (-1)^n C_{-t}^{(n)} \Delta^n y_{-n}. \quad (7.15)$$

Для коэффициентов  $C_t^{(k)}$  имеются таблицы, которыми и следует пользоваться при вычислениях. Укажем прежде всего таблицы [11], в которых приведены значения  $C_t^{(k)}$ . Небольшие таблицы коэффициентов  $C_t^{(k)}$  приведены в книгах [13] и [21].

**Пример.** Дана таблица функции  $y = \cos x$ ,  $x = 0(0,1)0,6$ . Значения  $\cos x$  взяты из [26]. Вычислить значение  $\cos x$  при  $x = 0,048$  и  $x = 0,575$ .

Таблица 20

$x$	$y$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	<u>1</u>				
0,1	0,99500	<u>-500</u>			
		-1493	<u>-993</u>		
0,2	0,98007	-2473	-980	<u>13</u>	
		-3428	-955	25	<u>12</u>
0,3	0,95534	-4348	-920	35	10
		-5224	-876	44	9
0,4	0,92106				
0,5	0,87758				
0,6	0,82534				

Составим таблицу конечных разностей (см. табл. 20). Из таблицы видно, что четвертые разности можно считать постоянными, поэтому будем интерполировать  $y = \cos x$  многочленом  $P_4(x)$ . При вычислении  $\cos 0,048$  будем пользоваться формулой (7.14), взяв  $a = 0$ . В нее войдут подчеркнутые в таблице конечные разности верхней косой строки. По формуле (7.6) получаем

$$t = \frac{x-a}{h} = \frac{0,048-0}{0,1} = 0,48.$$

Числа  $C_t^{(k)}$  при  $t=0,48$  и  $k=1, 2, 3, 4$  берем из таблиц [11]:

$$C_t^{(1)} = 0,48; \quad C_t^{(2)} = -0,12480; \quad C_t^{(3)} = 0,06323; \\ C_t^{(4)} = -0,03984.$$

В результате вычисления получим

$$\cos 0,048 = 0,99884.$$

Соответствующее табличное значение равно 0,99885.

При вычислении  $\cos x$  для  $x=0,575$  воспользуемся формулой (7.15) при  $a=0,6$ . Имеем

$$t = \frac{x-a}{h} = \frac{0,575-0,6}{0,1} = -0,25.$$

В таблицах [11] находим  $C_{-t}^{(k)}$  при  $-t=0,25$  и  $k=1, 2, 3, 4$ :

$$C_{-t}^{(1)} = 0,25; \quad C_{-t}^{(2)} = -0,09375; \quad C_{-t}^{(3)} = 0,05469; \\ C_{-t}^{(4)} = -0,03760.$$

Конечные разности, фигурирующие в формуле (7.15), располагаются в нижней косой строке таблицы. В результате вычисления получим

$$\cos 0,575 = 0,83919.$$

Здесь верны все цифры.

### § 8. Интерполирование по равноотстоящим узлам. Формулы Гаусса, Стирлинга и Бесселя

Пусть известны значения функции  $f(x)$  в узлах

$$\dots, a-2h, a-h, a, a+h, a+2h, \dots$$

расположенных слева и справа от  $a$ , и пусть точка интерполирования  $x$  удовлетворяет неравенствам

$$a < x < a+h. \quad (8.1)$$

Так как таблица  $f(x)$  продолжается в обе стороны от точки  $x$ , то в этом случае говорят, что точка интерполиро-

вания  $x$  находится в середине таблицы. Значения функции в узлах будем обозначать

$$y_k = f(a + kh), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Для построения интерполяционного многочлена по  $n+1$  значениям функции воспользуемся формулой Ньютона (5.7), при этом узлы выберем следующим образом:

$$\begin{aligned} x_0 = a, \quad x_1 = a + h, \quad x_2 = a - h, \quad x_3 = a + 2h, \\ x_4 = a - 2h, \dots, \quad x_n = a + (-1)^{n+1} \left[ \frac{n+1}{2} \right] h. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Здесь  $\left[ \frac{n+1}{2} \right]$  означает целую часть числа  $\frac{n+1}{2}$ . Конечно, если точка  $x$  находится ближе к  $a+h$ , то наименьшую оценку остатка интерполирования мы получим, взяв узлы в порядке:

$$x_0 = a + h, \quad x_1 = a, \quad x_2 = a + 2h, \quad x_3 = a - 2h, \dots$$

Так как единственная информация о расположении  $x$  доставляется неравенством (8.1), то мы для определенности останавливаемся на выборе узлов (8.2).

Выразим разностные отношения через конечные разности. Имеем по (3.11)

$$\begin{aligned} f(x_0, x_1, \dots, x_k) &= \\ &= f\left(a, a+h, \dots, a+(-1)^k \left[ \frac{k}{2} \right] h, a+(-1)^{k+1} \left[ \frac{k+1}{2} \right] h\right) = \\ &= \frac{\Delta^k f\left(a - \left[ \frac{k}{2} \right] h\right)}{k! h^k} = \frac{\Delta^k y_{-\left[ \frac{k}{2} \right]}}{k! h^k}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Подставим эти выражения разностных отношений в формулу (5.7):

$$\begin{aligned} P_n(x) &= y_0 + \frac{x-x_0}{1!h} \Delta y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!h^2} \Delta^2 y_{-1} + \\ &+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{3!h^3} \Delta^3 y_{-1} + \dots \\ &\dots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{n!h^n} \Delta^n y_{-\left[ \frac{n}{2} \right]}. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Сделаем замену переменной

$$t = \frac{x - x_0}{h} = \frac{x - a}{h}.$$

В новой переменной формула (8.3) переписывается так:

$$\begin{aligned} P_n(a + ht) = & y_0 + \frac{t}{1!} \Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_{-1} + \\ & + \frac{t(t-1)(t+1)}{3!} \Delta^3 y_{-1} + \frac{t(t-1)(t+1)(t-2)}{4!} \Delta^4 y_{-2} + \dots \\ & \dots + \frac{t(t-1)(t+1) \dots \left( t + (-1)^{n-1} \left[ \frac{n}{2} \right] \right)}{n!} \Delta^n y_{-\left[ \frac{n}{2} \right]}. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Эта формула и дает *интерполяционный многочлен Гаусса* для интерполирования в середине таблицы. В формуле фигурируют разности, расположенные в двух горизонтальных строках таблицы конечных разностей: четные разности — в той же строке, что и  $y_0$ , нечетные разности — в строке  $\Delta y_0$ . В приводимой ниже таблице эти разности подчеркнуты:

$x$	$y$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
$a - 2h$	$y_{-2}$				
$a - h$	$y_{-1}$	$\Delta y_{-2}$			
$a$	$y_0$	$\Delta y_{-1}$	$\Delta^2 y_{-2}$		
$a + h$	$y_1$	$\Delta y_0$	$\Delta^2 y_{-1}$	$\Delta^3 y_{-2}$	
$a + 2h$	$y_2$	$\Delta y_1$	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_{-1}$	$\Delta^4 y_{-2}$

Остаточный член формулы Гаусса

$$\begin{aligned} R_n(f, x) = & f(x) - P_n(x) = \\ = & h^{n+1} \frac{t(t-1)(t+1) \dots \left( t + (-1)^n \left[ \frac{n+1}{2} \right] \right)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \end{aligned} \quad (8.5)$$

где

$$a + (-1)^n \left[ \frac{n}{2} \right] h \leq \xi \leq a + (-1)^{n+1} \left[ \frac{n+1}{2} \right] h.$$

Переходим к выводу формулы Стирлинга. Она, так же как и формула Гаусса, предназначена для интерполирования в середине таблицы. Точка интерполирования  $x$  принадлежит интервалу  $(a, a+h)$  и находится ближе к  $a$ , чем к середине этого интервала:  $a < x < a + \frac{h}{4}$ . С целью минимизации остатка в точке  $x$  (см. § 6), в этом случае целесообразно взять нечетное число  $n+1$  узлов и расположить их следующим образом:

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + h, \quad x_2 = a - h, \quad x_3 = a + 2h, \\ x_4 = a - 2h, \dots, \quad x_{n-1} = a + \frac{n}{2}h, \quad x_n = a - \frac{n}{2}h.$$

Требуемый интерполяционный многочлен совпадает с (8.4), где  $n$  — число четное:

$$P_n(a+ht) = y_0 + \frac{t}{1!} \Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_{-1} + \\ + \frac{t(t-1)(t+1)}{3!} \Delta^3 y_{-1} + \dots \\ \dots + \frac{t(t-1)(t+1)(t-2)\dots\left(t-\frac{n}{2}\right)}{n!} \Delta^n y_{-\frac{n}{2}}. \quad (8.6)$$

Преобразуем формулу (8.6) к более симметричному виду, соответствующему симметрии расположения узлов. Именно, запишем сумму двух последовательных членов формулы (8.6)

$$\frac{t(t-1)(t+1)\dots(t-k)(t+k)}{(2k+1)!} \times \\ \times \left[ \Delta^{2k+1} y_{-k} + \left( \frac{t}{2k+2} - \frac{1}{2} \right) \Delta^{2k+2} y_{-k-1} \right], \quad (8.7) \\ k = 0, 1, 2, \dots, \frac{n-2}{2},$$

и заметим, что

$$\Delta^{2k+1} y_{-k} - \frac{1}{2} \Delta^{2k+2} y_{-k-1} = \\ = \frac{\Delta^{2k+1} y_{-k}}{2} + \frac{\Delta^{2k+1} y_{-k} - \Delta^{2k+2} y_{-k-1}}{2} = \frac{\Delta^{2k+1} y_{-k} + \Delta^{2k+1} y_{-k-1}}{2}.$$

Это выражение для  $\Delta^{2k+1}y_{-k} - \frac{1}{2}\Delta^{2k+2}y_{-k-1}$  подставим в (8.7). Получим

$$\frac{t(t^2-1)(t^2-2^2)\dots(t^2-k^2)}{(2k+1)!} \times \\ \times \left[ \frac{\Delta^{2k+1}y_{-k} + \Delta^{2k+1}y_{-k-1}}{2} + \frac{t}{2k+2} \Delta^{2k+2}y_{-k-1} \right].$$

В результате преобразования формула (8.6) примет вид

$$P_n(a+ht) = y_0 + \frac{t}{1!} \frac{\Delta y_0 + \Delta y_{-1}}{2} + \frac{t^2}{2!} \Delta^2 y_{-1} + \\ + \frac{t(t^2-1)}{3!} \frac{\Delta^3 y_{-1} + \Delta^3 y_{-2}}{2} + \frac{t^2(t^2-1)}{4!} \Delta^4 y_{-2} + \dots \\ \dots + \frac{t(t^2-1)(t^2-2^2)\dots\left(t^2 - \left(\frac{n-2}{2}\right)^2\right)}{(n-1)!} \times \\ \times \frac{\Delta^{n-1}y_{-\frac{n-2}{2}} + \Delta^{n-1}y_{-\frac{n}{2}}}{2} + \\ + \frac{t^2(t^2-1)(t^2-2^2)\dots\left(t^2 - \left(\frac{n-2}{2}\right)^2\right)}{n!} \Delta^n y_{-\frac{n}{2}}. \quad (8.8)$$

Формула (8.8) дает *интерполяционный многочлен Стирлинга*. В нее входят четные разности горизонтальной строки, отвечающей  $x=a$ , и полусуммы нечетных разностей, расположенных в двух соседних горизонтальных строках. В таблице эти разности подчеркнуты.

$x$	$y$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
$a-h$	$y_{-1}$	$\Delta y_{-1}$	$\Delta^2 y_{-2}$	$\Delta^3 y_{-2}$	$\Delta^4 y_{-3}$
$a$	$\underline{y_0}$	$\underline{\Delta y_0}$	$\underline{\Delta^2 y_{-1}}$	$\underline{\Delta^3 y_{-1}}$	$\underline{\Delta^4 y_{-2}}$
$a+h$	$y_1$	$\Delta y_0$	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_{-1}$	$\Delta^4 y_{-1}$

Остаточный член интерполяционной формулы Стирлинга

$$\begin{aligned}
 R_n(f, x) &= f(x) - P_n(x) = \\
 &= h^{n+1} \frac{t(t^2-1)(t^2-2^2) \dots \left(t^2 - \left(\frac{n}{2}\right)^2\right)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad (8.9) \\
 & \quad a - \frac{n}{2} h < \xi < a + \frac{n}{2} h.
 \end{aligned}$$

Предположим, что точка интерполирования удовлетворяет неравенству  $a < x < a + h$  и расположена близко к середине промежутка  $a + \frac{h}{2}$  или совпадает с ней. По соображениям из § 6 здесь следует взять четное число  $n+1$  узлов и расположить их следующим образом:

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + h, \quad x_2 = a - h, \quad x_3 = a + 2h, \dots$$

$$\dots, \quad x_{n-1} = a - \frac{n-1}{2} h, \quad x_n = a + \frac{n+1}{2} h.$$

Интерполяционный многочлен, построенный по значениям в указанных узлах, запишем по формуле Гаусса (8.4):

$$\begin{aligned}
 P_n(a + ht) &= y_0 + \frac{t}{1!} \Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_{-1} + \\
 &+ \frac{t(t-1)(t+1)}{3!} \Delta^3 y_{-1} + \frac{t(t-1)(t+1)(t-2)}{4!} \Delta^4 y_{-2} + \dots \\
 &\dots + \frac{t(t-1)(t+1) \dots \left(t + \frac{n-1}{2}\right)}{n!} \Delta^n y_{-\frac{n-1}{2}}. \quad (8.10)
 \end{aligned}$$

Преобразуем формулу (8.10) к симметричному виду. Запишем сумму двух последовательных членов этой формулы

и выполним очевидные преобразования:

$$\begin{aligned} & \frac{t(t-1)(t+1)\dots(t+k-1)(t-k)}{(2k)!} \left[ \Delta^{2k} y_{-k} + \frac{t+k}{2k+1} \Delta^{2k+1} y_{-k} \right] = \\ & = \frac{t(t-1)(t+1)\dots(t+k-1)(t-k)}{(2k)!} \times \\ & \times \left[ \frac{\Delta^{2k} y_{-k} + \Delta^{2k} y_{-k+1}}{2} - \frac{1}{2} \Delta^{2k+1} y_{-k} + \frac{t+k}{2k+1} \Delta^{2k+1} y_{-k} \right] = \\ & = \frac{t(t-1)(t+1)\dots(t+k-1)(t-k)}{(2k)!} \times \\ & \times \left[ \frac{\Delta^{2k} y_{-k} + \Delta^{2k} y_{-k+1}}{2} + \frac{t-\frac{1}{2}}{2k+1} \Delta^{2k+1} y_{-k} \right], \\ & k = 0, 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}. \end{aligned}$$

В результате преобразования формула (8.10) переписывается так:

$$\begin{aligned} P_n(a+ht) &= \frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{t-\frac{1}{2}}{1!} \Delta y_0 + \\ & + \frac{t(t-1)}{2!} \frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} + \frac{\left(t-\frac{1}{2}\right)t(t-1)}{3!} \Delta^3 y_{-1} + \dots \\ & \dots + \frac{t(t-1)(t+1)\dots\left(t-\frac{n-1}{2}\right)}{(n-1)!} \times \\ & \times \frac{\Delta^{n-1} y_{-\frac{n-1}{2}} + \Delta^{n-1} y_{-\frac{n-3}{2}}}{2} + \\ & + \frac{\left(t-\frac{1}{2}\right)t(t-1)(t+1)\dots\left(t-\frac{n-1}{2}\right)}{n!} \Delta^n y_{-\frac{n-1}{2}}. \quad (8.11) \end{aligned}$$

Это интерполяционный многочлен Бесселя. В его представление входят полусуммы конечных разностей четного порядка, расположенных в горизонтальных строках аргумен-

тов  $a$  и  $a+h$ , и нечетные разности промежуточной горизонтальной строки. Эти разности в таблице подчеркнуты.

$x$	$y$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
$a-h$	$y_{-1}$	$\Delta y_{-1}$	$\Delta^2 y_{-2}$	$\Delta^3 y_{-2}$	$\Delta^4 y_{-3}$	$\Delta^5 y_{-3}$
$a$	$y_0$	$\Delta y_0$	$\Delta^2 y_{-1}$	$\Delta^3 y_{-1}$	$\Delta^4 y_{-2}$	$\Delta^5 y_{-2}$
$a+h$	$y_1$	$\Delta y_1$	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_{-1}$	$\Delta^5 y_{-1}$
$a+2h$	$y_2$		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$	

Остаточный член формулы Бесселя

$$R_n(f, x) = f(x) - P_n(x) =$$

$$= h^{n+1} \frac{t(t-1)(t+1) \dots \left(t + \frac{n-1}{2}\right) \left(t - \frac{n+1}{2}\right)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

(8.12)

$$a - \frac{n-1}{2} h < \xi < a + \frac{n+1}{2} h.$$

Отметим частный случай формулы Бесселя (8.11), когда  $t = \frac{1}{2}$ , т. е. когда  $x = a + \frac{h}{2}$ :

$$P_n\left(a + \frac{h}{2}\right) = \frac{y_0 + y_1}{2} - \frac{1}{8} \frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} +$$

$$+ \frac{3}{128} \frac{\Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1}}{2} + \dots$$

$$\dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{[1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (n-2)]^2}{2^{n-1} (n-1)!} \frac{\Delta^{n-1} y_{-\frac{n-1}{2}} + \Delta^{n-1} y_{-\frac{n-3}{2}}}{2}.$$

(8.13)

В таблицах [11] имеются численные значения коэффициентов формул Гаусса, Стирлинга и Бесселя. Небольшая таблица коэффициентов формулы Стирлинга приведена в [13].

**Пример.** Дана таблица значений функции

$$y = \operatorname{sh} x, \quad x = 1 (0,1) 1,8.$$

Вычислить значение  $\operatorname{sh} x$  при  $x = 1,41710$  и  $x = 1,45224$ .

Таблица 21

$x$	$y$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
1	1,17520					
1,1	1,33565	16045				
1,2	1,50946	17381	1336			
1,3	1,69838	18892	1511	175	14	3
1,4	1,90430	20592	1700	189	17	2
1,5	2,12928	22498	1906	206	19	2
1,6	2,37557	24629	2131	225	21	4
1,7	2,64563	27006	2377	246	25	
1,8	2,94217	29654	2648	271		

Составляем таблицу конечных разностей (см. табл. 21). При вычислении  $\operatorname{sh} 1,41710$  будем пользоваться формулой Стирлинга (8.8),  $a = 1,4$ . Коэффициенты формулы Стирлинга при  $t = 0,1710$  берем из таблиц [11]:

$$\frac{t^2}{2!} = 0,01462, \quad \frac{t(t^2-1)}{3!} = -0,02767, \quad \frac{t^2(t^2-1)}{4!} = -0,00118.$$

Получим

$$\operatorname{sh} 1,41710 = 1,94136.$$

Для вычисления  $\operatorname{sh} 1,45224$  применим формулу Бесселя (8.11), положив  $a = 1,4$ . Имеем  $t = 0,5224$ . Коэффициенты

многочлена (8.11) находим в [11]:

$$\frac{t(t-1)}{2!} = -0,12475, \quad \frac{\left(t - \frac{1}{2}\right)t(t-1)}{3!} = -0,00093,$$

$$\frac{t(t^2-1)(t-2)}{4!} = 0,02339.$$

В результате вычисления найдем

$$\text{sh } 1,45224 = 2,01931.$$

У найденных значений гиперболического синуса верны все цифры.

### § 9. Обратное интерполирование. Безразностные схемы интерполирования

До сих пор мы занимались решением следующей задачи: дана таблица функции  $y = f(x)$ ; по заданному значению аргумента  $x^*$  требуется найти приближенное значение функции  $f(x^*)$ . Задача обратного интерполирования ставится так: дана таблица функции  $y = f(x)$ ; зная значение функций  $y^*$ , найти аргумент  $x^*$ , при котором

$$f(x^*) = y^*.$$

Предположим, что на рассматриваемом участке таблицы функция  $f$  монотонна и, следовательно, имеет однозначную обратную  $f^{-1}: x = f^{-1}(y)$ . В этом случае обратное интерполирование сводится к обычному интерполированию для функции  $f^{-1}(y)$ . Чтобы найти приближенное значение  $x^*$ , можно воспользоваться формулой Лагранжа или Ньютона (для неравноотстоящих узлов).

Пусть функция  $y = f(x)$  не имеет однозначной обратной. Построим интерполирующую функцию  $f(x)$  многочлен  $P_n(x)$ . Задача об определении  $x^*$  сводится к решению уравнения

$$P_n(x) = y^*. \quad (9.1)$$

Рассмотрим подробнее случай, когда таблица функции задана для равноотстоящих значений аргумента

$$x_0, x_0 + h, x_0 + 2h, \dots$$

$$f(x_0 + kh) = y_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Для определенности будем считать, что  $\Delta y_0 > 0$  и  $y^*$  удовлетворяет неравенству  $y_0 < y^* < y_1$ , так что искомое  $x^*$  находится между  $x_0$  и  $x_0 + h$ . В таких условиях целесообразно  $f(x)$  заменить интерполяционным многочленом Ньютона (7.7). Уравнение (9.1) принимает вид

$$y_0 + \frac{t}{1!} \Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \dots \\ \dots + \frac{t(t-1) \dots (t-n+1)}{n!} \Delta^n y_0 = y^*.$$

Разрешим это уравнение относительно  $t$ :

$$t = \frac{1}{\Delta y_0} \left[ y^* - y_0 - \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_0 - \dots \right. \\ \left. \dots - \frac{t(t-1) \dots (t-n+1)}{n!} \Delta^n y_0 \right]. \quad (9.2)$$

Для определения корня уравнения (9.2) применим метод итерации, взяв за начальное приближение  $t_0 = 0$ . Метод итерации будет сходиться, например, если  $|\Delta^2 y_0| \leq |\Delta y_0|$ , а разности высших порядков  $\Delta^3 y_0, \Delta^4 y_0, \dots$  малы по сравнению с  $\Delta y_0$  и  $\Delta^2 y_0$ . В этом можно убедиться, рассматривая производную по  $t$  от правой части уравнения (9.2). Пусть  $t^* = \lim t_k$  — искомый корень. Тогда требуемое значение аргумента равно

$$x^* = x_0 + ht^*.$$

Способ обратного интерполирования, основанный на решении уравнения (9.1), разумеется, пригоден и в том случае, когда  $y = f(x)$  имеет однозначную обратную.

**Пример.** Дана таблица функции  $y = e^x$ ,  $x = 0,65(0,1)1,15$ . Найти  $\ln 2$ . Ясно, что задача сводится к обратному интерполированию: найти  $x$ , при котором  $e^x = 2$ . Составим таблицу конечных разностей (см. табл. 22). Искомое  $x$  находится в начале таблицы, поэтому пользуемся соответствующей формулой Ньютона. Уравнение (9.2) записывается так:

$$t = \frac{1}{20146} \left[ 8446 - 2119C_t^{(2)} - 222C_t^{(3)} - 25C_t^{(4)} \right].$$

При решении уравнения методом итерации коэффициенты  $C_t^{(k)}$  находим в [11]. Получим

$$t_0 = 0, \quad t_1 = 0,41924, \quad t_2 = 0,43138, \quad t_3 = t_4 = 0,43148.$$

Таблица 22

$x$	$y = e^x$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0,65	1,91554				
0,75	2,11700	20146			
0,85	2,33965	22265	2119	222	
0,95	2,58571	24606	2341	247	25
1,05	2,85765	27194	2588	272	25
1,15	3,15819	30054	2860		

Таким образом,  $t^* = 0,43148$  и  $\ln 2 = 0,65 + 0,1t^* = 0,693148$ .

В нашем примере функция  $y = e^x$  монотонно возрастает, и мы могли бы составить, например, интерполяционный многочлен Ньютона для функции  $x = \ln y$  и вычислить его значение при  $y = 2$ .

Остановимся на одном методе интерполирования, который в литературе принято называть методом Эйткина [21].\*) Пусть в узлах

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_N,$$

попарно различных и, вообще говоря, неравноотстоящих, заданы значения

$$y_0, y_1, y_2, \dots, y_N.$$

Будем обозначать через

$$P_{i_1, i_2, \dots, i_k}(x) \quad (9.3)$$

интерполяционный многочлен, построенный по условиям

$$P_{i_1, i_2, \dots, i_k}(x_{i_j}) = y_{i_j}, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Здесь  $i_1, i_2, \dots, i_k$  — неотрицательные попарно различные целые числа. Ясно, что в обозначении (9.3) их можно писать в любом порядке.

\*) Поскольку при применении метода Эйткина не надо находить конечные разности, он и ему подобные методы называются безразностными,

Например,  $P_{0,1}(x)$  есть линейная функция, график которой проходит через точки  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$ . Очевидно, имеем

$$P_{0,1}(x) = \frac{1}{x_1 - x_0} \begin{vmatrix} y_0 & x_0 - x \\ y_1 & x_1 - x \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим определитель

$$P(x) = \frac{1}{x_2 - x_0} \begin{vmatrix} P_{0,1}(x) & x_0 - x \\ P_{1,2}(x) & x_2 - x \end{vmatrix}.$$

Это многочлен от  $x$ , степень которого не выше двух. Очевидно,

$$P(x_0) = P_{0,1}(x_0) = y_0,$$

$$P(x_2) = P_{1,2}(x_2) = y_2,$$

$$P(x_1) = \frac{1}{x_2 - x_0} \begin{vmatrix} y_1 & x_0 - x_1 \\ y_1 & x_2 - x_1 \end{vmatrix} = y_1,$$

поэтому

$$P(x) = P_{0,1,2}(x).$$

Таким образом, можно вычислить значение интерполяционного многочлена второй степени, применяя линейную интерполяцию к  $P_{0,1}(x)$  и  $P_{1,2}(x)$ . Разумеется, можно было применить линейную интерполяцию к двум другим возможным парам:  $P_{0,1}(x)$  и  $P_{0,2}(x)$ ;  $P_{0,2}(x)$  и  $P_{1,2}(x)$ .

Вообще, значение интерполяционного многочлена, построенного по  $n+1$  узлам, можно получить линейным интерполированием по значениям двух различных интерполяционных многочленов, построенных по  $n$  узлам, взятым из  $n+1$  рассматриваемых узлов. Например,

$$P_{0,1,2,\dots,n}(x) = \frac{1}{x_n - x_0} \begin{vmatrix} P_{0,1,2,\dots,n-1}(x) & x_0 - x \\ P_{1,2,3,\dots,n}(x) & x_n - x \end{vmatrix}.$$

Способ Эйткина сводится к тому, что вычисление значения интерполяционного многочлена, скажем  $P_{0,1,2,3}(x)$ , производится путем ряда линейных интерполирований по схеме

$x_0$	$y_0$				$x_0 - x$
$x_1$	$y_1$	$\underline{P_{0,1}(x)}$			$\underline{x_1 - x}$
$x_2$	$y_2$	$\underline{P_{0,2}(x)}$	$P_{0,1,2}(x)$		$x_2 - x$
$x_3$	$y_3$	$\underline{P_{0,3}(x)}$	$\underline{P_{0,1,3}(x)}$	$P_{0,1,2,3}(x)$	$\underline{x_3 - x}$

Здесь каждое значение вычисляется накоплением на счетной машине и последующим делением. Например,  $P_{0,1,3}(x)$  вычисляется как определитель, элементами которого являются подчеркнутые в схеме числа, с последующим делением на  $x_3 - x_1$ .

**Пример.** Дана таблица функции

$$y = \sin x, \quad x = 0,4(0,1)0,8.$$

Найти  $\sin 0,57891$ .

Результаты вычислений по схеме Эйткина приведены в табл. 23. Вычисления велись с одним запасным знаком.

Таблица 23

$x_i$	$\sin x_i$	$P_{0, i}$	$P_{0, 1, i}$	$P_{0, 1, 2, i}$	$x_i - 0,57891$
0,4	0,38942				-0,17891
0,5	0,47943	0,550457			-0,07891
0,6	0,56464	0,546163	0,547069		0,02109
0,7	0,64422	0,541374	0,546873	0,547110	0,12109
0,8	0,71735	0,536099	0,546680	0,547110	0,22109

Совпадение цифр у значений, записанных в предпоследнем столбце, показывает, что нужно остановить вычисление. Окончательный результат округляем до пяти знаков:

$$\sin 0,57891 = 0,54711.$$

## § 10. Интерполирование Эрмита

Пусть имеется  $m$  различных вещественных чисел

$$x_1, x_2, \dots, x_m$$

— узлов интерполирования. Предположим, что в узле  $x_j$  заданы значение функции  $f(x)$  и значения всех ее производных до порядка  $p_j - 1$

$$f(x_j), f'(x_j), \dots, f^{(p_j-1)}(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (10.1)$$

Таким образом, о функции  $f(x)$  известно

$$p_1 + p_2 + \dots + p_m = n + 1$$

данных.

Рассмотрим задачу о построении многочлена степени не выше  $n$

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n, \quad (10.2)$$

удовлетворяющего условиям

$$\begin{aligned} P_n^{(s)}(x_j) &= f^{(s)}(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, m, \\ s &= 0, 1, 2, \dots, p_j - 1. \end{aligned} \quad (10.3)$$

Здесь под  $f^{(0)}(x)$  понимается  $f(x)$ . Ясно, что эта задача является частным случаем общей задачи интерполирования, рассмотренной в § 4. Условия (10.3) представляют собой линейную алгебраическую систему относительно неизвестных коэффициентов  $a_0, a_1, \dots, a_n$  многочлена (10.2). Подробная запись системы такого вида приведена в § 4, формула (4.4).

Построение многочлена (10.2) по условиям (10.3) называется *интерполированием Эрмита* или *интерполированием с кратными узлами*. Число  $p_j$  называется *кратностью узла  $x_j$*  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ).

Отметим, что может существовать лишь один многочлен (10.2), удовлетворяющий условиям (10.3). В самом деле, если бы таких многочленов оказалось два:  $P_1(x)$  и  $P_2(x)$ , то их разность  $P_1(x) - P_2(x)$  была бы многочленом степени не выше  $n$ , причем эта разность имела бы  $x_j$  корнем кратности  $p_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ), т. е. имела бы  $p_1 + p_2 + \dots + p_m = n + 1$  корней. Это возможно лишь в случае  $P_1(x) - P_2(x) \equiv 0$ .

Из единственности интерполяционного многочлена Эрмита вытекает его существование. В самом деле, многочлен Эрмита, построенный по функции  $f(x) \equiv 0$ , также единственен, а это равносильно тому, что однородная система, соответствующая линейной алгебраической системе (10.3), имеет только нулевое решение. Отсюда вытекает, что определитель системы (10.3) отличен от нуля и, следовательно, она имеет решение при любой правой части.

Покажем, как можно построить интерполяционный многочлен Эрмита. Коэффициенты многочлена (10.2)  $a_0, a_1, \dots, a_n$  определяются из системы (10.3), поэтому они будут линей-

ными комбинациями значений  $f^{(s)}(x_j)$  с коэффициентами, зависящими только от  $x_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ):

$$a_k = \sum_{j=1}^m \sum_{s=0}^{p_j-1} \alpha_{kjs} f^{(s)}(x_j), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Подставляя выражения коэффициентов в (10.2), получим

$$P_n(x) = \sum_{j=1}^m \sum_{s=0}^{p_j-1} l_{js}(x) f^{(s)}(x_j), \quad (10.4)$$

где  $l_{js}(x)$  — некоторые многочлены степени  $n$ . Ввиду этого мы будем разыскивать многочлен (10.2) в форме (10.4).

Будем вначале строить не многочлен  $P_n(x)$ , а остаток интерполирования

$$R_n(f, x) = f(x) - P_n(x) = f(x) - \sum_{j=1}^m \sum_{s=0}^{p_j-1} l_{js}(x) f^{(s)}(x_j). \quad (10.5)$$

Предположим сначала, что  $f(z)$  аналитическая функция комплексного переменного  $z$ , однозначная и регулярная в некоторой односвязной области  $D$ , содержащей точку интерполирования  $x$  и узлы  $x_1, x_2, \dots, x_m$  внутри себя. Точку  $x$ , как и узлы  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , считаем вещественными (хотя можно было считать их комплексными). Считаем также  $x$  отличной от всех  $x_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ .

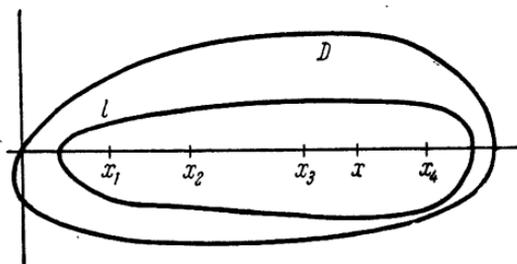


Рис. 13.

Проведем замкнутый контур  $l$ , целиком лежащий в  $D$  и охватывающий узлы  $x_1, x_2, \dots, x_m$  и точку  $x$  (см. рис. 13). По формуле Коши имеем

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{f(z)}{z-x} dz. \quad (10.6)$$

Здесь интегрирование по контуру  $l$  ведется в направлении против часовой стрелки. Имеем также

$$f^{(s)}(x_j) = \frac{s!}{2\pi i} \int_l \frac{f(z)}{(z-x_j)^{s+1}} dz. \quad (10.7)$$

В правую часть формулы (10.5) вместо  $f(x)$  и  $f^{(s)}(x_j)$  подставим их представления интегралами Коши (10.6) и (10.7). Получим

$$R_n(f, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_l f(z) \left[ \frac{1}{z-x} - \sum_{j=1}^m \sum_{s=0}^{p_j-1} l_{js}(x) \frac{s!}{(z-x_j)^{s+1}} \right] dz. \quad (10.8)$$

В квадратных скобках имеем остаток интерполирования Эрмита функции

$$\frac{1}{z-x},$$

рассматриваемой как функция от  $x$ :

$$R_n\left(\frac{1}{z-x}, x\right) = \frac{1}{z-x} - \sum_{j=1}^m \sum_{s=0}^{p_j-1} l_{js}(x) \frac{s!}{(z-x_j)^{s+1}}. \quad (10.9)$$

В правой части формулы (10.9) стоит рациональная функция от  $z$ , представленная в виде суммы простых дробей. Введем обозначение

$$\Omega(z) = (z-x_1)^{p_1} (z-x_2)^{p_2} \dots (z-x_m)^{p_m}. \quad (10.10)$$

Общий знаменатель дробей в правой части (10.9) равен

$$(z-x)\Omega(z)$$

и мы имеем

$$R_n\left(\frac{1}{z-x}, x\right) = \frac{Q(z)}{(z-x)\Omega(z)}, \quad (10.11)$$

где степень числителя меньше степени знаменателя, так как степень  $(z-x)\Omega(z)$  равна  $n+2$ , степень  $Q(z)$  не превосходит  $n+1$ .

Покажем, что  $Q(z)$  не зависит от  $z$ . С этой целью напишем разложение

$$R_n\left(\frac{1}{z-x}, x\right)$$

в ряд по степеням  $\frac{1}{z}$ , предполагая, что

$$|z| > |x|, \quad |z| > |x_j|, \quad j=1, 2, \dots, m.$$

Имеем

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{x}{z}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{\nu}}{z^{\nu+1}},$$

$$\frac{s!}{(z-x_j)^{s+1}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\nu(\nu-1)\dots(\nu-s+1)}{z^{\nu+1}} x_j^{\nu-s}, \quad j=1, 2, \dots, m.$$

Подставляя эти разложения в формулу (10.9), получим

$$\begin{aligned} R_n\left(\frac{1}{z-x}, x\right) &= \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{\nu}}{z^{\nu+1}} - \sum_{j=1}^m \sum_{s=0}^{p_j-1} l_{js}(x) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\nu(\nu-1)\dots(\nu-s+1)}{z^{\nu+1}} x_j^{\nu-s} = \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{z^{\nu+1}} \left( x^{\nu} - \sum_{j=1}^m \sum_{s=0}^{p_j-1} l_{js}(x) \nu(\nu-1)\dots(\nu-s+1) x_j^{\nu-s} \right). \end{aligned}$$

Выражение в скобках представляет собой остаточный член интерполирования Эрмита для  $x^{\nu}$ . Таким образом, окончательно получаем

$$R_n\left(\frac{1}{z-x}, x\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{z^{\nu+1}} R_n(x^{\nu}, x).$$

Но, очевидно,  $R_n(x^{\nu}, x) = 0$  при  $\nu \leq n$  (так как в качестве интерполирующего многочлена можно взять  $x^{\nu}$ ), поэтому в последней формуле надо начинать суммировать с  $\nu = n+1$ :

$$R_n\left(\frac{1}{z-x}, x\right) = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{z^{\nu+1}} R_n(x^{\nu}, x).$$

Отсюда ясно, что при  $z \rightarrow \infty$

$$R_n\left(\frac{1}{z-x}, x\right) \rightarrow 0$$

по меньшей мере как  $\frac{1}{z^{n+2}}$ . Но тогда из соотношения (10.11) вытекает, что степень  $Q(z)$  относительно  $z$  равна нулю и  $Q(z)$  не зависит от  $z$ :

$$Q(z) = A.$$

Из представления (10.9) следует, что

$$\lim_{z \rightarrow x} (z-x) R_n\left(\frac{1}{z-x}, x\right) = 1, \quad (10.12)$$

так как мы считаем  $x \neq x_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ . В силу (10.11)

$$\lim_{z \rightarrow x} (z-x) R_n\left(\frac{1}{z-x}, x\right) = \frac{A}{\Omega(x)}. \quad (10.13)$$

Сравнивая (10.12) и (10.13), получаем  $A = \Omega(x)$ . Таким образом,

$$R_n\left(\frac{1}{z-x}, x\right) = \frac{\Omega(x)}{(z-x)\Omega(z)}$$

и, следовательно, на основании (10.8) имеем

$$R_n(f, x) = \frac{\Omega(x)}{2\pi i} \int_l \frac{f(z)}{(z-x)\Omega(z)} dz. \quad (10.14)$$

Это и есть требуемое представление остатка интерполирования Эрмита.

С помощью (10.14) находим

$$P_n(x) = f(x) - R_n(f, x) =$$

$$= f(x) - \frac{\Omega(x)}{2\pi i} \int_l \frac{f(z)}{(z-x)\Omega(z)} dz. \quad (10.15)$$

Мы получили представление интерполяционного многочлена Эрмита в виде интеграла Коши. Чтобы записать этот многочлен в явном виде, вычислим контурный интеграл в правой части (10.15). При вычислении контурного интеграла будем пользоваться следующей теоремой из теории функций комплексной переменной,

Если функция регулярна в замкнутой области, за исключением конечного числа точек из этой области, являющихся полюсами или существенно особыми точками и лежащих внутри области, то интеграл от функции по контуру области равен произведению  $2\pi i$  на сумму вычетов в указанных особых точках.

Напомним, что вычетом функции  $f(z)$  в особой точке  $a$  (полюс или существенно особая точка) называется коэффициент при  $(z-a)^{-1}$  в разложении  $f(z)$  в ряд Лорана.

Подынтегральная функция в (10.15)

$$\frac{f(z)}{(z-x)\Omega(z)} \quad (10.16)$$

имеет особыми точками полюсы

$$z=x, \quad z=x_j, \quad j=1, 2, \dots, m.$$

Вычет функции (10.16) в полюсе  $z=x$  равен

$$R_0 = \frac{f(x)}{\Omega(x)}. \quad (10.17)$$

Вычислим вычет функции (10.16) в полюсе  $z=x_j$ . В окрестности  $x_j$  имеют место разложения в степенные ряды

$$f(z) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{f^{(q)}(x_j)}{q!} (z-x_j)^q, \quad (10.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-x} &= \frac{1}{z-x_j - (x-x_j)} = -\frac{1}{x-x_j} \frac{1}{1 - \frac{z-x_j}{x-x_j}} = \\ &= -\sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{(x-x_j)^{q+1}} (z-x_j)^q, \quad (10.19) \end{aligned}$$

$$\frac{(z-x_j)^{p_j}}{\Omega(z)} = \sum_{q=0}^{\infty} c_q^{(j)} (x-x_j)^q. \quad (10.20)$$

Чтобы найти вычет функции (10.16)

$$\frac{f(z)}{(z-x)\Omega(z)} = \frac{1}{(z-x_j)^{p_j}} \cdot f(z) \cdot \frac{1}{z-x} \cdot \frac{(z-x_j)^{p_j}}{\Omega(z)}$$

в полюсе  $z = x_j$ , мы должны найти коэффициент при  $(z - x_j)^{p_j - 1}$  в произведении рядов (10.18), (10.19), (10.20). Требуемый коэффициент равен

$$\sum_{q=0}^{p_j-1} \frac{f^{(q)}(x_j)}{q!} A_{p_j-1-q},$$

где  $A_{p_j-1-q}$  — коэффициент при  $(z - x_j)^{p_j-1-q}$  в произведении рядов (10.19) и (10.20). Ясно, что

$$A_{p_j-1-q} = - \sum_{r=0}^{p_j-1-q} c_r^{(j)} \frac{1}{(x - x_j)^{p_j-q-r}}.$$

Таким образом, вычет в полюсе  $z = x_j$  равен

$$R_j = - \sum_{q=0}^{p_j-1} \frac{f^{(q)}(x_j)}{q!} \sum_{r=0}^{p_j-1-q} c_r^{(j)} (x - x_j)^{-p_j+q+r}. \quad (10.21)$$

Из формулы (10.15) по теореме теории функций комплексной переменной имеем

$$P_n(x) = f(x) - 2\pi i \cdot \frac{\Omega(x)}{2\pi i} \sum_{j=0}^m R_j.$$

Заменяя здесь  $R_0$  по формуле (10.17) и  $R_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , по формуле (10.21), получим требуемое представление многочлена  $P_n(x)$  — формулу Эрмита:

$$P_n(x) = \sum_{j=1}^m \frac{\Omega(x)}{(x - x_j)^{p_j}} \sum_{q=0}^{p_j-1} \frac{f^{(q)}(x_j)}{q!} \sum_{r=0}^{p_j-1-q} c_r^{(j)} (x - x_j)^{q+r}. \quad (10.22)$$

Представление (10.22) интерполяционного многочлена  $P_n(x)$ , очевидно, остается в силе и в том случае, когда  $f(x)$  не является аналитической функцией. Более того, (10.22) дает многочлен, удовлетворяющий условиям (10.3) при произвольных числах (10.1), о которых заранее не известно, являются ли они производными некоторой функции,

Остановимся на частных случаях формулы Эрмита. Если узлы  $x_1, x_2, \dots, x_m$  простые, т. е.

$$p_1 = p_2 = \dots = p_m = 1, \quad m = n + 1,$$

$$\Omega(z) = \omega(z) = (z - x_1)(z - x_2) \dots (z - x_{n+1}),$$

формула (10.22) переходит в формулу Лагранжа.

Пусть  $m = 1$ , т. е. имеется единственный узел  $x_1$  и в нем заданы

$$f(x_1), f'(x_1), \dots, f^{(p_1-1)}(x_1).$$

В этом случае

$$p_1 = n + 1$$

и правая часть формулы (10.22) обращается в частичную сумму ряда Тэйлора функции  $f(x)$ :

$$P_n(x) = \sum_{q=0}^n \frac{f^{(q)}(x_1)}{q!} (x - x_1)^q.$$

Рассмотрим еще интерполирование Эрмита с двукратными узлами: в узле  $x_j$  заданы  $f(x_j)$  и  $f'(x_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ . В этом случае

$$p_1 = p_2 = \dots = p_m = 2, \quad 2m = n + 1,$$

$$\Omega(z) = (z - x_1)^2(z - x_2)^2 \dots (z - x_m)^2 = \omega^2(z).$$

Чтобы записать многочлен Эрмита, мы должны найти первые два члена разложения (10.20)

$$\frac{(z - x_j)^2}{\omega(z)^2} = c_0^{(j)} + c_1^{(j)}(z - x_j) + \dots$$

Имеем

$$c_0^{(j)} = \lim_{z \rightarrow x_j} \frac{(z - x_j)^2}{\omega(z)^2} = \frac{1}{\omega'(x_j)^2},$$

$$\begin{aligned} c_1^{(j)} &= \lim_{z \rightarrow x_j} \frac{d}{dz} \left[ \frac{z - x_j}{\omega(z)} \right]^2 = \\ &= \lim_{z \rightarrow x_j} 2 \left[ \frac{z - x_j}{\omega(z)} \right] \frac{\omega(z) - (z - x_j)\omega'(z)}{\omega^2(z)} = \\ &= 2 \frac{1}{\omega'(x_j)} \lim_{z \rightarrow x_j} \frac{\omega(z) - (z - x_j)\omega'(z)}{\omega^2(z)}. \end{aligned}$$

Вычисляя последний предел по правилу Лопиталя, найдем

$$c_1^{(j)} = - \frac{\omega''(x_j)}{\omega'(x_j)^3}.$$

Подставим найденные коэффициенты  $c_0^{(j)}$  и  $c_1^{(j)}$  в формулу (10.22). Получим

$$P_n(x) = \sum_{j=1}^m \frac{\omega^2(x)}{\omega'(x_j)^2 (x-x_j)^2} \left\{ f(x_j) \left[ 1 - \frac{\omega''(x_j)}{\omega'(x_j)} (x-x_j) \right] + f'(x_j) (x-x_j) \right\}. \quad (10.23)$$

По ходу построения многочлена Эрмита мы получили представление остаточного члена интерполирования (10.14), пригодное, когда  $f(x)$  — аналитическая регулярная функция. Установим теорему о представлении остаточного члена интерполирования Эрмита для вещественной  $n+1$  раз дифференцируемой функции.

**Теорема.** Если  $f(x)$  дифференцируема  $n+1$  раз на промежутке  $[a, b]$ , содержащем узлы интерполирования  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , то для любой точки  $x \in [a, b]$

$$R_n(f, x) = \frac{\Omega(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad (10.24)$$

где  $a < \xi < b$ ,

$$\Omega(x) = (x-x_1)^{p_1} (x-x_2)^{p_2} \dots (x-x_m)^{p_m}$$

и

$$n+1 = p_1 + p_2 + \dots + p_m.$$

**Доказательство.** Возьмем точку  $x \in [a, b]$ , отличную от всех узлов  $x_1, x_2, \dots, x_m$  и введем вспомогательную функцию

$$F(z) = f(z) - P_n(z) - \frac{\Omega(z)}{\Omega(x)} [f(x) - P_n(x)].$$

Функция  $F(z)$   $n+1$  раз дифференцируема на  $[a, b]$ . Очевидно,  $x$  является корнем  $F(z)$ . Узел  $x_j$  является корнем кратности  $p_j$  функции  $F(z)$ , так что  $F(z)$  имеет по меньшей мере  $p_1 + p_2 + \dots + p_m + 1 = n+2$  корней (с учетом кратности). На основании обобщенной теоремы Ролля можно утверждать, что  $F'(z)$  имеет по меньшей мере

$n + 1$  корней,  $F''(z) - n$  корней и т. д.,  $F^{(n+1)}(z)$  имеет по меньшей мере один корень  $\xi$ . Имеем

$$F^{(n+1)}(z) = f^{(n+1)}(z) - \frac{(n+1)!}{\Omega(x)} [f(x) - P_n(x)].$$

Полагая здесь  $z = \xi$ , получим представление (10.24).

**Пример.** Построим многочлен, удовлетворяющий условиям

$x$	$P(x)$	$P'(x)$	$P''(x)$
0	1	1	-2
1	2	1	
3	3	-1	

Имеем

$$\Omega(x) = x^3(x-1)^2(x-3)^2.$$

Запишем первые три члена разложения (10.20) для трехкратного узла  $x_1 = 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{z^3}{\Omega(z)} &= \frac{1}{(z-1)^2(z-3)^2} = \frac{1}{9} \frac{1}{(1-z)^2} \frac{1}{\left(1-\frac{z}{3}\right)^2} = \\ &= \frac{1}{9} (1+2z+3z^2+\dots) \left(1+\frac{2}{3}z+\frac{1}{3}z^2+\dots\right) = \\ &= \frac{1}{9} \left(1+\frac{8}{3}z+\frac{14}{3}z^2+\dots\right). \end{aligned}$$

Аналогичным путем находим первые два члена разложений (10.20) для узлов  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = 3$ :

$$\frac{(z-1)^2}{\Omega(z)} = \frac{1}{z^3(z-3)^2} = \frac{1}{4} [1 - 2(z-1) + \dots],$$

$$\frac{(z-3)^2}{\Omega(z)} = \frac{1}{z^3(z-1)^2} = \frac{1}{108} [1 - 2(z-3) + \dots].$$

Записываем формулу (10.22)

$$\begin{aligned}
 P(x) = & (x-1)^2(x-3)^2 \left\{ P(0) \frac{1}{9} \left[ 1 + \frac{8}{3}x + \frac{14}{3}x^2 \right] + \right. \\
 & + \frac{P'(0)}{1!} \frac{1}{9} \left[ x + \frac{8}{3}x^2 \right] + \frac{P''(0)}{2!} \frac{1}{9} x^2 \left. \right\} + \\
 & + x^3(x-3)^2 \left\{ P(1) \frac{1}{4} [1 - 2(x-1)] + \frac{P'(1)}{1!} \frac{1}{4} (x-1) \right\} + \\
 & + x^3(x-1)^2 \left\{ P(3) \frac{1}{108} [1 - 2(x-3)] + \frac{P'(3)}{1!} \frac{1}{108} (x-3) \right\}.
 \end{aligned}$$

Подставляя заданные значения многочлена и его производных в узлах, получим требуемый многочлен

$$\begin{aligned}
 P(x) = & \frac{(x-1)^2(x-3)^2}{9} \left( 1 + \frac{11}{3}x + \frac{19}{3}x^2 \right) + \\
 & + \frac{x^3(x-3)^2}{4} (5 - 3x) + \frac{x^3(x-1)^2}{108} (24 - 7x).
 \end{aligned}$$

## § 11. Численное дифференцирование

Коротко остановимся на задаче о вычислении производных от функции  $f(x)$ , заданной таблицей своих значений в узлах  $x_0, x_1, \dots, x_N$  (не обязательно равноотстоящих)

$$f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_N).$$

Задача эта решается так. Строится интерполяционный многочлен  $P_n(x)$  по значениям  $f(x)$  в  $n+1$  узлах ( $n \leq N$ )

$$f(x) \cong P_n(x) \quad (11.1)$$

и значение  $m$ -й производной интерполяционного многочлена  $P_n(x)$  принимается за приближенное значение  $m$ -й производной функции  $f(x)$

$$f^{(m)}(x) \cong P_n^{(m)}(x), \quad m \leq n. \quad (11.2)$$

Укажем выражение производной от  $P_n(x)$  для того случая, когда значения  $f(x)$  заданы для равноотстоящих значений аргумента с шагом  $h$ , а интерполяционный многочлен  $P_n(x)$

задан формулой Ньютона (7.7) для интерполирования в начале таблицы

$$P_n(x_0 + ht) = \sum_{k=0}^n C_t^{(k)} \Delta^k f(x_0). \quad (11.3)$$

Дифференцируя обе части равенства (11.3)  $m (\leq n)$  раз по  $t$ , находим

$$\frac{d^m P_n(x_0 + ht)}{dt^m} = h^m \frac{d^m P_n(x)}{dx^m} = \sum_{k=m}^n \frac{d^m C_t^{(k)}}{dt^m} \Delta^k f(x_0), \quad (11.4)$$

откуда

$$P_n^{(m)}(x) = \frac{1}{h^m} \sum_{k=m}^n \frac{d^m C_t^{(k)}}{dt^m} \Delta^k f(x_0). \quad (11.5)$$

Чтобы указать явное выражение  $m$ -й производной многочлена  $C_t^{(k)}$ , запишем многочлен  $k! C_t^{(k)}$  в виде

$$t(t-1) \dots (t-k+1) = S_k^{(k)} t^k + S_k^{(k-1)} t^{(k-1)} + \dots + S_k^{(1)} t. \quad (11.6)$$

Числа  $S_k^{(j)}$ ,  $j \leq k = 1, 2, 3, \dots$ , очевидно, целые. Они известны как *числа Стирлинга первого рода*. Числа  $S_k^{(j)}$  можно определить иначе, при помощи равенств

$$\frac{[\ln(1+x)]^j}{j!} = \sum_{k=j}^{\infty} \frac{S_k^{(j)}}{k!} x^k, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (11.7)$$

На доказательстве этого утверждения останавливаться не будем.

Из соотношения (11.6) находим

$$k! \frac{d^m C_t^{(k)}}{dt^m} = \sum_{j=m}^k S_k^{(j)} j(j-1) \dots (j-m+1) t^{j-m}.$$

Подставляя найденное представление  $m$ -й производной от  $C_t^{(k)}$  в (11.5), получим

$$P_n^{(m)}(x) = \frac{1}{h^m} \sum_{k=m}^n \sum_{j=m}^k \frac{S_k^{(j)}}{k!} j(j-1) \dots \dots (j-m+1) t^{j-m} \Delta^k f(x_0). \quad (11.8)$$

Это и есть требуемое выражение  $m$ -й производной от интерполяционного многочлена (11.3).

В книге В. Н. Фаддеевой [30] приведена таблица чисел

$$c_{jk} = \frac{S_k^{(j)}}{k!}$$

с восемью значащими цифрами для  $1 \leq j \leq k \leq 20$ .

Положим в (11.8)  $t = 0$  ( $x = x_0$ ). Получим

$$P_n^{(m)}(x_0) = \frac{m!}{h^m} \sum_{k=m}^n \frac{S_k^{(m)}}{k!} \Delta^k f(x_0).$$

Если принять во внимание (11.7), то последнюю формулу можно записать в символическом виде:

$$P_n^{(m)}(x_0) = \frac{1}{h^m} [\ln(1 + \Delta)]^m f(x_0). \quad (11.9)$$

Считаем, что  $\Delta^v f(x_0) = 0$  при  $v > n$ . Конечно, формулу (11.9) можно установить непосредственно, без привлечения равенства (11.7).

Аналогичным образом можно записать выражение  $m$ -й производной от интерполяционного многочлена Ньютона (7.12), предназначенного для интерполирования в конце таблицы:

$$P_n(x_n + ht) = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_{-t}^{(k)} \Delta^k f(x_{n-k}). \quad (11.10)$$

Имеем

$$k! (-1)^k C_{-t}^{(k)} = \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} S_k^{(j)} t^j$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} (-1)^k k! \frac{d^m}{dt^m} C_{-t}^{(k)} &= \\ &= \sum_{j=m}^k (-1)^{k-j} S_k^{(j)} j(j-1) \dots (j-m+1) t^{j-m}. \end{aligned}$$

Вычисляя производную порядка  $m$  по  $t$  от левой и правой части (11.10) и принимая во внимание последнее равен-

ство, получим требуемое выражение производной

$$P_n^{(m)}(x) = \frac{1}{h^m} \sum_{k=m}^n \sum_{j=m}^k (-1)^{k-j} \frac{S_k^{(j)}}{k!} j(j-1) \dots \dots (j-m+1) t^{j-m} \Delta^k f(x_{n-k}). \quad (11.11)$$

Положим в (11.11)  $t = 0$  ( $x = x_n$ ). Получим

$$P_n^{(m)}(x_n) = \frac{1}{h^m} \sum_{k=m}^n (-1)^{k-m} \frac{S_k^{(m)}}{k!} m! \Delta^k f(x_{n-k}). \quad (11.12)$$

Формулу (11.12) можно записать в символическом виде, если воспользоваться иным обозначением конечных разностей.

Введем обозначение

$$\nabla f(x_q) = f(x_q) - f(x_{q-1}).$$

У аргумента функции под знаком  $\nabla$  пишется индекс аргумента уменьшаемого  $f(x_q)$ , в отличие от обозначения  $\Delta$ , где у аргумента функции под знаком  $\Delta$  пишется индекс аргумента вычитаемого. Аналогично по разностям порядка  $p$   $\nabla^p f(x_q)$  и  $\nabla^p f(x_{q-1})$  определяются разности порядка  $p+1$

$$\nabla^{p+1} f(x_q) = \nabla^p f(x_q) - \nabla^p f(x_{q-1}).$$

Разности  $\Delta^p f(x_q)$  называют *нисходящими*, а  $\nabla^p f(x_q)$  — *восходящими* разностями.

Участок таблицы восходящих конечных разностей  $f(x)$  выглядит так:

$x$	$f(x)$	$\nabla f(x)$	$\nabla^2 f(x)$	$\nabla^3 f(x)$	$\nabla^4 f(x)$
$x_{n-4}$	$f(x_{n-4})$				
$x_{n-3}$	$f(x_{n-3})$	$\nabla f(x_{n-3})$			
$x_{n-2}$	$f(x_{n-2})$	$\nabla f(x_{n-2})$	$\nabla^2 f(x_{n-2})$	$\nabla^3 f(x_{n-1})$	
$x_{n-1}$	$f(x_{n-1})$	$\nabla f(x_{n-1})$	$\nabla^2 f(x_{n-1})$	$\nabla^3 f(x_n)$	$\nabla^4 f(x_n)$
$x_n$	$f(x_n)$	$\nabla f(x_n)$	$\nabla^2 f(x_n)$		

Разности функции с одним и тем же аргументом, например,

$$f(x_n), \nabla f(x_n), \nabla^2 f(x_n), \nabla^3 f(x_n), \nabla^4 f(x_n)$$

расположены в восходящей косой строке. Это объясняет название „восходящие разности“. Из таблицы видно, что

$$\Delta^k f(x_{n-k}) = \nabla^k f(x_n).$$

Пользуясь этими равенствами, перепишем (11.12):

$$P_n^{(m)}(x_n) = \frac{m!}{h^m} \sum_{k=m}^n (-1)^{k-m} \frac{S_k^{(m)}}{k!} \nabla^k f(x_n). \quad (11.13)$$

Положим в (11.7)  $j=m$ , заменим  $x$  на  $-x$  и умножим обе части на  $(-1)^m$ . Получим

$$(-1)^m \frac{[\ln(1-x)]^m}{m!} = \sum_{k=m}^{\infty} (-1)^{k-m} \frac{S_k^{(m)}}{k!} x^k.$$

В силу последнего равенства формулу (11.13) можем записать в символическом виде:

$$P_n^{(m)}(x_n) = \frac{(-1)^m}{h^m} [\ln(1-\nabla)]^m f(x_n). \quad (11.14)$$

Считаем, что  $\nabla^{\nu} f(x_n) = 0$  при  $\nu > n$ .

Займемся теперь вопросом о представлении остаточного члена формул численного дифференцирования. По определению остатка интерполирования [см. (6.1)] имеем

$$R_n(f, x) = f(x) - P_n(x).$$

Возьмем  $m$ -ю производную ( $m \leq n$ ) от обеих частей этого равенства. Получим

$$R_n^{(m)}(f, x) = f^{(m)}(x) - P_n^{(m)}(x). \quad (11.15)$$

Таким образом, остаточный член формулы для вычисления  $m$ -й производной равен  $m$ -й производной по  $x$  от остаточного члена интерполирования. Докажем теорему о представлении остаточного члена (11.15) для  $n+1$  раз дифференцируемой функции  $f(x)$ .

**Теорема.** Пусть  $x$  не принадлежит внутренности  $[\alpha, \beta]$  — наименьшего промежутка, содержащего узлы

интерполирования  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . Предположим, что функция  $f(x)$   $n+1$  раз дифференцируема на наименьшем промежутке  $[a, b]$ , содержащем узлы интерполирования и точку  $x$ . Тогда существует точка  $\xi$ ,  $a < \xi < b$ , такая, что

$$R_n^{(m)}(f, x) = \frac{\omega^{(m)}(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad (11.16)$$

где  $\omega^{(m)}(x)$  —  $m$ -я производная от многочлена

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n).$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(z) = f(z) - P_n(z) - K\omega(z), \quad (11.17)$$

где  $K$  — постоянная, которая будет определена позднее. Функция  $F(z)$   $n+1$  раз дифференцируема на  $[a, b]$ . Узлы интерполирования  $x_0, x_1, \dots, x_n$  являются корнями  $F(z)$ , поэтому на основании теоремы Ролля можно утверждать, что  $F'(z)$  имеет по меньшей мере  $n$  различных корней внутри  $(\alpha, \beta)$ ,  $F''(z)$  имеет  $n-1$  корней внутри  $(\alpha, \beta)$  и т. д.,  $F^{(m)}(z)$  имеет по меньшей мере  $n+1-m$  различных корней внутри  $(\alpha, \beta)$ .

Выберем теперь постоянную  $K$  так, чтобы  $F^{(m)}(z) = 0$  при  $z = x$ , или подробнее

$$F^{(m)}(x) = f^{(m)}(x) - P_n^{(m)}(x) - K\omega^{(m)}(x) = 0. \quad (11.18)$$

Такой выбор  $K$  возможен, так как  $\omega^{(m)}(z)$  имеет ровно  $n+1-m$  корней, расположенных внутри  $(\alpha, \beta)$ , а  $x$  не принадлежит  $(\alpha, \beta)$  и, следовательно,  $\omega^{(m)}(x) \neq 0$ . Из (11.18) находим

$$K = \frac{f^{(m)}(x) - P_n^{(m)}(x)}{\omega^{(m)}(x)}.$$

При указанном выборе  $K$  производная  $F^{(m)}(z)$  имеет по меньшей мере  $n+2-m$  различных корней на  $[a, b]$ . По теореме Ролля  $F^{(m+1)}(z)$  имеет внутри  $[a, b]$  по меньшей мере  $n+1-m$  корней,  $F^{(m+2)}(z)$  имеет  $n-m$  корней и т. д.,  $F^{(n+1)}(z)$  имеет по крайней мере один корень  $\xi$  внутри

[*a*, *b*]:  $F^{(n+1)}(\xi) = 0$ . Пользуясь определением (11.17) функции  $F(z)$ , получаем

$$F^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - (n+1)! K = 0,$$

откуда находим

$$K = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Подставим это значение  $K$  в (11.18). Получим

$$f^{(m)}(x) - P_n^{(m)}(x) - \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega^{(m)}(x) = 0,$$

что совпадает с (11.16).

Представление остаточного члена (11.16) легко запомнить. Достаточно записать  $m$ -ю производную по  $x$  от остаточного члена интерполирования (6.2)

$$R_n(f, x) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

считая при этом величину  $f^{(n+1)}(\xi)$  постоянной. На самом деле  $f^{(n+1)}(\xi)$ , конечно, зависит от  $x$ , и  $\xi$  в представлении  $R_n(f, x)$  и  $R_n^{(m)}(f, x)$  не одно и то же. Подчеркнем еще, что представление (11.16) пригодно для  $x$ , не принадлежащих  $(\alpha, \beta)$ , где  $[\alpha, \beta]$  — наименьший промежуток, содержащий узлы интерполирования  $x_0, x_1, \dots, x_n$ .

---

## ГЛАВА III

### ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ.

#### § 1. Интерполяционные квадратурные формулы

Вычисление определенного интеграла с помощью основной формулы интегрального исчисления

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

где  $f(x)$ , скажем, непрерывная на  $[a, b]$  функция и  $F(x)$  — ее первообразная, затруднено тем, что фактическое нахождение значений  $F(x)$  возможно лишь в редких случаях. По этой причине большое значение имеют формулы для приближенного вычисления интегралов. С наиболее важными из них мы познакомимся в настоящей главе.

Многие формулы для приближенного вычисления определенных интегралов имеют вид

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \cong \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) \quad (1.1)$$

и называются *формулами механических квадратур*. Сумма в правой части (1.1) называется *квадратурной суммой*. Числа  $x_k^{(n)}$  принадлежат промежутку  $[a, b]$  и называются *узлами* квадратурной формулы, а числа  $A_k^{(n)}$  — *коэффициентами* квадратурной формулы. Узлы квадратурной формулы всегда будем считать занумерованными в порядке возрастания:

$$x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \dots < x_n^{(n)}.$$

Промежуток интегрирования  $[a, b]$  может быть и бесконечным. Подынтегральная функция записана в виде произведения двух функций  $p(x)$  и  $f(x)$ . Первая из них  $p(x)$  предполагается фиксированной для данной формулы (1.1) и называется *весовой функцией*. Функция  $f(x)$  принадлежит некоторому достаточно широкому классу функций, например, непрерывных и таких, что интеграл в левой части (1.1) существует.

Равенство (1.1) приближенное. Разность между интегралом и квадратурной суммой

$$R_n(f) = \int_a^b p(x) f(x) dx - \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)})$$

называется *остаточным членом квадратурной формулы* (1.1). Остаточный член представляет собой ошибку, возникающую при замене интеграла квадратурной суммой.

При вычислении интеграла с помощью формулы (1.1) сама квадратурная сумма вычисляется лишь приближенно. Вместо  $f(x_k^{(n)})$  мы получаем некоторое  $\tilde{f}(x_k^{(n)})$ , так что

$$\tilde{f}(x_k^{(n)}) = f(x_k^{(n)}) + \varepsilon_k^{(n)},$$

где  $\varepsilon_k^{(n)}$  — ошибка округления. Предположим, что  $|\varepsilon_k^{(n)}| \leq \varepsilon$  при  $k = 1, 2, \dots, n$ . Если не принимать во внимание ошибок округления, возникающих при вычислении суммы произведений

$$\sum_{k=1}^n A_k^{(n)} \tilde{f}(x_k^{(n)}),$$

то можем утверждать, что ошибка округления при вычислении квадратурной суммы не будет превосходить числа

$$\varepsilon \sum_{k=1}^n |A_k^{(n)}|$$

и может совпадать с ним. Отсюда следует, что чем больше  $\sum_{k=1}^n |A_k^{(n)}|$ , тем большей может быть ошибка округления квадратурной суммы.

Предположим, что в (1.1)  $p(x) \geq 0$  на  $[a, b]$  и формула точна, когда  $f(x) \equiv 1$ . Последнее условие равносильно равенству

$$\sum_{k=1}^n A_k^{(n)} = \int_a^b p(x) dx,$$

поэтому ясно, что  $\sum_{k=1}^n |A_k^{(n)}|$  будет иметь наименьшее возможное значение, когда  $A_k^{(n)} > 0$  при  $k = 1, 2, \dots, n$ . Это обстоятельство частично объясняет важность для приложений квадратурных формул с положительными коэффициентами.

Часто применяется способ построения квадратурных формул, основанный на алгебраическом интерполировании. Предположим, что речь идет о вычислении интеграла

$$\int_a^b p(x) f(x) dx. \quad (1.2)$$

Промежуток интегрирования считаем любым, весовую функцию  $p(x)$  предполагаем отличной от нуля на множестве положительной меры и такой, что существуют интегралы

$$\mu_k = \int_a^b p(x) x^k dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Числа  $\mu_k$  называются *моментами* весовой функции  $p(x)$ . Функцию  $f(x)$  считаем непрерывной и такой, что интеграл (1.2) существует. Конечно, это последнее ограничение существенно лишь в том случае, если промежуток  $[a, b]$  бесконечен.

Выберем конечное число  $n$  точек  $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$  на промежутке  $[a, b]$  и выполним интерполирование функции  $f(x)$  по ее значениям в этих точках:

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\omega(x)}{(x - x_k^{(n)}) \omega'(x_k^{(n)})} f(x_k^{(n)}) + R_n(f, x). \quad (1.3)$$

Здесь  $R_n(f, x)$  остаток интерполирования и

$$\omega(x) = (x - x_1^{(n)})(x - x_2^{(n)}) \dots (x - x_n^{(n)}).$$

Подставим вместо  $f(x)$  под знак интеграла в (1.2) правую часть (1.3). Получим

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) + \int_a^b p(x) R_n(f, x) dx, \quad (1.4)$$

где

$$A_k^{(n)} = \int_a^b p(x) \frac{\omega(x)}{(x - x_k^{(n)}) \omega'(x_k^{(n)})} dx. \quad (1.5)$$

Если  $f(x)$  достаточно точно аппроксимируется на  $[a, b]$  интерполяционным многочленом, другими словами, если остаток  $R_n(f, x)$  достаточно мал на всем промежутке  $[a, b]$ , то в формуле (1.4), которая представляет собой точное равенство, можно отбросить  $\int_a^b p(x) R_n(f, x) dx$ , и мы получим приближенно

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \cong \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}). \quad (1.6)$$

В квадратурной формуле (1.6) коэффициенты определяются формулой (1.5). Произвол в построении формулы (1.6) сводится к произволу в выборе узлов на промежутке  $[a, b]$ . Квадратурную формулу (1.6), коэффициенты которой определяются согласно (1.5), будем называть *интерполяционной*.

**Теорема.** Для того чтобы квадратурная формула (1.1) с  $n$  узлами была интерполяционной, необходимо и достаточно, чтобы она была точна, когда  $f(x)$  является многочленом степени не выше  $n - 1$ .

Доказательство. Необходимость. Пусть формула (1.1) интерполяционная. Если  $f(x)$  — многочлен степени не выше  $n - 1$ , то в равенстве (1.3)  $R_n(f, x) \equiv 0$  и, следовательно, (1.6) обращается в точное равенство. Но квадратурная сумма в (1.6) совпадает с квадратурной суммой в (1.1), так как по предположению коэффициенты формулы (1.1) определяются с помощью (1.5).

Достаточность. Формула (1.1) точна для любого многочлена степени не выше  $n - 1$ , в частности, она должна быть точной для многочлена степени  $n - 1$

$$\omega_m(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_m^{(n)}) \omega'(x_m^{(n)})}, \quad m = 1, 2, \dots, n.$$

Подставляя  $\omega_m(x)$  в (1.1), получим

$$\int_a^b p(x) \omega_m(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} \omega_m(x_k^{(n)}) = A_m^{(n)},$$

а это и означает, что формула (1.1) интерполяционная. Достаточность доказана.

Будем говорить, что квадратурная формула имеет *алгебраическую степень точности  $m$* , если она точна для  $f(x) = x^j$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, m$  (или, что то же самое, для любого многочлена степени не выше  $m$ ), и не дает точного результата для  $f(x) = x^{m+1}$ . Из доказанной теоремы вытекает, что интерполяционные квадратурные формулы с  $n$  узлами имеют алгебраическую степень точности не меньшую, чем  $n - 1$ .

## § 2. Простейшие интерполяционные квадратурные формулы

Рассмотрим интерполяционные квадратурные формулы, отвечающие тому случаю, когда узлы выбираются равноотстоящими. Будем предполагать, что промежуток интегрирования  $[a, b]$  конечен и весовая функция  $p(x)$  тождественно равна единице.

Начнем с формул прямоугольников, в которых берется единственный узел интерполирования. Возьмем в качестве узла некоторую точку  $c$  из промежутка  $[a, b]$ . Интерполяционным многочленом в случае одного узла является постоянная  $f(c)$ , и формула квадратур, следовательно, имеет вид

$$\int_a^b f(x) dx \cong (b - a) f(c). \quad (2.1)$$

Таким образом, площадь под графиком кривой  $y = f(x)$  приближенно заменяется площадью прямоугольника с высотой, равной значению функции  $f(x)$  при  $x = c$  (см. рис. 14), поэтому формула (2.1) называется формулой *прямоугольников*.

Отметим важные частные случаи формулы (2.1). Если узел  $c$  совпадает с левым концом промежутка интегрирования:  $c = a$ , формула (2.1) называется формулой *левых прямоугольников*. Если  $c = b$ , то формула (2.1) называется формулой *правых прямоугольников*. Наконец, если узел  $c$  совпадает с серединой промежутка интегрирования:  $c = \frac{a+b}{2}$ , формула (2.1) называется формулой *средних прямоугольников*.

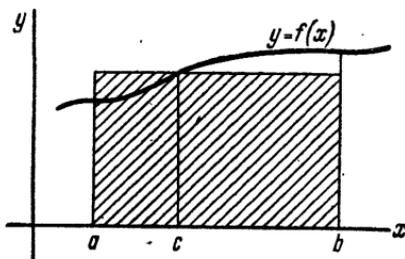


Рис. 14.

Укажем представления остаточного члена формулы (2.1)

$$R(f, c) = \int_a^b f(x) dx - (b-a) f(c) \quad (2.2)$$

при

$$c = a, \quad c = b \quad \text{и} \quad c = \frac{a+b}{2}.$$

В случае формул левых и правых прямоугольников будем предполагать, что  $f(x)$  имеет непрерывную производную первого порядка. По формуле Тейлора имеем

$$f(x) - f(a) = (x-a) f'(\xi),$$

где  $a < \xi < b$ . Интегрируя обе части этого равенства по  $x$  в пределах от  $a$  до  $b$ , получим

$$R(f, a) = \int_a^b (x-a) f'(\xi) dx. \quad (2.3)$$

Обозначим

$$m = \min_{[a, b]} f'(x), \quad M = \max_{[a, b]} f'(x). \quad (2.4)$$

Множитель  $x - a$  сохраняет знак в промежутке  $[a, b]$ , поэтому к интегралу в правой части (2.3) можно применить обобщенную теорему о среднем

$$R(f, a) = L \int_a^b (x - a) dx = L \frac{(b - a)^2}{2}, \quad (2.5)$$

где  $m \leq L \leq M$ . Так как  $f'(x)$  непрерывна, то в силу последнего неравенства найдется такое  $\eta$ ,  $a \leq \eta \leq b$ , что

$$L = f'(\eta).$$

Равенство (2.5) теперь можно записать так:

$$R(f, a) = \frac{(b - a)^2}{2} f'(\eta), \quad a \leq \eta \leq b. \quad (2.6)$$

Это и есть искомое представление  $R(f, a)$ .

Таким же путем можно получить представление остаточного члена формулы правых прямоугольников

$$R(f, b) = -\frac{(b - a)^2}{2} f'(\eta), \quad a \leq \eta \leq b. \quad (2.7)$$

В случае формулы средних прямоугольников будем предполагать, что функция  $f(x)$  имеет непрерывную производную второго порядка. По формуле Тейлора имеем

$$\begin{aligned} f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= \\ &= \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 f''(\xi), \end{aligned}$$

где  $\xi$  — промежуточная между  $x$  и  $\frac{a+b}{2}$  точка, зависящая от  $x$ . Интегрируя обе части последнего равенства по  $x$  от  $a$  до  $b$ , получим

$$R\left(f, \frac{a+b}{2}\right) = \frac{1}{2} \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 f''(\xi) dx.$$

К интегралу в правой части можем применить теорему о среднем, так как  $\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2$  сохраняет знак на  $[a, b]$ .

Проведя такое же рассуждение, как в случае формулы левых прямоугольников, получим

$$R\left(f, \frac{a+b}{2}\right) = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\eta), \quad a \leq \eta \leq b. \quad (2.8)$$

Если промежуток  $[a, b]$  велик, то формулы прямоугольников дают малую точность. Разделим промежуток  $[a, b]$  на  $n$  частичных промежутков длины  $h = \frac{b-a}{n}$  точками деления

$$x_k = a + kh, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

К интегралу по каждому частичному промежутку  $[x_k, x_{k+1}]$  применим формулу прямоугольников (2.1)

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \cong hf(\alpha + kh), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad (2.9)$$

где  $\alpha$  — некоторая точка из промежутка  $[x_0, x_1] \equiv [a, a+h]$ .

Суммируя обе части формулы (2.9) по  $k$  от 0 до  $n-1$ , получим

$$\int_a^b f(x) dx \cong h \sum_{k=0}^{n-1} f(\alpha + kh). \quad (2.10)$$

Формула (2.10) называется „большой“ формулой прямоугольников, в отличие от „малой“ формулы (2.1). В частных случаях  $\alpha = a$ ,  $\alpha = a + h$  и  $\alpha = a + \frac{h}{2}$  формула (2.10) называется *большой формулой* соответственно *левых, правых и средних* *прямоугольников*.

Остаточный член  $R_n(f, \alpha)$  формулы прямоугольников (2.10), очевидно, равен сумме остаточных членов

$$R(f, \alpha, k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx - hf(\alpha + kh)$$

формул малых прямоугольников (2.9):

$$R_n(f, \alpha) = \sum_{k=0}^{n-1} R(f, \alpha, k). \quad (2.11)$$

В частности, если  $a = a$ , на основании (2.6)

$$R(f, a, k) = \frac{(b-a)^2}{2n^2} f'(\xi_k), \quad x_k \leq \xi_k \leq x_{k+1},$$

и из формулы (2.11) получаем

$$R_n(f, a) = \frac{(b-a)^2}{2n^2} \sum_{k=0}^{n-1} f'(\xi_k). \quad (2.12)$$

Укажем для  $R_n(f, a)$  более компактное представление. Мы имеем

$$m \leq \frac{f'(\xi_0) + f'(\xi_1) + \dots + f'(\xi_{n-1})}{n} \leq M,$$

где  $m$  и  $M$  определены соотношениями (2.4). В силу непрерывности  $f'(x)$  существует  $\eta$ ,  $a \leq \eta \leq b$ , такое, что

$$\frac{f'(\xi_0) + f'(\xi_1) + \dots + f'(\xi_{n-1})}{n} = f'(\eta),$$

и из (2.12) мы получаем представление остаточного члена большой формулы левых прямоугольников:

$$R_n(f, a) = \frac{(b-a)^2}{2n} f'(\eta), \quad a \leq \eta \leq b. \quad (2.13)$$

Аналогичным путем можно указать представления остаточных членов большой формулы правых прямоугольников

$$R_n(f, a+h) = -\frac{(b-a)^2}{2n} f'(\eta), \quad a \leq \eta \leq b, \quad (2.14)$$

и большой формулы средних прямоугольников

$$R_n\left(f, a + \frac{h}{2}\right) = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\eta), \quad a \leq \eta \leq b. \quad (2.15)$$

Переходим к выводу квадратурных формул Ньютона — Котеса. Возьмем на промежутке  $[a, b]$   $n+1$  равноотстоящих узлов

$$x_k^{(n)} = a + kh, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n, \quad n \geq 1, \quad (2.16)$$

где  $h = \frac{b-a}{n}$ . Интерполяционные квадратурные формулы, имеющие в качестве узлов числа (2.16), и называются *фор-*

мулами Ньютона—Котеса. Эти формулы имеют вид

$$\int_a^b f(x) dx \cong \sum_{k=0}^n A_k^{(n)} f(a + kh). \quad (2.17)$$

Наша задача сводится к определению коэффициентов  $A_k^{(n)}$ . В силу (1.5)

$$A_k^{(n)} = \int_a^b \frac{\omega(x)}{(x - x_k^{(n)}) \omega'(x_k^{(n)})} dx, \quad (2.18)$$

где

$$\omega(x) = (x - a)(x - a - h) \dots (x - a - nh).$$

В интеграле (2.18) сделаем замену переменной  $x = a + ht$ . Очевидно,

$$\omega(x) = h^{n+1} t(t-1)(t-2) \dots (t-n),$$

$$x - x_k^{(n)} = h(t - k),$$

$$\omega'(x_k^{(n)}) = (x_k^{(n)} - x_0^{(n)}) \dots (x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)}) (x_k^{(n)} - x_{k+1}^{(n)}) \dots$$

$$\dots (x_k^{(n)} - x_n^{(n)}) = (-1)^{n-k} h^n k! (n - k)!,$$

и мы получаем

$$A_k^{(n)} = h \frac{(-1)^{n-k}}{k! (n - k)!} \int_0^n t(t-1) \dots \dots (t - k + 1)(t - k - 1) \dots (t - n) dt.$$

Имеем

$$A_k^{(n)} = (b - a) B_k^{(n)}, \quad (2.19)$$

где

$$B_k^{(n)} = \frac{(-1)^{n-k}}{nk! (n - k)!} \int_0^n t(t-1) \dots \dots (t - k + 1)(t - k - 1) \dots (t - n) dt. \quad (2.20)$$

Очевидно, коэффициенты  $B_k^{(n)}$  не зависят от промежутка  $[a, b]$ .

Выпишем  $B_k^{(n)}$  для  $n$  от 1 до 5.

$$n = 1 \quad B_0^{(1)} = B_1^{(1)} = \frac{1}{2}$$

$$n = 2 \quad B_0^{(2)} = B_2^{(2)} = \frac{1}{6}, \quad B_1^{(2)} = \frac{4}{6}$$

$$n = 3 \quad B_0^{(3)} = B_3^{(3)} = \frac{1}{8}, \quad B_1^{(3)} = B_2^{(3)} = \frac{3}{8}$$

$$n = 4 \quad B_0^{(4)} = B_4^{(4)} = \frac{7}{90}, \quad B_1^{(4)} = B_3^{(4)} = \frac{32}{90}, \quad B_2^{(4)} = \frac{12}{90}$$

$$n = 5 \quad B_0^{(5)} = B_5^{(5)} = \frac{19}{288}, \quad B_1^{(5)} = B_4^{(5)} = \frac{75}{288}, \quad B_2^{(5)} = B_3^{(5)} = \frac{50}{288}$$

При  $n=8$  и  $n=10$  среди коэффициентов  $B_k^{(n)}$  встречаются отрицательные. Р. О. Кузьмин установил асимптотические формулы для коэффициентов  $B_k^{(n)}$ , из которых, в частности, вытекает, что

$\sum_{k=0}^n |B_k^{(n)}|$  неограниченно возрастает при  $n \rightarrow \infty$ . Ввиду равенства

$$\sum_{k=1}^n B_k^{(n)} = \frac{1}{b-a} \int_a^b 1 \, dx = 1$$

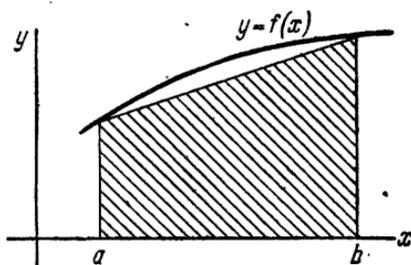


Рис. 15.

отсюда вытекает, что при больших  $n$  среди коэффициентов имеются как положительные, так и отрицательные.

Рассмотрим простейшие из формул Ньютона — Котеса. При  $n=1$  формула (2.17) запишется так:

$$\int_a^b f(x) \, dx \cong \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)]. \quad (2.21)$$

Это формула *трапеций* (см. рис. 15).

Если предположить, что  $f''(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ , то нетрудно указать представление остаточного члена формулы трапеций

$$R^{(1)}(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi), \quad a \leq \xi \leq b. \quad (2.22)$$

Для этого достаточно записать представление остаточного члена интерполирования функции  $f(x)$  по ее значениям в узлах  $a$  и  $b$  [см. (6.2) из гл. II]

$$f(x) - P_1(x) = \frac{1}{2}(x-a)(x-b)f''(\eta)$$

и проинтегрировать обе части по  $x$  от  $a$  до  $b$ . Получим

$$R^{(1)}(f) = \frac{1}{2} \int_a^b (x-a)(x-b)f''(\eta) dx.$$

Остается воспользоваться обобщенной теоремой о среднем, что возможно, так как  $(x-a)(x-b) \leq 0$  на  $[a, b]$ .

При  $n=2$  из (2.17) получаем формулу Симпсона

$$\int_a^b f(x) dx \cong \frac{b-a}{6} \left[ f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]. \quad (2.23)$$

Получить представление остатка вида (2.22) таким же путем, как в случае формулы трапеций, нельзя, так как

$$\omega(x) = (x-a) \left( x - \frac{a+b}{2} \right) (x-b)$$

меняет знак на  $[a, b]$ .

Нетрудно проверить, что если построить интерполяционный многочлен Эрмита по условиям

$$P(a) = f(a), \quad P\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

$$P'\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right), \quad P(b) = f(b),$$

то

$$\int_a^b P(x) dx = \frac{b-a}{6} \left[ f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]. \quad (2.24)$$

Запишем представление остаточного члена интерполирования  $f(x) - P(x)$  по формуле (10.24) гл. II:

$$= f(x) - P(x) = \frac{1}{4!} \Omega(x) f^{(IV)}(\xi), \quad a < \xi < b,$$

где

$$\Omega(x) = (x - a) \left( x - \frac{a+b}{2} \right)^2 (x - b)$$

сохраняет знак на  $[a, b]$ .

Сопоставляя (2.23) и (2.24), мы видим, что остаточный член формулы (2.23) равен

$$R^{(2)}(f) = \frac{1}{4!} \int_a^b \Omega(x) f^{(IV)}(\xi) dx.$$

Если предположить, что  $f^{(IV)}(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ , то получим

$$R^{(2)}(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(IV)}(\eta), \quad a \leq \eta \leq b. \quad (2.25)$$

Квадратурные формулы Ньютона — Котеса при больших  $n$  применять нецелесообразно. Как уже отмечалось, при больших  $n$  среди коэффициентов этих формул имеются отрицательные. Гораздо выгоднее добиваться повышения точности путем разбиения промежутка  $[a, b]$  на частичные и применения к частичным промежуткам квадратурных формул при небольших  $n$ . Так мы уже поступали в отношении квадратурных формул прямоугольников.

Укажем без вывода большие формулы трапеций и Симпсона и их остаточные члены. Формула *трапеций* имеет вид

$$\int_a^b f(x) dx \cong \frac{b-a}{2n} [f(x_0^{(n)}) + 2(f(x_1^{(n)}) + f(x_2^{(n)}) + \dots \\ \dots + f(x_{n-1}^{(n)})) + f(x_n^{(n)})], \quad (2.26)$$

здесь  $x_k^{(n)}$  определяются при помощи (2.16). Остаточный член формулы (2.26) в предположении, что существует непрерывная  $f''(x)$  в  $[a, b]$ , записывается так:

$$R_n^{(1)}(f) = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi), \quad a \leq \xi \leq b. \quad (2.27)$$

## Формула Симпсона

$$\int_a^b f(x) dx \cong \frac{b-a}{3n} [f(x_0^{(n)}) + 4(f(x_1^{(n)}) + f(x_3^{(n)}) + \dots \\ \dots + f(x_{n-1}^{(n)})) + 2(f(x_2^{(n)}) + f(x_4^{(n)}) + \dots + f(x_{n-2}^{(n)}))] + f(x_n^{(n)}], \quad (2.28)$$

здесь  $x_k^{(n)}$  определяются при помощи (2.16) и  $n$  предполагается четным. Остаточный член формулы (2.28):

$$R_n^{(2)}(f) = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(IV)}(\xi), \quad a \leq \xi \leq b. \quad (2.29)$$

Эта формула имеет место в предположении, что существует непрерывная производная  $f^{(IV)}(x)$  на  $[a, b]$ .

Отметим, что интерполяционными формулами являются лишь малые формулы (прямоугольников, трапеций, Симпсона).

**Пример.** Вычислим значение интегрального синуса

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

при  $x=1$ . Мы вычислим этот интеграл при помощи больших формул прямоугольников, трапеций и Симпсона и сравним полученные результаты.

Важным вопросом при применении формул механических квадратур является вопрос о выборе числа узлов. Число узлов должно быть таким, чтобы была обеспечена требуемая точность результата вычисления. Наиболее правильный путь для решения вопроса о числе узлов — это использование остаточного члена и его оценки. Однако на этом пути встречаются трудности: 1) в остаточный член входят производные подынтегральной функции, которые часто бывает трудно вычислить и оценить, 2) получаемая таким путем оценка остаточного члена оказывается, как правило, сильно завышенной. Правильность результата проверяется подсчетом интеграла по другой формуле (с теми же узлами), либо по той же формуле, но с другим числом узлов.

В нашем примере производные от подынтегральной функции легко оцениваются. Имеем

$$\frac{\sin x}{x} = \int_0^1 \cos \xi x \, d\xi.$$

Вычислим производную порядка  $k$  по  $x$ :

$$\frac{d^k}{dx^k} \left( \frac{\sin x}{x} \right) = \int_0^1 \xi^k \cos \left( x\xi + k \frac{\pi}{2} \right) d\xi.$$

Так как абсолютная величина интеграла в правой части меньше, чем  $\frac{1}{k+1}$ , то получаем

$$\left| \frac{d^k}{dx^k} \left( \frac{\sin x}{x} \right) \right| \leq \frac{1}{k+1}. \quad (2.30)$$

Оценка производной (2.30) позволяет решить вопрос о выборе числа узлов. Определим, например, сколько следует взять узлов в большой формуле трапеций (2.26), чтобы найденное приближенное значение интеграла отличалось от точного его значения менее, чем на три единицы четвертого десятичного знака. В силу формулы (2.27) и оценки (2.30) находим

$$\left| R_n^{(1)} \left( \frac{\sin x}{x} \right) \right| \leq \frac{1}{12n^2} \cdot \frac{1}{3}.$$

Мы получим ответ на вопрос о числе узлов, если решим неравенство

$$\frac{1}{36n^2} < 3 \cdot 10^{-4}.$$

Легко подсчитать, что неравенство будет удовлетворено при  $n \geq 10$ , поэтому мы выбираем  $n = 10$ .

Оценим еще остаточный член формулы Симпсона (2.29) при  $n = 10$ . Имеем

$$\left| R_n^{(2)} \left( \frac{\sin x}{x} \right) \right| \leq \frac{1}{180 \cdot 10^4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{9} 10^{-6} < 1,2 \cdot 10^{-7}.$$

Таким образом, по формуле Симпсона (2.28) можно получить приближенное значение  $\text{Si}(1)$ , которое будет отличаться от точного не более чем на 1,2 единицы седьмого десятичного

знака. Мы будем вести вычисления с шестью десятичными знаками, и вычисленное значение интеграла будет отличаться от его точного значения лишь за счет ошибок округления.

Таблица 24

$x_k$	$\sin x_k$	$f(x_k) = \frac{\sin x_k}{x_k}$	$10 A_k$	$10 A_k$	$20 A_k$	$30 A_k$
0	0	1	1		1	1
0,1	0,099833	0,998330	1	1	2	4
0,2	0,198669	0,993345	1	1	2	2
0,3	0,295520	0,985067	1	1	2	4
0,4	0,389418	0,973545	1	1	2	2
0,5	0,479426	0,958852	1	1	2	4
0,6	0,564642	0,941070	1	1	2	2
0,7	0,644218	0,920311	1	1	2	4
0,8	0,717356	0,896695	1	1	2	2
0,9	0,783327	0,870363	1	1	2	4
1	0,841471	0,841471		1	1	1
			9,537578	9,379049	18,916627	28,382473
		$\sum A_k f(x_k)$	0,953758	0,937905	0,945831	0,946082

Вычисления по формулам левых и правых прямоугольников, по формуле трапеций и Симпсона приведены в табл. 24. Вычисления по формуле средних прямоугольников приведены в табл. 25. Значение вычисляемого интеграла с шестью знаками таково:

$$Si(1) = 0,946083.$$

Значение, вычисленное по формуле Симпсона, отличается от точного значения на одну единицу шестого десятичного знака. По формуле трапеций получено значение, отличающееся от точного значения на 2,5 единицы четвертого десятичного знака, что весьма близко к найденной выше оценке остаточного члена:  $3 \cdot 10^{-4}$ .

Формулы левых и правых прямоугольников дают малую точность: отличие от точного значения составляет около  $8 \cdot 10^{-3}$ . При этом формула левых прямоугольников дает

## § 2. ПРОСТЕЙШИЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ 173

значение с избытком, а формула правых прямоугольников — с недостатком. Это объясняется тем, что  $\frac{\sin x}{x}$  убывает на  $[0, 1]$ . Хороший результат дает формула средних прямоугольников.

Т а б л и ц а 25

$x_k$	$\sin x_k$	$f(x_k) = \frac{\sin x_k}{x_k}$	$10 A_k$
0,05	0,049979	0,999580	1
0,15	0,149438	0,996253	1
0,25	0,247404	0,989616	1
0,35	0,342898	0,979708	1
0,45	0,434966	0,966591	1
0,55	0,522687	0,950340	1
0,65	0,605186	0,931055	1
0,75	0,681639	0,908852	1
0,85	0,751280	0,883859	1
0,95	0,813416	0,856227	1
			9,462081
		$\sum A_k f(x_k)$	0,946208

Отметим, что в нашем примере вторая производная от подынтегральной функции неположительна на  $[0, 1]$ . Сравнивая выражения остаточных членов формулы средних прямоугольников (2.15) и трапеций (2.27), мы заключаем, что первая из них дает значение  $\text{Si}(1)$  с избытком, вторая — с недостатком. Поэтому мы можем написать неравенство

$$0,945831 \leq \text{Si}(1) \leq 0,946208,$$

из которого заключаем, что каждое из найденных значений отличается от точного значения  $\text{Si}(1)$  не более, чем на 4 единицы четвертого десятичного знака, а их полусумма 0,946020 — не более, чем на 2 единицы четвертого десятичного знака.

### § 3. Вычисление интегралов от периодических функций и квадратурная формула прямоугольников

Пусть речь идет о вычислении интеграла

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx,$$

где  $f(x)$  — периодическая с периодом  $2\pi$  функция. Будем строить квадратурную формулу с  $n$  узлами, принадлежащими промежутку интегрирования

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx \cong \sum_{k=1}^n A_k f(x_k). \quad (3.1)$$

Так как подынтегральная функция  $f(x)$   $2\pi$ -периодическая, то естественно при построении формулы (3.1) приближать функцию  $f(x)$  тригонометрическими (а не алгебраическими) многочленами

$$T_m(x) = a_0 + \sum_{k=1}^m (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \quad (3.2)$$

Будем говорить, что формула (3.1) имеет *тригонометрическую степень точности*, равную  $m$ , если она точна для любого тригонометрического многочлена (3.2) порядка  $m$  и не точна для многочленов порядка  $m+1$ .

Докажем, что формула (3.1) с  $n$  узлами не может быть точной для всех тригонометрических многочленов порядка  $n$ , как бы ни были выбраны узлы  $x_k$  и коэффициенты  $A_k$ .

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \prod_{k=1}^n \sin^2 \frac{x - x_k}{2}, \quad (3.3)$$

где  $x_k$  — узлы формулы (3.1). Каждый из  $n$  множителей представляет собой тригонометрический многочлен первого порядка

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{x - x_k}{2} &= \frac{1}{2} [1 - \cos(x - x_k)] = \\ &= \frac{1}{2} [1 - \cos x_k \cos x - \sin x_k \sin x]. \end{aligned}$$

Известно, что произведение тригонометрических многочленов с вещественными коэффициентами есть тригонометрический многочлен, порядок которого равен сумме порядков перемножаемых многочленов. Отсюда следует, что функция  $f(x)$ , определяемая формулой (3.3), представляет собой тригонометрический многочлен порядка  $n$ . Для этого многочлена формула (3.1) не точна, так как

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = \int_0^{2\pi} \prod_{k=1}^n \sin^2 \frac{x - x_k}{2} dx > 0$$

и в то же время

$$\sum_{k=1}^n A_k f(x_k) = 0.$$

Мы установили, что тригонометрическая степень точности формулы (3.1) не выше  $n - 1$ . Докажем, что если в качестве формулы (3.1) взять большую формулу прямоугольников (2.10), которая в нашем случае запишется в виде

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx \cong \frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\alpha + (k-1) \frac{2\pi}{n}\right), \quad (3.4)$$

где  $\alpha$  — любое число из промежутка  $\left[0, \frac{2\pi}{n}\right]$ , то она будет точна для всех тригонометрических многочленов порядка  $n - 1$ .

Надо доказать, что формула (3.4) точна, когда

$$f(x) = \cos mx, \quad \sin mx$$

при  $m = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ . Достаточно проверить, что она точна, когда

$$f(x) = e^{imx}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n - 1,$$

где  $i = \sqrt{-1}$ . При  $m = 0$   $f(x) = 1$  и формула (3.4), очевидно, точна. Пусть  $0 < m \leq n - 1$ . Имеем

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = \int_0^{2\pi} e^{imx} dx = \frac{1}{im} e^{imx} \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Квадратурная сумма также равна нулю:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f(x_k) &= \sum_{k=1}^n e^{im\left(\alpha + (k-1)\frac{2\pi}{n}\right)} = e^{im\alpha} \sum_{k=1}^n e^{im(k-1)\frac{2\pi}{n}} = \\ &= e^{im\alpha} \frac{e^{im\frac{2\pi}{n} \cdot n} - 1}{e^{im\frac{2\pi}{n}} - 1} = 0, \end{aligned}$$

так как числитель дроби равен нулю, а знаменатель отличен от нуля.

Таким образом, мы установили, что тригонометрическая степень точности квадратурной формулы (3.4) равна  $n - 1$ .

Нетрудно видеть, что квадратурная формула

$$\int_0^T f(x) dx \cong \frac{T}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\alpha + (k-1)\frac{T}{n}\right), \quad * \quad (3.5)$$

где  $\alpha$  — любое число из промежутка  $\left[0, \frac{T}{n}\right]$ , обращается в точное равенство, когда  $f(x)$  есть любой тригонометрический многочлен порядка  $n - 1$ :

$$T_{n-1}(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \left( a_k \cos \frac{2\pi}{T} kx + b_k \sin \frac{2\pi}{T} kx \right).$$

**Пример.** Вычислить интеграл

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - 0,5 \sin^2 \varphi}}.$$

Подынтегральная функция четная и  $\pi$ -периодическая, поэтому

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - 0,5 \sin^2 \varphi}}$$

\*) Если  $f(x)$  есть  $T$ -периодическая функция, то интеграл в (3.5) можно заменить интегралом по любому промежутку длины  $T$ .

и мы можем воспользоваться формулой (3.5) для  $T = \pi$ . Возьмем  $n = 6$  и расположим узлы симметрично относительно точки  $\varphi = 0$ :

$$\varphi_{\pm 1} = \pm \frac{\pi}{12}, \quad \varphi_{\pm 2} = \pm \frac{\pi}{4}, \quad \varphi_{\pm 3} = \pm \frac{5}{12} \pi.$$

Очевидно, имеем

$$2I \cong \frac{\pi}{3} \sum_{k=1}^3 f(\varphi_k).$$

Вычисления будем вести на шесть десятичных знаков. Здесь удобно пользоваться таблицей  $\sin \varphi$ , у которой аргумент дается в градусах. Вычисления приведены в табл. 26. Мы получили  $I = 1,854007$ . Значение интеграла  $I$  с шестью верными десятичными знаками равно 1,854075, так что ошибка составляет 7 единиц пятого десятичного знака.

Таблица 26

$\varphi_k$	$\sin \varphi_k$	$\sin^2 \varphi_k$	$0,5 \sin^2 \varphi_k$	$1 - 0,5 \sin^2 \varphi_k$	$\frac{1}{(1 - 0,5 \sin^2 \varphi_k)^2}$	$f(\varphi_k) = \frac{1}{1 - 0,5 \sin^2 \varphi_k}$
15°	0,258819	0,066987	0,033494	0,966506	0,983110	1,017180
45°	0,707107	0,5	0,25	0,75	0,866025	1,154701
75°	0,965926	0,933013	0,466506	0,533494	0,730407	1,369010
						<u>3,540891</u>
						1,854007

## § 4. Квадратурные формулы типа Гаусса

В § 1 было установлено, что интерполяционная квадратурная формула

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \cong \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \quad (4.1)$$

точна, если  $f(x)$  — многочлен степени не выше  $n - 1$ . Это верно для любого выбора узлов на  $[a, b]$ . Для упрощения записи в последующем изложении, как и в (4.1), мы не будем отмечать в обозначениях зависимость узлов и коэффициентов квадратурной формулы от  $n$ .

Гаусс рассмотрел следующую задачу в случае конечного промежутка  $[a, b]$  и  $p(x) = 1$ : выбрать узлы  $x_1, x_2, \dots, x_n$  таким образом, чтобы квадратурная формула (4.1) была точна для всех многочленов возможно более высокой степени. Так как можно распорядиться выбором  $n$  параметров (узлов), то естественно ожидать повышения степени точности формулы (4.1) на  $n$  единиц. Гаусс доказал, что действительно можно так подобрать узлы  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , что формула (4.1) будет точна, если  $f(x)$  — многочлен степени не выше  $2n - 1$ . Позже результат Гаусса был обобщен на случай любого промежутка и весовой функции  $p(x)$ , удовлетворяющей сформулированным ниже условиям.

Перейдем к изложению этих общих результатов. Будем предполагать, что  $p(x) \geq 0$  на  $[a, b]$  и интегрируема, при этом

$$\int_a^b p(x) dx > 0. \quad *) \quad (4.2)$$

Предполагаем существование моментов функции  $p(x)$

$$\mu_k = \int_a^b p(x) x^k dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.3)$$

В последующем изложении, если не оговорено противное, будем предполагать, что весовая функция  $p(x)$  удовлетворяет перечисленным выше условиям.

Будем говорить, что функции  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  ортогональны с весом  $p(x)$  на промежутке  $[a, b]$ , если

$$\int_a^b p(x) \varphi(x) \psi(x) dx = 0.$$

---

\*) Для приложений, которые мы будем рассматривать, достаточно было бы сделать менее общее предположение:  $p(x)$  неотрицательна и интегрируема на  $[a, b]$ , причем равенство  $p(x) = 0$  может иметь место лишь в конечном числе точек,

В частности, если  $p(x) \equiv 1$ , то будем говорить просто, что  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  ортогональны на  $[a, b]$ .

**Теорема 1.** Для того чтобы квадратурная формула (4.1) была точна для любого многочлена степени  $2n-1$ , необходимо и достаточно, чтобы она была интерполяционной и ее узлы  $x_1, x_2, \dots, x_n$  были корнями многочлена степени  $n$

$$\omega(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n), \quad (4.4)$$

ортогонального с весом  $p(x)$  к любому многочлену  $Q(x)$  степени меньшей  $n$ :

$$\int_a^b p(x) \omega(x) Q(x) dx = 0. \quad (4.5)$$

**Доказательство.** Необходимость. Пусть формула (4.1) точна для всех многочленов степени  $2n-1$ . Отсюда, в силу теоремы из § 1, вытекает, что формула (4.1) интерполяционная. Возьмем любой многочлен  $Q(x)$  степени меньшей  $n$ . Положим

$$f(x) = \omega(x) Q(x),$$

где  $\omega(x)$  — многочлен степени  $n$ , определяемый формулой (4.4). Очевидно, многочлен  $f(x)$  имеет степень, меньшую или равную  $2n-1$ , поэтому для него формула (4.1) точна:

$$\int_a^b p(x) \omega(x) Q(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k \omega(x_k) Q(x_k) = 0.$$

Необходимость условия (4.5) доказана.

**Достаточность.** Предположим, что формула (4.1) интерполяционная и многочлен  $\omega(x)$  ортогонален с весом  $p(x)$  к любому многочлену степени меньшей  $n$ . Надо доказать, что если  $f(x)$  — любой многочлен степени меньшей или равной  $2n-1$ , то для него формула (4.1) точна. Выполнив деление  $f(x)$  на  $\omega(x)$ , получим

$$f(x) = \omega(x) Q(x) + r(x), \quad (4.6)$$

где степень  $Q(x)$  и  $r(x)$  меньше  $n$ .

Умножим обе части равенства (4.6) на  $p(x)$  и проинтегрируем от  $a$  до  $b$ :

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = \int_a^b p(x) \omega(x) Q(x) dx + \int_a^b p(x) r(x) dx.$$

Первый интеграл в правой части равен нулю в силу предположения, а второй интеграл в точности равен квадратурной суммой, так как степень  $r(x)$  меньше  $n$  и формула (4.1) интерполяционная.

Таким образом, получаем

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k r(x_k),$$

но, в силу (4.6),  $r(x_k) = f(x_k)$ , и мы окончательно получаем

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k).$$

А это и означает, что для  $f(x)$  формула (4.1) точна.

Вопрос о существовании формулы (4.1), точной для всех многочленов степени  $2n-1$  или, как принято говорить, *формулы типа Гаусса*, теорема сводит к вопросу о существовании многочлена  $\omega(x)$  степени  $n$ , ортогонального ко всем многочленам степени  $n-1$  и такого, что его корни вещественны, различны и лежат на промежутке  $[a, b]$ .

При сделанных выше предположениях относительно весовой функции  $p(x)$  требуемый многочлен  $\omega(x)$  существует и его корни обладают нужными свойствами. Приведем доказательства этих фактов.

Составим определитель

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_j \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{j+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mu_j & \mu_{j+1} & \cdots & \mu_{2j} \end{vmatrix},$$

где  $\mu_k$  определены формулами (4.3), и докажем, что  $\Delta_j \neq 0$  при  $j = 0, 1, 2, \dots$



имеет степень  $n$  (так как определитель  $\Delta_{n-1} \neq 0$ ) и ортогонален с весом  $p(x)$  к любому многочлену степени  $n-1$ . В самом деле,

$$\int_a^b p(x) \omega(x) x^k dx = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_{n-1} & \mu_k \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_n & \mu_{k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \dots & \mu_{2n-2} & \mu_{k+n-1} \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \dots & \mu_{2n-1} & \mu_{k+n} \end{vmatrix} = 0$$

при  $k=0, 1, 2, \dots, n-1$ , что равносильно ортогональности  $\omega(x)$  с весом  $p(x)$  к любому многочлену степени  $n-1$ . Отметим, что многочлен (4.7) имеет при  $x^n$  коэффициент, равный единице, так что обозначение его через  $\omega(x)$  оправдано.

Докажем теперь, что корни  $\omega(x)$  вещественны, различны и лежат внутри промежутка  $(a, b)$ .

Прежде всего, внутри  $(a, b)$  имеются корни нечетной кратности  $\omega(x)$ , так как

$$\int_a^b p(x) \omega(x) \cdot 1 dx = 0$$

в силу ортогональности  $\omega(x)$  с весом  $p(x)$  к 1. Пусть  $m$  — число корней  $\omega(x)$  нечетной кратности, расположенных внутри  $(a, b)$ . Обозначим их  $x'_1, x'_2, \dots, x'_m$ . Составим вспомогательный многочлен

$$Q(x) = (x - x'_1)(x - x'_2) \dots (x - x'_m).$$

Произведение  $\omega(x)Q(x)$  есть многочлен, у которого на  $(a, b)$  все корни четной кратности, и значит он на  $[a, b]$  сохраняет знак. Но тогда

$$\int_a^b p(x) \omega(x) Q(x) dx \neq 0 \quad (4.8)$$

в силу  $p(x) \geq 0$  и (4.2). Так как  $\omega(x)$  ортогонален ко всем многочленам степени  $n-1$ , то из (4.8) следует, что степень  $Q(x)$  равна  $n$  или, что то же самое,  $m = n$ . Утверждение доказано.

Итак, при сделанных предположениях о весовой функции  $p(x)$  формула типа Гаусса всегда существует. Убедимся, что при заданном  $n$  такая формула единственна. Для этого докажем, что многочлен  $\omega(x)$ , удовлетворяющий условию (4.5), единственен. Если бы таких многочленов было два:  $\omega(x)$  и  $\omega^*(x)$ , то их разность

$$Q(x) = \omega(x) - \omega^*(x)$$

(считаем, что коэффициент при  $x^n$  у  $\omega(x)$  и  $\omega^*(x)$  равен 1) была бы многочленом степени не выше  $n-1$ , и по свойству (4.5) мы получили бы

$$\int_a^b p(x) [\omega(x) - \omega^*(x)] Q(x) dx = \int_a^b p(x) Q^2(x) dx = 0,$$

что возможно лишь при

$$Q(x) = \omega(x) - \omega^*(x) \equiv 0.$$

Покажем теперь, что ни при каком выборе узлов и коэффициентов квадратурная формула вида (4.1) не может быть точной для многочленов степени  $2n$ . Обозначим через  $x_1, x_2, \dots, x_n$  узлы квадратурной формулы и рассмотрим многочлен степени  $2n$

$$f(x) = \omega^2(x) = (x - x_1)^2 (x - x_2)^2 \dots (x - x_n)^2.$$

Очевидно, что для него формула (4.1) не точна, так как

$$\int_a^b p(x) \omega^2(x) dx > 0,$$

а квадратурная сумма

$$\sum_{k=1}^n A_k \omega^2(x_k) = 0$$

при любом выборе коэффициентов  $A_k$ .

Таким образом, *алгебраическая степень точности формул типа Гаусса равна  $2n-1$* . Квадратурные формулы типа Гаусса называют также квадратурными формулами *наивысшей алгебраической степени точности*, ибо, как мы доказали, никакая квадратурная формула вида

(4.1) не может иметь алгебраическую степень точности большую, чем  $2n - 1$  (при сделанных предположениях о весовой функции  $p(x)$ ).

Отметим еще весьма важное свойство квадратурных формул типа Гаусса: *коэффициенты  $A_k$  таких формул положительны.*

Действительно, возьмем многочлен степени  $2n - 2$

$$f(x) = \left[ \frac{\omega(x)}{x - x_k} \right]^2,$$

для которого, очевидно, имеем

$$f(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{при } j \neq k, \\ [\omega'(x_k)]^2 & \text{при } j = k \end{cases}$$

Для этого многочлена формула типа Гаусса точна:

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = A_k [\omega'(x_k)]^2.$$

Из этого равенства видно, что  $A_k > 0$ , так как

$$\int_a^b p(x) f(x) dx > 0$$

в силу предположений о  $p(x)$  и определения  $f(x)$ .

Докажем теорему о представлении остаточного члена формулы типа Гаусса.

**Теорема 2.** *Если функция  $f(x)$  на промежутке  $[a, b]$  имеет непрерывную производную порядка  $2n$ , то существует такая точка  $\xi \in [a, b]$ , что остаточный член квадратурной формулы типа Гаусса с  $n$  узлами  $x_1, x_2, \dots, x_n$  имеет вид*

$$R_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_a^b p(x) \omega^2(x) dx, \quad (4.9)$$

где

$$\omega(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n).$$

**Доказательство.** Построим интерполяционный многочлен Эрмита  $P(x)$  по условиям

$$P(x_i) = f(x_i), \quad P'(x_i) = f'(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.10)$$

По формуле (10.24) гл. II, дающей представление остаточного члена интерполирования Эрмита, имеем

$$f(x) = P(x) + \frac{\omega^2(x)}{(2n)!} f^{(2n)}(\eta), \quad (4.11)$$

где  $\eta$  зависит от  $x$  и находится в промежутке, содержащем  $x$  и узлы интерполирования  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Мы считаем, что  $x$  не выходит за пределы промежутка  $[a, b]$ , поэтому  $\eta \in (a, b)$ .

Умножим обе части (4.11) на  $p(x)$  и проинтегрируем по  $x$  от  $a$  до  $b$ :

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = \int_a^b p(x) P(x) dx + \frac{1}{(2n)!} \int_a^b p(x) f^{(2n)}(\eta) \omega^2(x) dx. \quad (4.12)$$

Мы предполагаем, конечно, что интеграл в левой части существует. Но многочлен  $P(x)$  имеет степень не выше  $2n-1$ , поэтому первый интеграл в правой части (4.12) можно заменить квадратурной суммой

$$\sum_{k=1}^n A_k P(x_k).$$

В квадратурной сумме  $P(x_k)$  в силу (4.10) можно заменить на  $f(x_k)$ , так что (4.12) перепишется в виде

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + \frac{1}{(2n)!} \int_a^b p(x) f^{(2n)}(\eta) \omega^2(x) dx.$$

Отсюда видно, что интеграл в правой части представляет собой остаток квадратурной формулы

$$R_n(f) = \frac{1}{(2n)!} \int_a^b p(x) f^{(2n)}(\eta) \omega^2(x) dx.$$

Так как  $p(x)\omega^2(x) \geq 0$ , то можно воспользоваться обобщенной теоремой о среднем, и мы получим формулу (4.9).

Докажем теорему о сходимости квадратурных формул типа Гаусса.

**Теорема 3.** Если промежуток интегрирования  $[a, b]$  конечен и  $f(x)$  непрерывна на нем, то имеет место сходимость квадратурных сумм формулы типа Гаусса к интегралу при  $n \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) = \int_a^b p(x) f(x) dx. \quad (4.13)$$

Доказательство. Надо доказать, что

$$R_n(f) = \int_a^b p(x) f(x) dx - \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) \rightarrow 0$$

при  $n \rightarrow \infty$ . Пусть  $\varepsilon > 0$ . Так как  $[a, b]$  конечен и  $f(x)$  непрерывна на нем, то по теореме Вейерштрасса найдется многочлен  $P(x)$  такой, что

$$|f(x) - P(x)| \leq \varepsilon \quad (4.14)$$

при всех  $x \in [a, b]$ . Имеем

$$\begin{aligned} R_n(f) &= \int_a^b p(x) (f(x) - P(x)) dx + \\ &+ \left[ \int_a^b p(x) P(x) dx - \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} P(x_k^{(n)}) \right] + \\ &+ \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} (P(x_k^{(n)}) - f(x_k^{(n)})). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Выражение в квадратных скобках представляет собой  $R_n(P)$  — остаток квадратурной формулы для многочлена  $P(x)$ . Если обозначить через  $N$  степень этого многочлена, то при  $2n-1 > N$  имеет место равенство  $R_n(P) = 0$ . Два оставшиеся

выражения в правой части (4.15) легко оценить на основании неравенства (4.14):

$$\left| \int_a^b p(x)(f(x) - P(x)) dx \right| \leq \varepsilon \int_a^b p(x) dx,$$

$$\left| \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} (P(x_k^{(n)}) - f(x_k^{(n)})) \right| \leq \varepsilon \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} = \varepsilon \int_a^b p(x) dx.$$

Итак, при  $2n - 1 > N$

$$|R_n(f)| \leq 2\varepsilon \int_a^b p(x) dx.$$

Теорема доказана.

Рассмотрим последовательность квадратурных формул общего вида (не обязательно типа Гаусса)

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \cong \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}). \quad (4.16)$$

Промежуток  $[a, b]$  считаем конечным, а вес  $p(x)$  — любой интегрируемой на  $[a, b]$  функцией. Приведем без доказательства теорему о сходимости квадратурных формул (4.16).

**Теорема 4.** *Для того чтобы*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) = \int_a^b p(x) f(x) dx \quad (4.17)$$

*для любой непрерывной на  $[a, b]$  функции  $f(x)$ , необходимо и достаточно выполнение двух условий:*

- 1) *предельное соотношение (4.17) имеет место, когда  $f(x)$  является любым многочленом;*
- 2) *имеется такое число  $K$ , что*

$$\sum_{k=1}^n |A_k^{(n)}| \leq K, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Если квадратурные формулы (4.16) интерполяционные и имеют положительные коэффициенты ( $A_k^{(n)} > 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ ), то условия теоремы выполнены. Таким образом, теорема 3 является частным случаем теоремы 4.

### § 5. Многочлены Лежандра и формула Гаусса

Квадратурная формула Гаусса представляет собой частный случай формул типа Гаусса, когда весовая функция  $p(x) \equiv 1$  и промежуток интегрирования  $[a, b]$  конечен. Предположение о конечности  $[a, b]$  обеспечивает существование моментов функции  $p(x) = 1$ . Будем считать, что промежутком интегрирования является  $[-1, 1]$ .

Квадратурная формула Гаусса

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \cong \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \quad (5.1)$$

имеет своими узлами  $x_k$  корни многочлена (4.7)  $\omega(x)$  степени  $n$ , ортогонального ко всем многочленам степени меньшей  $n$ . Многочлены, обладающие указанным свойством, называются *многочленами Лежандра*. Конечно, только условиями ортогональности многочлен Лежандра определяется с точностью до постоянного множителя. Для последующего представление (4.7) мало пригодно. Будем пользоваться представлением многочлена Лежандра по *формуле Родрига*

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}. \quad (5.2)$$

Покажем, что многочлен  $P_n(x)$  действительно обладает свойством ортогональности на промежутке  $[-1, 1]$ . Введем обозначение

$$\varphi(x) = (x^2 - 1)^n. \quad (5.3)$$

Очевидно, имеем

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \varphi^{(n)}(x), \quad \varphi^{(k)}(\pm 1) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (5.4)$$

Пусть  $Q(x)$  — любая  $n$  раз непрерывно дифференцируемая функция на  $[-1, 1]$ . Интегрируя по частям и учитывая

соотношение (5.4), получим

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_n(x) Q(x) dx &= \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^1 Q(x) \varphi^{(n)}(x) dx = \\ &= \frac{1}{2^n n!} [Q(x) \varphi^{(n-1)}(x)]_{-1}^1 - \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^1 Q'(x) \varphi^{(n-1)}(x) dx = \\ &= -\frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^1 Q'(x) \varphi^{(n-1)}(x) dx = \dots \\ &\dots = (-1)^n \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^1 Q^{(n)}(x) \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем равенство

$$\int_{-1}^1 P_n(x) Q(x) dx = (-1)^n \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^1 Q^{(n)}(x) \varphi(x) dx. \quad (5.5)$$

Если  $Q(x)$  — любой многочлен степени меньше  $n$ , то  $Q^{(n)}(x) \equiv 0$ , и из (5.5) мы получаем

$$\int_{-1}^1 P_n(x) Q(x) dx = 0.$$

Многочлен  $P_n(x)$  отличается от многочлена  $\omega(x)$ , определяемого формулой (4.7), постоянным множителем, который легко указать. Из формулы (5.2) получаем

$$P_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} x^n - \dots \quad (5.6)$$

Таким образом,

$$\omega(x) = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!} P_n(x). \quad (5.7)$$

Вычислим еще интеграл от квадрата многочлена  $P_n(x)$ . Положим в формуле (5.5)  $Q(x) = P_n(x)$ , при этом примем

во внимание, что в силу (5.6)

$$Q^{(n)}(x) = P_n^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}.$$

Получим

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx &= (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx = \\ &= 2 \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \int_0^1 (1 - x^2)^n dx, \end{aligned} \quad (5.8)$$

и остается вычислить интеграл

$$I_n = \int_0^1 (1 - x^2)^n dx.$$

Полагая  $x = \sin \varphi$ , получим

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} \varphi d\varphi = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Из (5.8) находим

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}. \quad (5.9)$$

По формуле Лейбница для производной от произведения двух функций находим

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x+1)^n (x-1)^n] = \\ &= \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^n C_n^{(k)} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} (x+1)^n \cdot \frac{d^k}{dx^k} (x-1)^n = \\ &= \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^n C_n^{(k)} \frac{n!}{k!} (x+1)^k \frac{n!}{(n-k)!} (x-1)^{n-k} = \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n [C_n^{(k)}]^2 (x+1)^k (x-1)^{n-k}. \end{aligned}$$

В частности, при  $x = 1$  и  $-1$  получим

$$P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n. \quad (5.10)$$

Перейдем к вопросу об определении узлов и коэффициентов формулы Гаусса. Чтобы найти узлы формулы, нужно найти все корни алгебраического уравнения

$$P_n(x) = 0.$$

После того как определены узлы, коэффициенты можно находить по формуле (1.5)

$$A_k = \int_{-1}^1 \frac{P_n(x) dx}{(x - x_k) P'_n(x_k)}. \quad (5.11)$$

Отметим, что в формуле (1.5) фигурирует многочлен  $\omega(x)$  с коэффициентом при  $x^n$ , равным единице. Но из вида формулы (1.5) ясно, что она будет справедлива, если для  $\omega(x)$  это условие не выполнено.

Формула (5.11) неудобна для вычислений, и мы укажем более простую формулу. Рассмотрим интеграл

$$S_k = \int_{-1}^1 \frac{P_n(x)}{x - x_k} P'_n(x) dx. \quad (5.12)$$

Так как подынтегральная функция представляет собой многочлен степени  $2n - 2$ , то по формуле Гаусса

$$S_k = A_k [P'_n(x_k)]^2. \quad (5.13)$$

С другой стороны, применяя к интегралу (5.12) формулу интегрирования по частям и обозначая

$$U = \frac{P_n(x)}{x - x_k}, \quad dV = P'_n(x) dx,$$

получим

$$S_k = \frac{P_n^2(x)}{x - x_k} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 P_n(x) U'(x) dx.$$

Интеграл в правой части равен нулю ввиду ортогональности. Первое слагаемое в правой части легко подсчитать, если принять во внимание (5.10):

$$S_k = \frac{P_n^2(x)}{x-x_k} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{1-x_k} + \frac{1}{1+x_k} = \frac{2}{1-x_k^2}.$$

Сравнивая это выражение для  $S_k$  с выражением (5.13), получим

$$A_k = \frac{2}{(1-x_k^2)[P_n'(x_k)]^2}. \quad (5.14)$$

Это и есть та формула, которую мы хотели получить. При вычислении  $A_k$  по формуле (5.14) не нужно вычислять интегралы. Отметим, что из (5.14) еще раз вытекает положительность коэффициентов формулы Гаусса.

Укажем представление остаточного члена формулы Гаусса. Предположим, что функция  $f(x)$  на промежутке  $[-1, 1]$  имеет непрерывную производную порядка  $2n$ . Тогда на основании общего представления остаточного члена формулы типа Гаусса (4.9) получим

$$R_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_{-1}^1 \omega^2(x) dx.$$

Пользуясь формулами (5.7) и (5.9), найдем

$$\begin{aligned} R_n(f) &= \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_{-1}^1 \frac{2^{2n}(n!)^4}{[(2n)!]^2} P_n^2(x) dx = \\ &= \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \frac{2^{2n}(n!)^4}{[(2n)!]^2} \frac{2}{2n+1}. \end{aligned}$$

Мы получили представление остаточного члена квадратурной формулы Гаусса (5.1)

$$R_n(f) = \frac{2^{2n+1}}{2n+1} \frac{(n!)^4}{[(2n)!]^2} f^{(2n)}(\xi), \quad -1 \leq \xi \leq 1. \quad (5.15)$$

Приведем узлы и коэффициенты формулы Гаусса для  $n = 1(1)8$ :

	$n = 1$	
$x_1 = 0$		$A_1 = 2$
	$n = 2$	
$-x_1 = x_2 = 0,5773502692$		$A_1 = A_2 = 1$
	$n = 3$	
$-x_1 = x_3 = 0,7745966692$ $x_2 = 0$		$A_1 = A_3 = 0,5555555556$ $A_2 = 0,8888888889$
	$n = 4$	
$-x_1 = x_4 = 0,8611363116$		$A_1 = A_4 = 0,3478548451$
$-x_2 = x_3 = 0,3399810436$		$A_1 = A_3 = 0,6521451549$
	$n = 5$	
$-x_1 = x_5 = 0,9061798459$		$A_1 = A_5 = 0,2369268851$
$-x_2 = x_4 = 0,5384693101$ $x_3 = 0$		$A_2 = A_4 = 0,4786286705$ $A_3 = 0,5688888889$
	$n = 6$	
$-x_1 = x_6 = 0,9324695142$		$A_1 = A_6 = 0,1713244924$
$-x_2 = x_5 = 0,6612093865$		$A_2 = A_5 = 0,3607615730$
$-x_3 = x_4 = 0,2386191861$		$A_3 = A_4 = 0,4679139346$
	$n = 7$	
$-x_1 = x_7 = 0,9491079123$		$A_1 = A_7 = 0,1294849662$
$-x_2 = x_6 = 0,7415311856$		$A_2 = A_6 = 0,2797053915$
$-x_3 = x_5 = 0,4058451514$ $x_4 = 0$		$A_3 = A_5 = 0,3818300505$ $A_4 = 0,4179591837$
	$n = 8$	
$-x_1 = x_8 = 0,9602898565$		$A_1 = A_8 = 0,1012285363$
$-x_2 = x_7 = 0,7966664774$		$A_2 = A_7 = 0,2223810345$
$-x_3 = x_6 = 0,5255324099$		$A_3 = A_6 = 0,3137066459$
$-x_4 = x_5 = 0,1834346425$		$A_4 = A_5 = 0,3626837834$

В книге В. И. Крылова [14] приведены значения узлов и коэффициентов квадратурной формулы Гаусса (5.1) с пятнадцатью десятичными знаками для  $n = 1(1)16$ .

Запишем квадратурную формулу Гаусса для интеграла по произвольному промежутку  $[a, b]$

$$\int_a^b f(t) dt.$$

$x_k$	$t_k = \frac{1}{2}(x_k + 1)$	$t_k^2$	$3t_k^2 + 4$
-0,861136	0,069432	0,004821	4,014463
-0,339981	0,330009	0,108906	4,326718
0,339981	0,669991	0,448888	5,346664
0,861136	0,930568	0,865957	6,597871

Сделаем в интеграле замену переменной интегрирования

$$t = \frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}.$$

Получим

$$\int_a^b f(t) dt = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}\right) dx.$$

Применяя к интегралу в правой части формулу (5.1), получим

$$\int_a^b f(t) dt \cong \frac{b-a}{2} \sum_{k=1}^n A_k f(t_k), \quad (5.16)$$

где

$$t_k = \frac{b-a}{2}x_k + \frac{a+b}{2},$$

$x_k$  — узлы квадратурной формулы Гаусса для промежутка  $[-1, 1]$  и  $A_k$  — соответствующие им коэффициенты. Формулой (5.16) следует пользоваться при вычислениях, при этом узлы  $x_k$  и коэффициенты  $A_k$  для промежутка  $[-1, 1]$  следует брать из приведенной выше таблицы.

**Пример.** Вычислить интеграл

$$I = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(t^2 + 1)(3t^2 + 4)}}.$$

Воспользуемся формулой (5.16) при  $n = 4$ . Вычисления приведены в табл. 27. Квадратурную сумму

$$\sum_{k=1}^4 A_k f(t_k)$$

Таблица 27

$(t_k^2 + 1)(3t_k^2 + 4)$	$\sqrt{(t_k^2 + 1)(3t_k^2 + 4)}$	$f(t_k)$	$A_k$
4,033817	2,008437	0,497897	0,347855
4,797924	2,190417	0,456534	0,652145
7,746717	2,783293	0,359287	0,652145
12,311337	3,508752	0,285002	0,347855

вычисляем накоплением. Получим

$$I = 0,402184.$$

Рассматриваемый интеграл представляет собой эллиптический интеграл первого рода

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - 0,25 \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{2} F\left(0,5; \frac{\pi}{4}\right).$$

Его табличное значение равно 0,402183.

### § 6. Другие частные случаи квадратурных формул типа Гаусса

Рассмотрим квадратурную формулу типа Гаусса, предназначенную для вычисления интеграла по конечному промежутку, который мы можем считать совпадающим с  $[-1, 1]$ , с весовой функцией

$$p(x) = (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta. \quad (6.1)$$

Здесь  $\alpha$  и  $\beta$  — любые вещественные числа, удовлетворяющие условиям

$$\alpha > -1, \quad \beta > -1.$$

Эти неравенства обеспечивают существование интеграла от  $p(x)$  по промежутку  $[-1, 1]$ . Очевидно, выполнены и все другие условия, которым должна удовлетворять функция  $p(x)$ .

Квадратурная формула имеет вид

$$\int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta f(x) dx \cong \sum_{k=1}^n A_k f(x_k). \quad (6.2)$$

Узлы  $x_k$  являются корнями многочлена степени  $n$ , ортогонального с весом (6.1) ко всем многочленам степени  $n-1$ . Такой многочлен называется *многочленом Якоби*. Мы не будем останавливаться на изучении свойств многочленов Якоби и приведем без доказательства основные формулы.

Имеет место представление, аналогичное формуле Родрига для многочленов Лежандра:

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \times \\ \times \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}]. \quad (6.3)$$

Для коэффициентов формулы (6.2) справедливо представление

$$A_k = 2^{\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(\alpha+n+1) \Gamma(\beta+n+1)}{n! \Gamma(\alpha+\beta+n+1)} \cdot \frac{1}{(1-x_k^2) [P_n^{(\alpha, \beta)}(x_k)]^2}. \quad (6.4)$$

Здесь функция  $\Gamma(z)$  определяется интегралом Эйлера второго рода

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt,$$

где  $z > 0$ .

Запишем еще выражение остаточного члена формулы (6.2)

$$R_n(f) = \frac{2^{\alpha+\beta+2n+1}}{\alpha+\beta+2n+1} \times \\ \times \frac{\Gamma(\alpha+n+1) \Gamma(\beta+n+1) \Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma^2(\alpha+\beta+2n+1)} \cdot \frac{n!}{(2n)!} f^{(2n)}(\xi). \quad (6.5)$$

При  $\alpha = \beta = 0$  многочлены Якоби совпадают с многочленами Лежандра, при этом формулы (6.2), (6.3), (6.4), (6.5) переходят соответственно в формулы (5.1), (5.2), (5.14), (5.15).

Остановимся на частном случае формулы (6.2), когда  $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ . В этом случае весовая функция (6.1) переходит в функцию

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (6.6)$$

Известно, что ортогональными многочленами с весом (6.6) на  $[-1, 1]$  являются *многочлены Чебышева*

$$T_n(x) = \cos n \operatorname{arccos} x. \quad (6.7)$$

Это утверждение нетрудно проверить. Вычислим интеграл

$$I = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} x^m \cos n \operatorname{arccos} x \, dx.$$

Сделаем замену переменной интегрирования  $x = \cos \theta$ . Получим

$$I = \int_0^\pi \cos^m \theta \cos n\theta \, d\theta = 0$$

при  $m < n$ , поскольку, как можно показать,

$$\cos^m \theta = \sum_{k=0}^m \alpha_k \cos k\theta$$

и

$$\int_0^\pi \cos k\theta \cdot \cos n\theta \, d\theta = 0$$

при  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ .

Таким образом, узлами квадратурной формулы наивысшей степени точности с весом (6.6) являются корни многочлена Чебышева (6.7):

$$x_{n+1-k} = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (6.8)$$

Коэффициенты формулы можно записать в виде

$$A_k = \frac{1}{T'_n(x_k)} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{T_n(x)}{x-x_k} \, dx.$$

Вычислим этот интеграл. Произведем замену переменной интегрирования  $x = \cos \theta$ :

$$A_k = \frac{1}{T'_n(x_k)} \int_0^\pi \frac{\cos n\theta}{\cos \theta - x_k} d\theta.$$

Ввиду четности подынтегральной функции

$$A_k = \frac{1}{2T'_n(x_k)} \int_{-\pi}^\pi \frac{\cos n\theta}{\cos \theta - x_k} d\theta. \quad (6.9)$$

В § 3 было доказано, что квадратурная формула прямоугольников с  $n$  узлами дает точное значение интеграла по промежутку длины  $2\pi$  от тригонометрического многочлена порядка  $n - 1$ . Под знаком интеграла (6.9) стоит тригонометрический многочлен порядка  $n - 1$ , так как

$$\frac{T_n(x)}{x - x_k}$$

есть многочлен степени  $n - 1$  относительно  $x$ . Следовательно, если для вычисления интеграла (6.9) применить формулу прямоугольников, взяв  $2n$  узлов

$$\theta_j = \frac{2j-1}{2n} \pi, \quad j = -n+1, -n+2, \dots, 0, 1, 2, \dots, n,$$

то мы получим точное значение  $A_k$ .

Значение подынтегральной функции

$$f(\theta) = \frac{\cos n\theta}{\cos \theta - x_k} \quad (6.10)$$

при  $\theta = \theta_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , или, что то же самое, значение

$$\frac{T_n(x_j)}{x_j - x_k}$$

равно нулю при  $j \neq k$  и равно  $T'_n(x_k)$  при  $j = k$ . Так как подынтегральная функция (6.10) четная и  $\theta_{-j+1} = -\theta_j$ , то  $f(\theta_{-j+1}) = f(\theta_j)$  при  $j = 1, 2, \dots, n$ . Таким образом, получаем

$$A_k = \frac{1}{2T'_n(x_k)} \frac{2\pi}{2n} [T'_n(x_k) + T'_n(x_k)] = \frac{\pi}{n}.$$

Таким образом, квадратурная формула наивысшей алгебраической степени точности с весом (6.6) имеет вид

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) dx \cong \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k), \quad (6.11)$$

где узлы  $x_k$  определяются формулой (6.8). Квадратурная формула (6.11) называется *формулой Меллера*.

Укажем остаточный член формулы (6.11). Положим в соотношении

$$\cos(j+1)\theta = 2\cos\theta \cdot \cos j\theta - \cos(j-1)\theta$$

$\theta = \arccos x$ . Получим рекуррентное соотношение для многочленов Чебышева

$$T_{j+1}(x) = 2xT_j(x) - T_{j-1}(x). \quad (6.12)$$

Зная  $T_0(x) = 1$  и  $T_1(x) = x$ , мы последовательно можем находить многочлены Чебышева. Из соотношения (6.12) вытекает, что коэффициент при  $x^n$  у многочлена  $T_n(x)$  равен  $2^{n-1}$  при  $n = 1, 2, \dots$

$$T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \alpha x^{n-1} + \dots$$

На основании общей формулы (4.9) для остаточного члена формулы типа Гаусса имеем

$$R_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{2^{2n-2}} T_n^2(x) dx.$$

Нетрудно проверить, что

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_n^2(x) dx = \frac{\pi}{2},$$

и мы получаем представление остаточного члена формулы (6.11)

$$R_n(f) = \frac{\pi}{(2n)! 2^{2n-1}} f^{(2n)}(\xi), \quad -1 \leq \xi \leq 1. \quad (6.13)$$

Предполагаем, конечно, что существует непрерывная  $f^{(2n)}(x)$  на  $[-1, 1]$ .

Функция

$$p(x) = e^{-x^2} \quad (6.14)$$

на промежутке  $(-\infty, +\infty)$  удовлетворяет всем условиям, которые накладывались на весовую функцию  $p(x)$  при построении общей квадратурной формулы типа Гаусса в § 4. Поэтому можно построить квадратурную формулу

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) dx \cong \sum_{k=1}^n A_k f(x_k), \quad (6.15)$$

точную, когда  $f(x)$  — любой многочлен степени  $2n-1$ . Узлами квадратурной формулы являются корни многочлена степени  $n$ , ортогонального с весом  $e^{-x^2}$  на промежутке  $(-\infty, +\infty)$  ко всем многочленам степени  $n-1$ . Такие многочлены называются ортогональными *многочленами Чебышева — Эрмита*.

Имеет место представление для многочлена Чебышева — Эрмита

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}. \quad (6.16)$$

Коэффициенты квадратурной формулы (6.15) определяются формулой

$$A_k = \frac{2^{n+1} n! \sqrt{\pi}}{[H'_n(x_k)]^2}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (6.17)$$

Остаточный член формулы (6.15)

$$R_n(f) = \frac{n! \sqrt{\pi}}{2^n (2n)!} f^{(2n)}(\xi). \quad (6.18)$$

В книге В. И. Крылова [14] указаны значения узлов и коэффициентов формулы (6.15) для  $n=1(1)10$ , при этом дробная часть значений содержит двенадцать значащих цифр при  $n=1(1)5$  и девять значащих цифр при  $n=6(1)10$ . В работе [28] приведены значения узлов и коэффициентов (6.15) для  $n=1(1)20$ , при этом дробная часть коэффициентов дана с тринадцатью значащими цифрами, а дробная часть узлов при  $n=1(1)13$  — с пятнадцатью значащими цифрами, при  $n=14(1)16$  — с четырнадцатью значащими цифрами и при  $n=17(1)20$  — с тринадцатью значащими цифрами.

Ниже приведены значения узлов и коэффициентов формулы (6.15) для  $n = 1(1)8$ . Эти значения взяты из работы [28].

	$n = 1$	
$x_1 = 0$		$A_1 = 1,7724538509$
	$n = 2$	
$-x_1 = x_2 = 0,7071067812$		$A_1 = A_2 = 0,8862269255$
	$n = 3$	
$-x_1 = x_3 = 1,2247448714$		$A_1 = A_3 = 0,2954089752$
$x_2 = 0$		$A_2 = 1,1816359006$
	$n = 4$	
$-x_1 = x_4 = 1,6506801239$		$A_1 = A_4 = 0,08131283545$
$-x_2 = x_3 = 0,5246476233$		$A_2 = A_3 = 0,8049140900$
	$n = 5$	
$-x_1 = x_5 = 2,0201828705$		$A_1 = A_5 = 0,01995324206$
$-x_2 = x_4 = 0,9585724646$		$A_2 = A_4 = 0,3936193232$
$x_3 = 0$		$A_3 = 0,9453087205$
	$n = 6$	
$-x_1 = x_6 = 2,3506049737$		$A_1 = A_6 = 0,004530009906$
$-x_2 = x_5 = 1,3358490740$		$A_2 = A_5 = 0,1570673203$
$-x_3 = x_4 = 0,4360774119$		$A_3 = A_4 = 0,7246295952$
	$n = 7$	
$-x_1 = x_7 = 2,6519613568$		$A_1 = A_7 = 0,0009717812451$
$-x_2 = x_6 = 1,6735516288$		$A_2 = A_6 = 0,05451558282$
$-x_3 = x_5 = 0,8162878829$		$A_3 = A_5 = 0,4256072526$
$x_4 = 0$		$A_4 = 0,8102646176$
	$n = 8$	
$-x_1 = x_8 = 2,9306374203$		$A_1 = A_8 = 0,0001996040722$
$-x_2 = x_7 = 1,9816567567$		$A_2 = A_7 = 0,01707798301$
$-x_3 = x_6 = 1,1571937124$		$A_3 = A_6 = 0,2078023258$
$-x_4 = x_5 = 0,3811869902$		$A_4 = A_5 = 0,6611470126$

Рассмотрим еще весовую функцию

$$p(x) = x^s e^{-x} \quad (6.19)$$

на промежутке  $[0, \infty)$ , где  $s > -1$ . Функция (6.19) удовлетворяет условиям из § 4. Соответствующая квадратурная формула наивысшей степени точности имеет вид

$$\int_0^{\infty} x^s e^{-x} f(x) dx \cong \sum_{k=1}^n A_k f(x_k). \quad (6.20)$$

Узлами формулы являются корни многочлена степени  $n$ , ортогонального с весом (6.19) на промежутке  $[0, \infty)$  к любому многочлену степени  $n-1$ . Многочлены  $L_n^{(s)}(x)$ , обладающие указанным свойством ортогональности, называются *многочленами Чебышева — Лагерра*. Для  $L_n^{(s)}(x)$  справедливо представление

$$L_n^{(s)}(x) = (-1)^n x^{-s} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^{s+n} e^{-x}). \quad (6.21)$$

Коэффициенты квадратурной формулы (6.20)

$$A_k = \frac{n! \Gamma(s+n+1)}{x_k [L_n^{(s)'}(x_k)]^2}. \quad (6.22)$$

Остаточный член формулы (6.20)

$$R_n(f) = \frac{n! \Gamma(s+n+1)}{(2n)!} f^{(2n)}(\xi). \quad (6.23)$$

Численные значения узлов и коэффициентов квадратурной формулы (6.20) при  $s=0$  для  $n=1$  (1) 15 приведены в книге В. И. Крылова [14]. Дробная часть узлов и коэффициентов указана с двенадцатью значащими цифрами. Ниже приводим значения узлов и коэффициентов формулы (6.20) для  $n=1$  (1) 6.

$$n = 1$$

$$x_1 = 1$$

$$A_1 = 1$$

$$n = 2$$

$$x_1 = 0.5857864376$$

$$A_1 = 0.8535533906$$

$$x_2 = 3.4142135624$$

$$A_2 = 0.1464466094$$

$$n = 3$$

$$\begin{array}{ll} x_1 = 0,4157745568 & A_1 = 0,7110930099 \\ x_2 = 2,2942803603 & A_2 = 0,2785177336 \\ x_3 = 6,2899450829 & A_3 = 0, (1) 1038925650 * \end{array}$$

$$n = 4$$

$$\begin{array}{ll} x_1 = 0,3225476896 & A_1 = 0,6031541043 \\ x_2 = 1,7457611012 & A_2 = 0,3574186924 \\ x_3 = 4,5366202969 & A_3 = 0, (1) 3888790852 \\ x_4 = 9,3950709123 & A_4 = 0, (3) 5392947056 \end{array}$$

$$n = 5$$

$$\begin{array}{ll} x_1 = 0,2635603197 & A_1 = 0,5217556106 \\ x_2 = 1,4134030591 & A_2 = 0,3986668111 \\ x_3 = 3,5964257710 & A_3 = 0, (1) 7594244968 \\ x_4 = 7,0858100059 & A_4 = 0, (2) 3611758680 \\ x_5 = 12,6408008443 & A_5 = 0, (4) 2336997239 \end{array}$$

$$n = 6$$

$$\begin{array}{ll} x_1 = 0,2228466042 & A_1 = 0,4589646740 \\ x_2 = 1,1889321017 & A_2 = 0,4170008308 \\ x_3 = 2,9927363261 & A_3 = 0,1133733821 \\ x_4 = 5,7751435691 & A_4 = 0, (1) 1039919745 \\ x_5 = 9,8374674184 & A_5 = 0, (3) 2610172028 \\ x_6 = 15,9828739806 & A_6 = 0, (6) 8985479064 \end{array}$$

Приведем численные примеры.

**Пример 1.** Вычислить интеграл

$$\int_{-1}^1 \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Воспользуемся формулой Мелера (6.11). Остаточный член (6.13) для  $n=5$  не превосходит две единицы пятого десятичного знака. Будем вести вычисления на шесть десятичных

\*) Цифра в скобках означает количество нулей, которые следует написать после запятой до первой значащей цифры, например,  $0, (1) 10389 \dots = 0,010389 \dots$

знаков и возьмем  $n = 5$ . Вычисления приведены в табл. 28. Мы получаем, что приближенное значение интеграла равно 7,161529, что отличается от точного значения интеграла на одну единицу шестого десятичного знака.

Таблица 28

$x_k$	$2x_k$	$e^{2x_k}$
-0,951057	-1,902114	0,149253
-0,587785	-1,175570	0,308643
0	0	1
0,587785	1,175570	3,239989
0,951057	1,902114	6,700043
		11,397928

**Пример 2.** Вычислить интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos x \, dx.$$

Применим квадратурную формулу (6.15) при  $n = 5$ . Так как узлы квадратурной формулы расположены симметрично относительно  $x = 0$ , при этом симметричным узлам отвечают одинаковые коэффициенты, то получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos x \, dx &\cong A_3 \cos x_3 + 2 \sum_{k=4}^5 A_k \cos x_k = \\ &= 0,945309 + 2(0,393619 \cdot 0,574689 - \\ &\quad - 0,019953 \cdot 0,434413) = 1,380390. \end{aligned}$$

Остаточный член (6.18) при  $n = 5$  не превосходит трех единиц шестого десятичного знака. Точное значение интеграла равно

$$\sqrt{\pi} e^{-1/4} = 1,3803885 \dots,$$

так что действительная величина ошибки равна двум единицам шестого десятичного знака.

## § 7. Квадратурные формулы А. А. Маркова

Рассмотрим задачу о построении квадратурных формул вида

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \cong \sum_{j=1}^m B_j f(a_j) + \sum_{k=1}^n A_k f(x_k), \quad (7.1)$$

где узлы  $a_j$  и  $x_k$  лежат на промежутке  $[a, b]$ , при этом  $a_j$  заданы заранее, а  $x_k$  выбираются так, чтобы они не совпадали ни с одним из  $a_j$  и формула (7.1) была точна для всех многочленов возможно более высокой степени.

Предполагаем, что весовая функция  $p(x)$  удовлетворяет условиям, перечисленным в § 4:  $p(x) \geq 0$ , существуют моменты  $\rho(x)$  и  $\rho_0 > 0$ .

За счет выбора коэффициентов можно добиться того, чтобы формула (7.1) была точна для многочленов степени  $m + n - 1$ . Можно надеяться так подобрать  $n$  узлов  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , чтобы формула была точна, когда  $f(x)$  является многочленом степени  $m + 2n - 1$ .

Введем обозначения

$$\sigma(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_m), \quad (7.2)$$

$$\omega(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n). \quad (7.3)$$

**Теорема.** Для того чтобы квадратурная формула (7.1) обращалась в точное равенство, когда  $f(x)$  любой многочлен степени  $m + 2n - 1$ , необходимо и достаточно, чтобы она была интерполяционной и многочлен (7.3)

$$\omega(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

был ортогонален с весом

$$p(x)\sigma(x) = p(x)(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_m) \quad (7.4)$$

на промежутке  $[a, b]$  к любому многочлену  $Q(x)$  степени меньшей  $n$ :

$$\int_a^b p(x)\sigma(x)\omega(x)Q(x)dx = 0. \quad (7.5)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть формула (7.1) точна, когда  $f(x)$  — любой многочлен степени  $m + 2n - 1$ . По теореме из § 1 формула (7.1) интерполяционная. Возьмем любой многочлен  $Q(x)$  степени меньше  $n$ . Тогда

$$f(x) = \sigma(x) \omega(x) Q(x)$$

есть многочлен, степень которого не выше  $m + 2n - 1$ , и по предположению для него формула (7.1) точна

$$\begin{aligned} \int_a^b p(x) f(x) dx &= \int_a^b p(x) \sigma(x) \omega(x) Q(x) dx = \\ &= \sum_{j=1}^m B_j f(a_j) + \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) = 0. \end{aligned}$$

Необходимость условия (7.5) доказана.

Достаточность. Предположим, что формула (7.1) интерполяционная и выполнено условие (7.5). Надо доказать, что формула (7.1) точна, когда  $f(x)$  — любой многочлен степени  $m + 2n - 1$ . Разделим  $f(x)$  на многочлен  $\sigma(x) \omega(x)$  степени  $m + n$ :

$$f(x) = \sigma(x) \omega(x) Q(x) + r(x), \quad (7.6)$$

где степень  $Q(x)$  меньше  $n$  и степень  $r(x)$  меньше  $m + n$ . Умножим обе части равенства (7.6) на  $p(x)$  и проинтегрируем по  $x$  от  $a$  до  $b$ . Получим

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = \int_a^b p(x) \sigma(x) \omega(x) Q(x) dx + \int_a^b p(x) r(x) dx.$$

По условию (7.5) первый интеграл в правой части равен нулю, второй интеграл равен квадратурной сумме

$$\sum_{j=1}^m B_j r(a_j) + \sum_{k=1}^n A_k r(x_k),$$

так как степень  $r(x)$  меньше  $m + n$  и формула (7.1) интерполяционная. Но в силу (7.6)

$$r(a_j) = f(a_j), \quad r(x_k) = f(x_k),$$

и мы окончательно получаем

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = \sum_{j=1}^m B_j f(a_j) + \sum_{k=1}^n A_k f(x_k).$$

Достаточность установлена.

Доказанная теорема сводит вопрос о существовании формулы (7.1), точной для всех многочленов степени  $m + 2n - 1$ , к вопросу существования многочлена  $\omega(x)$  степени  $n$ , ортогонального с весом (7.4) на  $[a, b]$  к любому многочлену степени  $n - 1$ . Применяя эту теорему, мы должны заботиться о том, чтобы корни  $\omega(x)$  были вещественны, различны, лежали на промежутке  $[a, b]$  и удовлетворяли неравенствам

$$x_k \neq a_j, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (7.7)$$

А. А. Марков указал три случая, когда можно построить формулу (7.1). Чтобы существовали ортогональные многочлены с весом  $p(x)\sigma(x)$ , достаточно потребовать, чтобы многочлен  $\sigma(x)$  сохранял знак на  $[a, b]$ . Это условие будет заведомо нарушено, если хоть один из узлов  $a_1, a_2, \dots, a_m$  лежит внутри промежутка  $(a, b)$ . С другой стороны, узлы должны принадлежать  $[a, b]$ , поэтому  $\sigma(x)$  будет сохранять знак на  $[a, b]$  в трех случаях:

1) берется один фиксированный узел и этот узел совпадает с левым концом промежутка интегрирования:  $m = 1$ ,  $a_1 = a$ ,  $\sigma(x) = x - a \geq 0$  при  $x \in [a, b]$ ;

2)  $m = 1$ ,  $a_1 = b$ ,  $\sigma(x) = x - b \leq 0$  на  $[a, b]$ ;

3) берется два фиксированных узла, совпадающих с концами промежутка интегрирования:  $m = 2$ ,  $a_1 = a$ ,  $a_2 = b$ ,  $\sigma(x) = (x - a)(x - b) \leq 0$  при  $x \in [a, b]$ .

На основании доказанной теоремы формула (7.1) в случаях 1) — 3) существует. Узлы  $x_1, x_2, \dots, x_n$  являются корнями многочлена степени  $n$ , ортогонального с весом  $p(x)\sigma(x)$  на промежутке  $[a, b]$  к любому многочлену степени  $n - 1$ . При этом  $x_1, x_2, \dots, x_n$  вещественны, различны и лежат внутри  $(a, b)$  и, следовательно, условия (7.7) выполнены.

Коэффициенты квадратурной формулы (7.1) на основании (1.5) можно записать в виде

$$B_j = \int_a^b p(x) \frac{\sigma(x) \omega(x)}{(x-a_j) \sigma'(a_j) \omega(a_j)} dx, \quad (7.8)$$

$$A_k = \int_a^b p(x) \frac{\sigma(x) \omega(x)}{(x-x_k) \omega'(x_k) \sigma(x_k)} dx. \quad (7.9)$$

Укажем остаточный член квадратурной формулы (7.1). Пусть  $f(x)$  имеет непрерывную производную порядка  $m+2n$  и существует интеграл

$$\int_a^b p(x) f(x) dx.$$

Построим интерполяционный многочлен Эрмита по условиям

$$P(x_k) = f(x_k), \quad P'(x_k) = f'(x_k), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

$$P(a_j) = f(a_j), \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Имеем, в силу (10.24) гл. II,

$$f(x) = P(x) + \frac{\sigma(x) \omega^2(x)}{(m+2n)!} f^{(m+2n)}(\eta), \quad a < \eta < b.$$

Степень  $P(x)$  меньше  $m+2n$ , поэтому, умножая обе части последнего равенства на  $p(x)$  и интегрируя, получим, что остаточный член квадратурной формулы (7.1) равен

$$R_n^{(m)}(f) = \frac{1}{(m+2n)!} \int_a^b p(x) \sigma(x) \omega^2(x) f^{(m+2n)}(\eta) dx.$$

Так как в случаях А. А. Маркова  $\sigma(x)$  сохраняет знак на  $[a, b]$ , то по теореме о среднем последнее равенство можно записать в виде

$$R_n^{(m)}(f) = \frac{f^{(m+2n)}(\xi)}{(m+2n)!} \int_a^b p(x) \sigma(x) \omega^2(x) dx, \quad a \leq \xi \leq b. \quad (7.10)$$

Из равенства (7.10) вытекает, что алгебраическая степень точности квадратурной формулы (7.1) равна  $m+2n-1$ .

В самом деле, для  $f(x) = x^{m+2n}$  формула (7.1) не точна, так как

$$R_n^{(m)}(x^{m+2n}) = \int_a^b p(x) \sigma(x) \omega^2(x) dx \neq 0.$$

Перейдем теперь к рассмотрению случаев 1) — 3). Случай 2) отдельно не будем рассматривать, так как он приводится к случаю 1) путем линейной замены переменной интегрирования  $x = a + b - t$ . Будем предполагать, что весовая функция постоянна:  $p(x) \equiv 1$ . Промежуток интегрирования будем считать совпадающим с  $[-1, 1]$ .

Начнем со случая 1). Имеем  $m = 1$ ,  $a_1 = -1$  и формула (7.1) принимает вид

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \cong Bf(-1) + \sum_{k=1}^n A_k f(x_k). \quad (7.11)$$

Алгебраическая степень точности формулы (7.11) равна  $2n$ . Узлы  $x_1, x_2, \dots, x_n$  в (7.11) суть корни многочлена  $\omega(x)$ , ортогонального на  $[-1, 1]$  с весом  $1+x$  к любому многочлену степени  $n-1$ . Отметим, что  $\omega(x)$  с точностью до постоянного множителя совпадает с многочленом Якоби  $P_n^{(0,1)}(x)$ .

Укажем представление  $(1+x)\omega(x)$  через многочлены Лежандра. Имеем

$$(1+x)\omega(x) = c_0 + c_1 P_1(x) + \dots \\ \dots + c_{n-1} P_{n-1}(x) + c_n P_n(x) + c_{n+1} P_{n+1}(x).$$

Умножая обе части этого равенства на  $P_k(x)$  и интегрируя по  $x$  от  $-1$  до  $1$ , получим

$$c_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Таким образом,

$$(1+x)\omega(x) = c_n P_n(x) + c_{n+1} P_{n+1}(x). \quad (7.12)$$

Положим в (7.12)  $x = -1$  и примем во внимание, что  $P_k(-1) = (-1)^k$  [см. (5.10)]. Получим  $c_n = c_{n+1}$  и, следовательно,

$$(1+x)\omega(x) = c_n [P_{n+1}(x) + P_n(x)]. \quad (7.13)$$

Чтобы определить  $c_n$ , заметим, что коэффициент при  $x^{n+1}$  в левой части равенства (7.13) равен 1. Из соотношения

[см. (5.6)] 
$$P_{n+1}(x) = \frac{(2n+2)!}{2^{n+1} [(n+1)!]^2} x^{n+1} - \dots$$

вытекает, что

$$c_n = \frac{2^{n+1} [(n+1)!]^2}{(2n+2)!}. \quad (7.14)$$

Таким образом, узлы квадратурной формулы (7.11), включая узел  $a_1 = -1$ , являются корнями уравнения

$$P_{n+1}(x) + P_n(x) = 0.$$

Коэффициенты квадратурной формулы (7.11) определяются равенствами (7.8) и (7.9), в которых надо положить  $p(x) = 1$ ,  $\sigma(x) = x + 1$ ,  $-a = b = 1$ . Равенства (7.8) и (7.9) неудобны для вычислений. Пользуясь свойствами многочленов Якоби, можно показать, что

$$B = \frac{2}{(n+1)^2}, \quad A_k = \frac{4}{(1+x_k)(1-x_k^2) [P_n^{(0,1)'}(x_k)]^2}.$$

Укажем остаточный член формулы (7.11), предполагая, что  $f(x)$  имеет непрерывную на  $[-1, 1]$  производную порядка  $2n+1$ . Воспользуемся формулой (7.10), которая в нашем случае запишется так:

$$R_n^{(1)}(f) = \frac{f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!} \int_{-1}^1 (1+x) \omega^2(x) dx. \quad (7.15)$$

Вычислим интеграл в правой части этого равенства. Заменяем  $(1+x)\omega(x)$  правой частью соотношения (7.13) и выполним простые преобразования:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1+x) \omega^2(x) dx &= c_n \int_{-1}^1 [P_{n+1}(x) + P_n(x)] \omega(x) dx = \\ &= c_n \int_{-1}^1 P_n(x) \omega(x) dx = c_n \int_{-1}^1 P_n(x) x^n dx = \\ &= c_n \int_{-1}^1 P_n(x) \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!} P_n(x) dx = c_n \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!} \frac{2}{2n+1} = \\ &= \frac{2^{2n+1} (n!)^4 (n+1)}{[(2n+1)!]^2}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались равенствами (5.7), (5.9) и (7.14).  
Теперь при помощи (7.15) находим

$$R_n^{(1)}(f) = \frac{2^{2n+1}(n!)^4(n+1)}{[(2n+1)!]^3} f^{(2n+1)}(\xi), \quad -1 \leq \xi \leq 1. \quad (7.16)$$

Приводимые ниже численные значения узлов и коэффициентов квадратурной формулы (7.11) взяты из книги В. И. Крылова [14].

$$\begin{aligned} n &= 1 \\ B &= 0,5 \\ x_1 &= -0,33333333 \quad A_1 = 1,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n &= 2 \\ B &= 0,22222222 \\ x_1 &= -0,28989794 \quad A_1 = 1,02497166 \\ x_2 &= 0,68989794 \quad A_2 = 0,75280612 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n &= 3 \\ B &= 0,125 \\ x_1 &= -0,5753189 \quad A_1 = 0,6576886 \\ x_2 &= 0,1810663 \quad A_2 = 0,7763870 \\ x_3 &= 0,8228241 \quad A_3 = 0,4409244 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n &= 4 \\ B &= 0,08 \\ x_1 &= -0,7204803 \quad A_1 = 0,4462078 \\ x_2 &= 0,1671809 \quad A_2 = 0,6236530 \\ x_3 &= 0,4463140 \quad A_3 = 0,5627120 \\ x_4 &= 0,8857916 \quad A_4 = 0,2874271 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n &= 5 \\ B &= 0,05555556 \\ x_1 &= -0,8029298 \quad A_1 = 0,3196408 \\ x_2 &= -0,3909286 \quad A_2 = 0,4853872 \\ x_3 &= 0,1240504 \quad A_3 = 0,5209268 \\ x_4 &= 0,6039732 \quad A_4 = 0,4169013 \\ x_5 &= 0,9203803 \quad A_5 = 0,2015884 \end{aligned}$$

$$n = 6$$

	$B = 0,04081633$
$x_1 = -0,8538913$	$A_1 = 0,2392274$
$x_2 = -0,5384678$	$A_2 = 0,3809498$
$x_3 = -0,1173430$	$A_3 = 0,4471098$
$x_4 = 0,3260306$	$A_4 = 0,4247038$
$x_5 = 0,7038428$	$A_5 = 0,3182042$
$x_6 = 0,9413672$	$A_6 = 0,1489885$

Рассмотрим случай 3), когда в качестве фиксированных узлов берутся концы промежутка  $[-1, 1]$ :  $m = 2$ ,  $a_1 = -1$ ,  $a_2 = 1$ . Формула (7.1) принимает вид

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \cong B_1 f(-1) + B_2 f(1) + \sum_{k=1}^n A_k f(x_k). \quad (7.17)$$

Алгебраическая степень точности формулы (7.17) равна  $2n + 1$ .

Ее узлы  $x_1, x_2, \dots, x_n$  являются корнями многочлена  $\omega(x)$  степени  $n$ , ортогонального с весом  $(x-1)(x+1)$  на промежутке  $[-1, 1]$  ко всем многочленам степени  $n-1$ . Отметим, что  $\omega(x)$  лишь постоянным множителем отличается от многочлена Якоби  $P_n^{(1,1)}(x)$ .

Так же, как в случае 1), можно установить равенство

$$(x^2 - 1)\omega(x) = c_n [P_{n+2}(x) - P_n(x)], \quad (7.18)$$

где

$$c_n = \frac{2^n n! (n+2)!}{(2n+1)! (2n+3)!}, \quad (7.19)$$

так что узлы формулы (7.17), включая  $a_1 = -1$ ,  $a_2 = 1$ , являются корнями уравнения

$$P_{n+2}(x) - P_n(x) = 0.$$

Можно показать, что

$$B_1 = B_2 = \frac{2}{(n+1)(n+2)},$$

$$A_k = 8 \frac{n+1}{n+2} \frac{1}{(1-x_k^2)^2 [P_n^{(1,1)}(x_k)]^2}.$$

Как в случае 1), с помощью (7.18) и (7.19) легко указать представление остаточного члена формулы (7.17)

$$R_n^{(2)}(f) = - \frac{2^{2n} (n!)^4 (n+2)}{[(2n+1)!]^3 (2n+3)} f^{(2n+2)}(\xi), \quad -1 \leq \xi \leq 1. \quad (7.20)$$

Численные значения узлов и коэффициентов формулы (7.17) с восемью значащими цифрами для  $n=1(1)15$  приведены в книге В. И. Крылова [14]. Ниже мы приводим узлы и коэффициенты формулы (7.17) для  $n=1(1)6$  из книги [14].

	$n=1$	
		$B_1 = B_2 = 0,33333333$
$x_1 = 0$		$A_2 = 1,33333333$
	$n=2$	
		$B_1 = B_2 = 0,16666667$
$-x_1 = x_2 = 0,44721360$		$A_1 = A_2 = 0,83333333$
	$n=3$	
		$B_1 = B_2 = 0,1$
$-x_1 = x_3 = 0,65465367$		$A_1 = A_3 = 0,54444444$
$x_2 = 0$		$A_2 = 0,71111111$
	$n=4$	
		$B_1 = B_2 = 0,06666667$
$-x_1 = x_4 = 0,76505532$		$A_1 = A_4 = 0,37847496$
$-x_2 = x_3 = 0,28523152$		$A_2 = A_3 = 0,55485837$
	$n=5$	
		$B_1 = B_2 = 0,047619048$
$-x_1 = x_5 = 0,83022390$		$A_1 = A_5 = 0,27682605$
$-x_2 = x_4 = 0,46884879$		$A_2 = A_4 = 0,43174538$
$x_3 = 0$		$A_3 = 0,48761905$
	$n=6$	
		$B_1 = B_2 = 0,035714286$
$-x_1 = x_6 = 0,87174015$		$A_1 = A_6 = 0,21070423$
$-x_2 = x_5 = 0,59170018$		$A_2 = A_5 = 0,34112268$
$-x_3 = x_4 = 0,20929922$		$A_3 = A_4 = 0,41245881$

Квадратурные формулы находят применение, в частности, при численном решении интегральных уравнений Фредгольма второго рода

$$\varphi(s) = \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt + f(s). \quad (7.21)$$

Здесь  $K(s, t)$  — заданная в квадрате  $a \leq s, t \leq b$  функция, называемая ядром интегрального уравнения,  $f(s)$  — заданная в  $[a, b]$  функция и  $\varphi(s)$  — неизвестная функция.

Метод механических квадратур для решения уравнения (7.21) состоит в следующем. Пользуясь какой-либо квадратурной формулой

$$\int_a^b F(t) dt \cong \sum_{k=1}^n A_k F(t_k), \quad (7.22)$$

заменяем интеграл в правой части (7.21) квадратурной суммой. Получим

$$\varphi(s) = \sum_{k=1}^n A_k K(s, t_k) \varphi(t_k) + f(s) + R(s). \quad (7.23)$$

Здесь  $R(s)$  — остаточный член квадратурной формулы (7.22).

Будем применять обозначения

$$K_{ik} = K(t_i, t_k), \quad f_k = f(t_k), \quad \varphi_k = \varphi(t_k), \quad i, k = 1, 2, \dots, n.$$

Положим в (7.23)  $s = t_1, t_2, \dots, t_n$ . Получим линейную алгебраическую систему относительно  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$

$$\varphi_i = \sum_{k=1}^n A_k K_{ik} \varphi_k + f_i + R(t_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Эта система непригодна для вычислений, так как в нее входят значения  $R(t_i)$  неизвестного остаточного члена  $R(s)$ . Отбрасывая эти неизвестные значения, получим систему

$$\tilde{\varphi}_i = \sum_{k=1}^n A_k K_{ik} \tilde{\varphi}_k + f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (7.24)$$

Числа  $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \dots, \tilde{\varphi}_n$ , определяемые из системы уравнений (7.24), и принимаются за приближенные значения решения  $\varphi(s)$  в узлах квадратурной формулы  $t_1, t_2, \dots, t_n$ .

Существенным моментом указанного метода является выбор соответствующей квадратурной формулы, так как от точности приближения интеграла квадратурной суммой зависит число уравнений системы (7.24). Если интегральное уравнение таково, что значения искомой функции  $\varphi(s)$  на одном или на обоих концах проме-

жутка  $[a, b]$  известны, то удобно применять квадратурные формулы Маркова.

Приведем численный пример. Рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi(s) = - \int_0^1 K(s, t) \varphi(t) dt + s^2, \quad (7.25)$$

где

$$K(s, t) = \begin{cases} s(1-t) & \text{при } 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ t(1-s) & \text{при } 0 \leq t \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Из интегрального уравнения (7.25) видно, если положить в нем  $s = 0$  и  $s = 1$ , что

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 1.$$

Естественно воспользоваться квадратурной формулой

$$\int_0^1 F(t) dt \cong \frac{1}{2} B_1 [F(0) + F(1)] + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n A_k F(t_k), \quad (7.26)$$

где  $t_k = \frac{1}{2}(x_k + 1)$ ,  $x_k$  и  $A_k$  — узлы и коэффициенты квадратурной формулы (7.17).

Возьмем  $n = 2$ . Формула (7.26) для  $n = 2$  запишется в виде

$$\int_0^1 F(t) dt \cong 0,08333 [F(0) + F(1)] + 0,41667 [F(t_1) + F(t_2)],$$

где

$$t_1 = 0,27639, \quad t_2 = 0,72361. \quad (7.27)$$

Система (7.24) в нашем случае запишется так:

$$\left. \begin{aligned} (1 + 0,41667K_{11}) \tilde{\varphi}_1 + 0,41667K_{12} \tilde{\varphi}_2 &= t_1^2, \\ 0,41667K_{21} \tilde{\varphi}_1 + (1 + 0,41667K_{22}) \tilde{\varphi}_2 &= t_2^2. \end{aligned} \right\} \quad (7.28)$$

Если подставить в (7.28) численные значения  $K_{ik} = K(t_i, t_k)$  и  $t_k^2$  ( $i, k = 1, 2$ ), где  $t_1$  и  $t_2$  определяются (7.27), то получим

$$\left. \begin{aligned} 1,08333 \tilde{\varphi}_1 + 0,03183 \tilde{\varphi}_2 &= 0,07639, \\ 0,03183 \tilde{\varphi}_1 + 1,08333 \tilde{\varphi}_2 &= 0,52361. \end{aligned} \right\}$$

Решая эту систему, найдем

$$\tilde{\varphi}_1 = 0,05636, \quad \tilde{\varphi}_2 = 0,48168.$$

Для уравнения (7.25) нетрудно указать точное решение

$$\varphi(s) = 2 \operatorname{ch} s - 0,07335 \operatorname{sh} s - 2.$$

Значения его в узлах суть

$$\varphi(t_1) = 0,05633, \quad \varphi(t_2) = 0,48903,$$

так что

$$\varphi(t_1) - \tilde{\varphi}_1 = -0,00003, \quad \varphi(t_2) - \tilde{\varphi}_2 = 0,00735.$$

### § 8. Квадратурная формула Чебышева

П. Л. Чебышев рассмотрел вопрос о построении квадратурных формул с равными коэффициентами

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \cong C_n \sum_{k=1}^n f(x_k). \quad (8.1)$$

Частный случай формулы (8.1), когда  $[a, b] = [-1, 1]$  и

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

мы рассмотрели в § 6. Это формула Мелера.

Будем предполагать, что существуют моменты функции  $p(x)$

$$\mu_k = \int_a^b p(x) x^k dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

при этом

$$\mu_0 = \int_a^b p(x) dx \neq 0. \quad (8.2)$$

В квадратурную сумму формулы (8.1) входит  $n+1$  параметров:  $n$  узлов и общее значение коэффициентов  $C_n$ , поэтому можно надеяться так подобрать эти параметры, что формула (8.1) будет точна, когда  $f(x)$  — любой многочлен степени  $n$ . Как мы увидим, квадратурная формула вида (8.1) существует не всегда.

Узлы  $x_k$  и постоянную  $C_n$  будем находить из того условия, что квадратурная формула (8.1) должна быть точной, когда

$$f(x) = x^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Полагая в (8.1)  $f(x) = 1$ , получим

$$nC_n = \int_a^b p(x) dx = \mu_0,$$

откуда

$$C_n = \frac{\mu_0}{n}. \quad (8.3)$$

Из предположения (8.2) вытекает, что  $C_n \neq 0$ .

Для определения узлов получим следующую систему нелинейных уравнений, если запишем, что формула (8.1) точна, когда  $f(x) = x^k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ :

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n x_k &= n \frac{\mu_1}{\mu_0}, \\ \sum_{k=1}^n x_k^2 &= n \frac{\mu_2}{\mu_0}, \\ &\dots \dots \dots \\ \sum_{k=1}^n x_k^n &= n \frac{\mu_n}{\mu_0}. \end{aligned} \right\} \quad (8.4)$$

Вместо того, чтобы находить неизвестные  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , решая систему (8.4), будем разыскивать многочлен

$$\begin{aligned} \omega(x) &= (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) = \\ &= x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n, \end{aligned} \quad (8.5)$$

корнями которого являются  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Очевидно, имеем

$$\frac{\omega'(x)}{\omega(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x - x_k}. \quad (8.6)$$

При  $|x| > |x_k|$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , справедливы разложения

$$\frac{1}{x - x_k} = \frac{1}{x} \frac{1}{1 - \frac{x_k}{x}} = \frac{1}{x} + \frac{x_k}{x^2} + \frac{x_k^2}{x^3} + \dots$$



Впоследствии было обнаружено, что при  $n=8$  среди корней многочлена  $\omega(x)$  имеются комплексные. При  $n=9$  корни снова оказываются вещественными. С. Н. Бернштейн доказал, что при  $n \geq 10$  среди корней многочлена  $\omega(x)$  всегда имеются комплексные, так что при  $n \geq 10$  квадратурная формула Чебышева (8.10) не существует. Доказательство этого факта можно найти в книге В. И. Крылова [14].

Приводимые ниже численные значения узлов квадратурной формулы (8.10) взяты из статьи [27].

$n = 1$	$n = 6$
$x_1 = 0$	$-x_1 = x_6 = 0,8662468181$
$n = 2$	$-x_2 = x_5 = 0,4225186538$
$-x_1 = x_2 = 0,5773502691$	$-x_3 = x_4 = 0,2666354015$
$n = 3$	$n = 7$
$-x_1 = x_3 = 0,7071067812$	$-x_1 = x_7 = 0,8838617008$
$x_2 = 0$	$-x_2 = x_6 = 0,5296567753$
$n = 4$	$-x_3 = x_5 = 0,3239118105$
$-x_1 = x_4 = 0,7946544723$	$x_4 = 0$
$-x_2 = x_3 = 0,1875924741$	$n = 9$
$n = 5$	$-x_1 = x_9 = 0,9115893077$
$-x_1 = x_5 = 0,8324974870$	$-x_2 = x_8 = 0,6010186554$
$-x_2 = x_4 = 0,3745414096$	$-x_3 = x_7 = 0,5287617831$
$x_3 = 0$	$-x_4 = x_6 = 0,1679061842$
	$x_5 = 0$

**Пример.** Вычислим по формуле Чебышева интеграл

$$\text{Si}(1) = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx.$$

Заменой переменной  $x = \frac{1}{2}(t+1)$  переходим к промежутку интегрирования  $[-1, 1]$ :

$$\text{Si}(1) = \int_{-1}^1 \frac{\sin 0,5(1+t)}{1+t} dt.$$

Таблица 29

$t_k$	$t_k + 1$	$0,5(t_k + 1)$	$\sin 0,5(t_k + 1)$	$\frac{\sin 0,5(t_k + 1)}{t_k + 1}$
-0,832497	0,167503	0,083752	0,083654	0,499418
-0,374541	0,625459	0,312730	0,307658	0,491892
0	1	0,5	0,479426	0,479426
0,374541	1,374541	0,687271	0,634430	0,461558
0,832497	1,832497	0,916249	0,793324	0,432920
				2,365214

Берем  $n = 5$  и будем вести вычисления на шесть десятичных знаков.

Результаты вычислений приведены в табл. 29. Мы получили

$$\text{Si}(1) \cong 0,946086,$$

что отличается от точного значения  $\text{Si}(1) = 0,946083$  на 3 единицы шестого десятичного знака.

### § 9. Числа и многочлены Бернулли

В настоящем параграфе мы приведем необходимые для дальнейшего изложения сведения о числах и многочленах Бернулли. Начнем с определения чисел Бернулли.

Рассмотрим функцию комплексного переменного  $t$

$$G(t) = \frac{t}{e^t - 1}. \quad (9.1)$$

Особыми точками функции (9.1) являются отличные от нуля корни знаменателя  $e^t - 1$

$$t = 2k\pi i, \quad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Точка  $t = 0$  не является особой точкой  $G(t)$ , и мы можем написать разложение в ряд Маклорена

$$G(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{B_{\nu}}{\nu!} t^{\nu}, \quad (9.2)$$

сходящееся в круге  $|t| < 2\pi$ . Числа  $B_\nu$ ,  $\nu = 0, 1, 2, 3, \dots$  и называются *числами Бернулли*. Функция  $G(t)$  называется *производящей функцией* чисел Бернулли.

Подставим в соотношение

$$G(t)(e^t - 1) = t$$

вместо  $G(t)$  правую часть (9.2) и вместо  $e^t$  — разложение в ряд Маклорена. Получим тождество

$$\left(B_0 + \frac{B_1}{1!}t + \frac{B_2}{2!}t^2 + \dots\right)\left(\frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots\right) = t,$$

справедливое при  $|t| < 2\pi$ . Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $t$  в левой и правой части, получим

$$B_0 = 1,$$

$$\frac{B_0}{k!} + \frac{B_1}{(k-1)!1!} + \frac{B_2}{(k-2)!2!} + \dots + \frac{B_{k-1}}{1!(k-1)!} = 0, \quad (9.3)$$

где  $k = 2, 3, 4, \dots$

Рекуррентное соотношение (9.3) позволяет последовательно определять числа  $B_k$ . Из (9.3) видно, что  $B_k$  — рациональные числа. Выпишем несколько первых чисел Бернулли:

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30},$$

$$B_5 = 0, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_7 = 0, \quad B_8 = -\frac{1}{30}, \quad B_9 = 0,$$

$$B_{10} = \frac{5}{66}, \quad B_{11} = 0, \quad B_{12} = -\frac{691}{2730}, \quad B_{13} = 0, \quad B_{14} = \frac{7}{6},$$

$$B_{15} = 0, \quad B_{16} = -\frac{3617}{510}, \quad B_{17} = 0, \quad B_{18} = \frac{43867}{798}.$$

Соотношение (9.3) можно записать в форме, удобной для запоминания. Именно, умножим обе части (9.3) на  $k!$  и к обеим частям полученного равенства прибавим  $B_k$ :

$$B_k = B_0 + C_k^{(1)}B_1 + C_k^{(2)}B_2 + \dots + C_k^{(k-1)}B_{k-1} + B_k.$$

Это равенство можно переписать в символическом виде

$$B_k = (1 + B)^k, \quad k = 2, 3, 4, \dots \quad (9.4)$$

При возведении двучлена  $1 + B$  в степень  $k$  вместо  $B^j$  следует писать  $B_j$ .

Докажем, что числа Бернулли с нечетными индексами, за исключением  $B_1 = -\frac{1}{2}$ , равны нулю. Выполняя очевидные преобразования, получим

$$G(-t) = \frac{-t}{e^{-t}-1} = \frac{-te^t}{1-e^t} = \frac{te^t - t + t}{e^t - 1} = t + G(t).$$

Подставим вместо  $G(t)$  разложение в ряд (9.2). Получим

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{B_{\nu}}{\nu!} (-t)^{\nu} = t + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{B_{\nu}}{\nu!} t^{\nu}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $t$ , получим

$$B_0 = B_0, \quad -B_1 = 1 + B_1,$$

$$B_{\nu}(-1)^{\nu} = B_{\nu}, \quad \text{при } \nu = 2, 3, 4, \dots$$

Из этих соотношений вытекает, что  $B_{\nu} = 0$  при  $\nu = 3, 5, 7, \dots$

Отметим еще формулу

$$B_{2k} = \frac{(-1)^{k-1} (2k)!}{2^{2k-1} \pi^{2k}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2k}}, \quad (9.5)$$

из которой видно, что при возрастании  $k$  числа Бернулли быстро возрастают. Формула (9.5) дает также знак числа Бернулли

$$\text{sign } B_{2k} = (-1)^{k-1}. \quad (9.6)$$

В конце настоящего параграфа формула (9.5) будет доказана.

Перейдем теперь к рассмотрению многочленов Бернулли. Функция комплексного переменного

$$H(x, t) = e^{xt} \frac{t}{e^t - 1} = e^{xt} G(t) \quad (9.7)$$

при любом комплексном значении параметра  $x$  регулярна в круге  $|t| < 2\pi$ , поэтому внутри этого круга имеет место разложение

$$H(x, t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{B_{\nu}(x)}{\nu!} t^{\nu}. \quad (9.8)$$

Коэффициенты разложения (9.8) суть функции от  $x$ . Как мы увидим,  $B_{\nu}(x)$ ,  $\nu = 0, 1, 2, 3, \dots$ , представляет собой много-

член степени  $\nu$ . Многочлены  $B_\nu(x)$  называются *многочленами Бернулли*. Функция (9.7) называется *производящей функцией* многочленов Бернулли.

Подставим теперь в равенство (9.7) вместо  $G(t)$ ,  $H(x, t)$  и  $e^{xt}$  их разложения в ряды в окрестности  $t=0$ . Получим равенство

$$B_0(x) + \frac{B_1(x)}{1!} t + \frac{B_2(x)}{2!} t^2 + \dots = \\ = \left( B_0 + \frac{B_1}{1!} t + \frac{B_2}{2!} t^2 + \dots \right) \left( 1 + \frac{xt}{1!} + \frac{x^2 t^2}{2!} + \dots \right),$$

справедливое в круге  $|t| < 2\pi$  для любого  $x$ . Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях в левой и правой части последнего равенства, получим

$$\frac{B_k(x)}{k!} = \frac{B_0 x^k}{k!} + \frac{B_1 x^{k-1}}{1!(k-1)!} + \dots + \frac{B_{k-1} x}{(k-1)! 1!} + \frac{B_k}{k!}$$

или

$$B_k(x) = B_0 x^k + C_k^{(1)} B_1 x^{k-1} + C_k^{(2)} B_2 x^{k-2} + \dots + B_k. \quad (9.9)$$

Равенство (9.9) можно записать в символическом виде

$$B_k(x) = (x + B)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (9.10)$$

при этом, как и выше, вместо  $B^j$  следует писать  $j$ -е число Бернулли  $B_j$ .

Соотношение (9.10) позволяет находить многочлены  $B_k(x)$ . Выпишем несколько первых многочленов Бернулли:

$$B_0(x) = 1,$$

$$B_1(x) = x - \frac{1}{2},$$

$$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6},$$

$$B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2} x^2 + \frac{1}{2} x,$$

$$B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30},$$

$$B_5(x) = x^5 - \frac{5}{2} x^4 + \frac{5}{3} x^3 - \frac{1}{6} x,$$

$$B_6(x) = x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2} x^4 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{42}.$$

Из (9.9) видно, что

$$B_k(0) = B_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (9.11)$$

Продифференцируем по  $x$  обе части соотношения (9.8).  
Получаем

$$e^{xt} \frac{t^2}{e^t - 1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{B'_\nu(x)}{\nu!} t^\nu.$$

Так как левая часть этого равенства равна  $tH(x, t)$ , то получим

$$t \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{B_\nu(x)}{\nu!} t^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{B'_\nu(x)}{\nu!} t^\nu.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях  $t$ , находим

$$B'_k(x) = kB_{k-1}(x), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (9.12)$$

Равенство (9.12) аналогично правилу дифференцирования функции  $f(x) = x^k$ .

Очевидно, (9.12) можно переписать в интегральной форме

$$B_k(x) = B_k + k \int_0^x B_{k-1}(t) dt. \quad (9.13)$$

Докажем равенство

$$B_k(1-x) = (-1)^k B_k(x), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (9.14)$$

Выполнив простые преобразования

$$e^{(1-x)t} \frac{t}{e^t - 1} = e^{-xt} \frac{te^t}{e^t - 1} = e^{x(-t)} \frac{-t}{e^{-t} - 1},$$

мы видим, что

$$H(1-x, t) = H(x, -t).$$

Заменим в этом соотношении функцию  $H$  ее разложением в ряд (9.8). Получим равенство

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{B_\nu(1-x)}{\nu!} t^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{B_\nu(x)}{\nu!} (-t)^\nu,$$

из которого и следует (9.14).

Равенство (9.14) показывает, что значения  $B_k(x)$  в точках, симметрично расположенных относительно точки  $x = \frac{1}{2}$ , одинаковы, если  $k$  — четное, и одинаковы по величине и

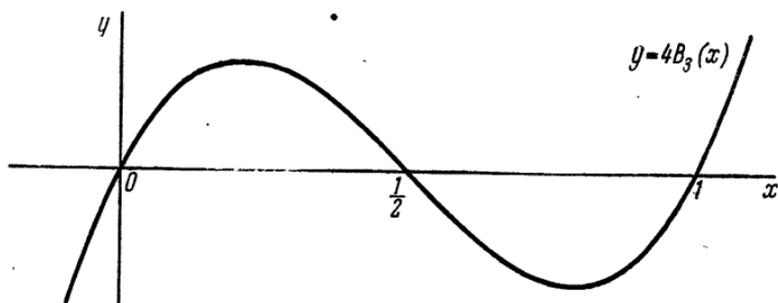


Рис. 16.

имеют разные знаки, если  $k$  — нечетное; см. рис. 16 и 17, на которых изображены графики функций  $y = 4B_3(x)$  и  $y = 4B_4(x)$ .

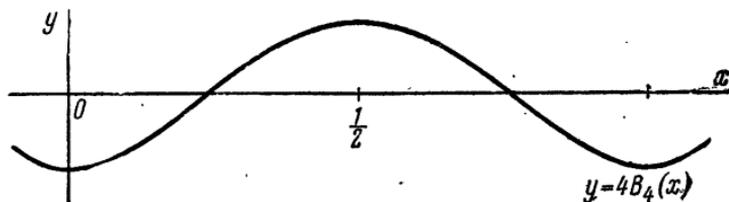


Рис. 17.

Рассмотрим многочлены, отличающиеся от многочленов Бернулли постоянными слагаемыми:

$$y_\nu(x) = B_\nu(x) - B_\nu, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, \quad (9.15)$$

и изучим расположение корней  $y_\nu(x)$  на промежутке  $[0, 1]$ . В силу (9.11)  $x = 0$  является корнем  $y_\nu(x)$  при любом  $\nu = 0, 1, 2, \dots$

Из соотношения (9.14) находим

$$y_\nu(1) = B_\nu(1) - B_\nu = (-1)^\nu B_\nu - B_\nu,$$

так что при любом четном  $\nu$   $y_\nu(1) = 0$ . При  $\nu$  нечетном все числа Бернулли равны нулю, кроме  $B_1 = -\frac{1}{2}$ , и, следовательно,  $y_\nu(1) = 0$  при  $\nu$  нечетных, отличных от единицы. Таким образом,  $x = 1$  является корнем всех многочленов  $y_\nu(x)$ , за исключением

$$y_1(x) = x.$$

Многочлен  $y_{2m+1}(x) = B_{2m+1}(x)$  при  $m = 1, 2, 3, \dots$  имеет корнем  $x = \frac{1}{2}$ , как это следует из соотношения (9.14):

$$B_{2m+1}\left(\frac{1}{2}\right) = -B_{2m+1}\left(\frac{1}{2}\right).$$

Докажем, что внутри промежутка  $(0, 1)$   $y_{2m+1}(x)$  не имеет других корней.

Допустим противное: будем считать, что  $y_{2m+1}(x)$  при некотором фиксированном  $m > 1$  имеет внутри  $(0, 1)$  два корня  $\alpha$  и  $\beta$ ,  $0 < \alpha < \beta < 1$ . Так как 0 и 1 также являются корнями  $y_{2m+1}(x)$ , то по теореме Ролля  $y'_{2m+1}(x)$  имеет по крайней мере три различных корня и  $y''_{2m+1}(x)$  — по крайней мере два различных корня внутри  $(0, 1)$ . Но в силу (9.12)

$$\begin{aligned} y''_{2m+1}(x) &= B''_{2m+1}(x) = (2m+1)2mB_{2m-1}(x) = \\ &= (2m+1)2my_{2m-1}(x), \end{aligned}$$

и мы доказали, что если  $y_{2m+1}(x)$  имеет внутри  $(0, 1)$  два различных корня, то  $y_{2m-1}(x)$  обладает тем же свойством. Следовательно, и  $y_3(x)$  имеет внутри  $(0, 1)$  два различных корня. Но  $y_3(x)$  — многочлен третьей степени, корни которого суть  $0, \frac{1}{2}, 1$ , и, следовательно, он не может иметь двух различных корней внутри  $(0, 1)$ . Утверждение доказано.

Докажем, что  $y_{2m}(x)$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$ , не имеет корней внутри промежутка  $(0, 1)$ . Очевидно, можем считать, что  $m \geq 2$ . Если бы многочлен  $y_{2m}(x)$  имел корень внутри  $(0, 1)$ , то по теореме Ролля производная  $y'_{2m}(x)$  имела бы два различных корня внутри  $(0, 1)$ , что невозможно ввиду равенства

$$y'_{2m}(x) = B'_{2m}(x) = 2mB_{2m-1}(x) = 2my_{2m-1}(x),$$

так как  $y_{2m-1}(x)$  имеет единственный корень  $x = \frac{1}{2}$  внутри  $(0, 1)$ .

Найдем значение  $B_{2m}(x)$  при  $x = \frac{1}{2}$ . Имеем

$$e^{\frac{t}{2}} \frac{t}{e^t - 1} = \frac{e^{\frac{t}{2}} t + t - t}{\left(e^{\frac{t}{2}} + 1\right)\left(e^{\frac{t}{2}} - 1\right)} = 2 \frac{\frac{t}{2}}{e^{\frac{t}{2}} - 1} - \frac{t}{e^t - 1}.$$

Отсюда следует равенство

$$H\left(\frac{1}{2}, t\right) = 2G\left(\frac{t}{2}\right) - G(t).$$

Заменим функции  $H$  и  $G$  разложениями (9.8) и (9.2). Получим

$$\sum_{v=0}^{\infty} \frac{B_v\left(\frac{1}{2}\right)}{v!} t^v = 2 \sum_{v=0}^{\infty} \frac{B_v}{v!} \left(\frac{t}{2}\right)^v - \sum_{v=0}^{\infty} \frac{B_v}{v!} t^v.$$

Приравнявая коэффициенты при  $t^m$  в левой и правой части, получим

$$B_m\left(\frac{1}{2}\right) = -B_m\left(1 - \frac{1}{2^{m-1}}\right), \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (9.16)$$

Выше мы установили, что  $y_{2k}(x)$  сохраняет знак внутри  $(0, 1)$ . Равенство (9.16) позволяет указать этот знак. В самом деле,

$$y_{2k}\left(\frac{1}{2}\right) = B_{2k}\left(\frac{1}{2}\right) - B_{2k} = -B_{2k}\left(2 - \frac{1}{2^{2k-1}}\right),$$

поэтому  $y_{2k}\left(\frac{1}{2}\right)$  имеет знак, противоположный знаку  $B_{2k}$  или, в силу (9.6),

$$\text{sign } y_{2k}\left(\frac{1}{2}\right) = (-1)^k. \quad (9.17)$$

Знак  $y_{2k}(x)$  можно указать и непосредственно. Он совпадает со знаком интеграла

$$\begin{aligned} \int_0^1 y_{2k}(x) dx &= \int_0^1 [B_{2k}(x) - B_{2k}] dx = \\ &= \left[ \frac{1}{2k+1} B_{2k+1}(x) - B_{2k} x \right]_0^1 = -B_{2k}, \end{aligned}$$

и мы получаем прежний результат.

Введем *периодические функции*  $B_\nu^*(x)$  с периодом 1, совпадающие с  $B_\nu(x)$  при  $0 \leq x < 1$ . На рис. 18 и 19 изображены графики функций  $y = B_0^*(x)$  и  $y = B_1^*(x)$ , а на рис. 20 и 21 — графики функций  $y = 4B_2^*(x)$  и  $y = 4B_3^*(x)$ .

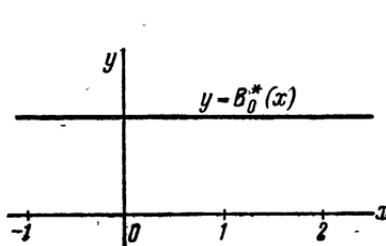


Рис. 18.

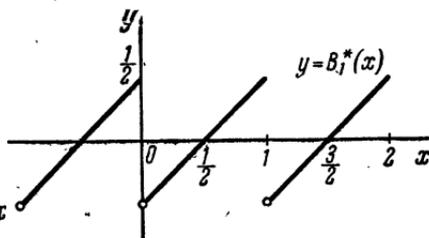


Рис. 19.

Функция  $B_1^*(x)$  разрывна в целочисленных точках и имеет в них скачок, равный минус единице. Функция  $B_2^*(x)$  непрерывна всюду,  $B_3^*(x)$  имеет непрерывную производную первого порядка. Из (9.12) вытекает

$$B_\nu^*(x) = \nu B_{\nu-1}^*(x) \quad (9.18)$$

при  $\nu = 2, 3, 4, \dots$

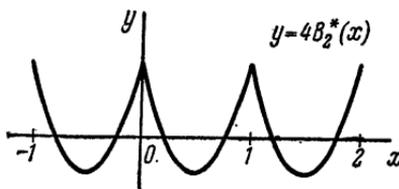


Рис. 20.

так что  $B_\nu^*(x)$  при  $\nu \geq 2$  имеет непрерывные производные до порядка  $\nu - 2$  включительно.

Укажем еще разложения в ряды Фурье для функций  $B_\nu^*(x)$ :

$$B_\nu^*(x) = \frac{1}{2} a_0^{(\nu)} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m^{(\nu)} \cos 2\pi m x + b_m^{(\nu)} \sin 2\pi m x), \quad (9.19)$$

где

$$a_m^{(\nu)} = 2 \int_0^1 B_\nu^*(x) \cos 2\pi m x \, dx = 2 \int_0^1 B_\nu(x) \cos 2\pi m x \, dx,$$

$$b_m^{(\nu)} = 2 \int_0^1 B_\nu^*(x) \sin 2\pi m x \, dx = 2 \int_0^1 B_\nu(x) \sin 2\pi m x \, dx.$$

По известным теоремам о разложении функций в тригонометрические ряды Фурье равенства (9.19) справедливы при всех  $x$  для всех функций  $B_n^*(x)$ , кроме  $B_1^*(x)$ . Для  $B_1^*(x)$  равенство (9.19) не

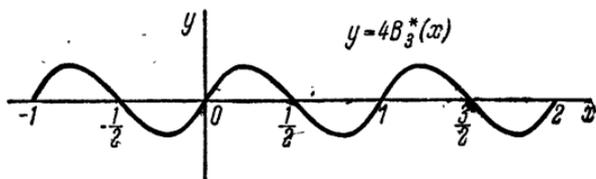


Рис. 21.

имеет места при  $x=0$  (и во всех целочисленных точках), ибо в этих точках сумма ряда равна

$$\frac{B_1^*(+0) + B_1^*(-0)}{2} = 0.$$

Вычислим коэффициенты Фурье  $a_m^{(\nu)}$  и  $b_m^{(\nu)}$ . Можем считать, что  $\nu \geq 1$ . Имеем

$$a_0^{(\nu)} = 2 \int_0^1 B_\nu(x) dx = \frac{2}{\nu+1} B_{\nu+1}(x) \Big|_0^1 = 0, \quad \nu = 1, 2, 3, \dots$$

Остальные коэффициенты Фурье вычислим для случая, когда  $\nu = 2k$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} a_m^{(2k)} &= 2 \int_0^1 B_{2k}(x) \cos 2\pi m x dx = \\ &= 2 \frac{\sin 2\pi m x}{2\pi m} B_{2k}(x) \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{\sin 2\pi m x}{2\pi m} 2k B_{2k-1}(x) dx. \end{aligned}$$

Внеинтегральный член обращается в нуль, интеграл продолжаем вычислять интегрированием по частям:

$$\begin{aligned} a_m^{(2k)} &= \frac{2k}{\pi m} \frac{\cos 2\pi m x}{2\pi m} B_{2k-1}(x) \Big|_0^1 - \\ &\quad - \frac{2k}{\pi m} \int_0^1 \frac{\cos 2\pi m x}{2\pi m} (2k-1) B_{2k-2}(x) dx. \end{aligned}$$

Если  $k > 1$ , то внеинтегральный член обращается в нуль, и мы получаем

$$a_m^{(2k)} = -\frac{2k(2k-1)}{(2\pi m)^2} a_m^{(2k-2)}. \quad (9.20)$$

Если  $k = 1$ , то интеграл обращается в нуль и

$$a_m^{(2)} = \frac{1}{\pi^2 m^2}.$$

Теперь из (9.20) находим

$$a_m^{(2k)} = (-1)^{k-1} \frac{2k(2k-1)(2k-2)\dots 3}{(2\pi m)^{2(k-1)}} a_m^{(2)} = (-1)^{k-1} \frac{2 \cdot (2k)!}{(2\pi m)^{2k}}. \quad (9.21)$$

Из соотношения (9.14) вытекает, что

$$B_{2k}(1-x) \sin 2\pi m(1-x) = -B_{2k}(x) \sin 2\pi mx$$

и, следовательно,

$$b_m^{(2k)} = 0, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (9.22)$$

Подставляя коэффициенты (9.21) и (9.22) в (9.19), получим

$$B_{2k}^*(x) = \frac{(-1)^{k-1} (2k)!}{2^{2k-1} \pi^{2k}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi mx}{m^{2k}}. \quad (9.23)$$

В случае нечетного  $\nu = 2k - 1$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , таким же путем найдем

$$B_{2k-1}^*(x) = \frac{(-1)^k (2k-1)!}{2^{2k-2} \pi^{2k-1}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi mx}{m^{2k-1}}. \quad (9.24)$$

Если в (9.23) положить  $x = 0$ , то получим формулу (9.5).

### § 10. Представление функции при помощи многочленов Бернулли

Пусть  $f(x)$  на промежутке  $[0, 1]$  имеет непрерывные производные до порядка  $\nu \geq 1$  включительно. Тогда при  $0 \leq x \leq 1$  имеет место формула

$$f(x) = \int_0^1 f(t) dt + \sum_{k=1}^{\nu} \frac{f^{(k-1)}(1) - f^{(k-1)}(0)}{k!} B_k(x) - \frac{1}{\nu!} \int_0^1 f^{(\nu)}(t) B_{\nu}^*(x-t) dt, \quad (10.1)$$

которая дает представление  $f(x)$  через многочлены Бернулли.

Мы докажем формулу (10.1), выполняя преобразование выражения

$$\rho_\nu(x) = \frac{1}{\nu!} \int_0^1 B_\nu^*(x-t) f^{(\nu)}(t) dt. \quad (10.2)$$

При доказательстве будем считать, что  $x$  находится внутри промежутка  $(0, 1)$ :  $0 < x < 1$ . Справедливость формулы (10.1) в замкнутом промежутке  $0 \leq x \leq 1$  будет вытекать из того, что левая и правая части (10.1) суть непрерывные функции от  $x$  при  $0 \leq x \leq 1$ .

Предположим сначала, что  $\nu \geq 2$  и выполним интегрирование по частям в правой части равенства (10.2):

$$\begin{aligned} \rho_\nu(x) &= \frac{1}{\nu!} \int_0^1 B_\nu^*(x-t) f^{(\nu)}(t) dt = \\ &= \frac{1}{\nu!} B_\nu^*(x-t) f^{(\nu-1)}(t) \Big|_0^1 - \frac{1}{\nu!} \int_0^1 f^{(\nu-1)}(t) \frac{d}{dt} [B_\nu^*(x-t)] dt. \end{aligned}$$

На основании формулы (9.18) имеем ( $\nu \geq 2$ )

$$\frac{d}{dt} B_\nu^*(x-t) = -\nu B_{\nu-1}^*(x-t)$$

и, в силу определения  $B_\nu^*(x)$ ,

$$B_\nu^*(x-1) = B_\nu^*(x) = B_\nu(x),$$

поэтому результат интегрирования по частям можно записать следующим образом:

$$\rho_\nu(x) = \frac{1}{\nu!} [f^{(\nu-1)}(1) - f^{(\nu-1)}(0)] B_\nu(x) + \rho_{\nu-1}(x). \quad (10.3)$$

Если  $\nu - 1 > 1$ , то к  $\rho_{\nu-1}(x)$  можно применить формулу (10.3). Далее, применим (10.3) к  $\rho_{\nu-2}(x)$ , если  $\nu - 2 > 1$  и т. д. В результате получим

$$\rho_\nu(x) = \sum_{k=2}^{\nu} \frac{f^{(k-1)}(1) - f^{(k-1)}(0)}{k!} B_k(x) + \rho_1(x). \quad (10.4)$$

При преобразовании

$$\rho_1(x) = \int_0^1 B_1^*(x-t) f'(t) dt$$

нужно принять во внимание, что  $B_1^*(x)$  разрывна в целочисленных точках. Разобьем интеграл в представлении  $\rho_1(x)$  на сумму двух интегралов

$$I_1 = \int_0^x B_1^*(x-t) f'(t) dt, \quad I_2 = \int_x^1 B_1^*(x-t) f'(t) dt,$$

так что

$$\rho_1(x) = I_1 + I_2. \quad (10.5)$$

Будем вычислять  $I_1$  интегрированием по частям:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^x B_1^*(x-t) f'(t) dt = \\ &= B_1^*(x-t) f(t) \Big|_0^{x-0} - \int_0^x f(t) \frac{d}{dt} [B_1^*(x-t)] dt. \end{aligned} \quad (10.6)$$

Очевидно, имеем

$$\frac{d}{dt} B_1^*(x-t) = -1 \quad \text{при} \quad 0 \leq t < x,$$

$$B_1^*(+0) = -\frac{1}{2}, \quad B_1^*(x) = B_1(x),$$

и из (10.6) получаем

$$I_1 = -\frac{1}{2} f(x) - f(0) B_1(x) + \int_0^x f(t) dt. \quad (10.7)$$

Аналогичным образом находим

$$\begin{aligned} I_2 &= B_1^*(x-t) f(t) \Big|_{x+0}^1 - \int_x^1 f(t) \frac{d}{dt} [B_1^*(x-t)] dt = \\ &= -\frac{1}{2} f(x) + f(1) B_1(x) + \int_x^1 f(t) dt. \end{aligned} \quad (10.8)$$

Подставим в (10.5) вместо  $I_1$  и  $I_2$  правые части (10.7) и (10.8). Получим

$$\rho_1(x) = -f(x) + [f(1) - f(0)] B_1(x) + \int_0^1 f(t) dt. \quad (10.9)$$

Сопоставляя (10.2), (10.4) и (10.9), получаем формулу (10.1). При  $\nu = 1$  формула (10.1) обращается в формулу (10.9).

При  $\nu \geq 2$  формулу (10.1) можно записать в виде

$$f(x) = \int_0^1 f(t) dt + \sum_{k=1}^{\nu-1} \frac{f^{(k-1)}(1) - f^{(k-1)}(0)}{k!} B_k(x) - \\ - \frac{1}{\nu!} \int_0^1 f^{(\nu)}(t) [B_\nu^*(x-t) - B_\nu^*(x)] dt, \quad (10.10)$$

если заменить слагаемое, отвечающее  $k = \nu$ , интегралом

$$\frac{f^{(\nu-1)}(1) - f^{(\nu-1)}(0)}{\nu!} B_\nu(x) = \frac{1}{\nu!} B_\nu^*(x) \int_0^1 f^{(\nu)}(t) dt.$$

Предположим теперь, что функция  $f(x)$  задана на промежутке  $[a, a+h]$ ,  $h > 0$ , и  $\nu$  раз ( $\nu \geq 2$ ) непрерывно дифференцируема на нем. Запишем формулу (10.10) для этого случая. Введем новую независимую переменную  $\xi$ ,  $x = a + h\xi$ ,  $0 \leq \xi \leq 1$ . К функции от  $\xi$   $\varphi(\xi) = f(a + h\xi)$ ,  $\nu$  раз непрерывно дифференцируемой при  $0 \leq \xi \leq 1$ , применим формулу (10.10). Получим

$$\varphi(\xi) = \int_0^1 \varphi(\tau) d\tau + \sum_{k=1}^{\nu-1} \frac{\varphi^{(k-1)}(1) - \varphi^{(k-1)}(0)}{k!} B_k(\xi) - \\ - \frac{1}{\nu!} \int_0^1 \varphi^{(\nu)}(\tau) [B_\nu^*(\xi - \tau) - B_\nu^*(\xi)] d\tau. \quad (10.11)$$

В формуле (10.11) вернемся к прежним обозначениям независимой переменной и функции, при этом примем во

внимание соотношения

$$\varphi^{(k)}(\xi) = h^k f^{(k)}(a + h\xi) = h^k f^{(k)}(x),$$

$$\varphi(\tau) = f(a + h\tau) = f(t), \quad t = a + h\tau, \quad dt = h d\tau.$$

Получим

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{h} \int_a^{a+h} f(t) dt + \\ &+ \sum_{k=1}^{\nu-1} \frac{h^{k-1} [f^{(k-1)}(a+h) - f^{(k-1)}(a)]}{k!} B_k\left(\frac{x-a}{h}\right) - \\ &- \frac{h^\nu}{\nu!} \int_0^1 f^{(\nu)}(a+h\tau) \left[ B_\nu^*\left(\frac{x-a}{h} - \tau\right) - B_\nu^*\left(\frac{x-a}{h}\right) \right] d\tau. \end{aligned}$$

Перепишем эту формулу в виде

$$\begin{aligned} \int_a^{a+h} f(t) dt &= hf(x) - h[f(a+h) - f(a)] B_1\left(\frac{x-a}{h}\right) - \\ &- \sum_{k=2}^{\nu-1} \frac{h^k [f^{(k-1)}(a+h) - f^{(k-1)}(a)]}{k!} B_k\left(\frac{x-a}{h}\right) + \\ &+ \frac{h^{\nu+1}}{\nu!} \int_0^1 f^{(\nu)}(a+h\tau) \left[ B_\nu^*\left(\frac{x-a}{h} - \tau\right) - B_\nu^*\left(\frac{x-a}{h}\right) \right] d\tau. \end{aligned} \tag{10.12}$$

Формула (10.12) дает значение интеграла

$$\int_a^{a+h} f(t) dt$$

через значение функции  $f$  в точке  $x$  и через значения функции  $f$  и ее производных до порядка  $\nu - 2$  на концах промежутка  $[a, a+h]$ . Последнее слагаемое формулы (10.12) имеет смысл остаточного члена, в него входит производная порядка  $\nu$  функции  $f(x)$ .

Если в формуле (10.12) мы удерживаем лишь одно слагаемое правой части, то получаем приближенное равенство

$$\int_a^{a+h} f(t) dt \cong hf(x), \tag{10.13}$$

которое представляет собой квадратурную формулу прямоугольников (2.1). Формула (10.13) обращается в точное равенство только в случае, если  $f(t)$  является постоянной.

Запишем формулу (10.12) для  $\nu = 2$ :

$$\int_a^{a+h} f(t) dt = hf(a) - h[f(a+h) - f(a)] B_1\left(\frac{x-a}{h}\right) + \\ + \frac{h^3}{2!} \int_0^1 f''(a+h\tau) \left[ B_2^*\left(\frac{x-a}{h} - \tau\right) - B_2^*\left(\frac{x-a}{h}\right) \right] d\tau. \quad (10.14)$$

Если в правой части этой формулы сохранить лишь два слагаемых, то получим приближенное равенство. Оно будет точным, когда  $f(t)$  — любой многочлен первой степени, так как в этом случае  $f''(t) \equiv 0$  и остаточный член формулы (10.14) обращается в нуль.

Если бы мы удержали в формуле (10.12) три первых члена, то получили бы приближенное равенство, обращающееся в точное, когда  $f(t)$  — многочлен второй степени и т. д.

## § 11. Формула Эйлера—Маклорена

Положим в формуле (10.12)  $x = a$ , при этом примем во внимание равенство  $B_k(0) = B_k$ , периодичность функции  $B_k^*(\tau)$  и ее непрерывность при  $\nu \geq 2$ :

$$B_\nu^*(-\tau) = B_\nu^*(1-\tau) = B_\nu(1-\tau), \quad 0 \leq \tau \leq 1.$$

Получим

$$\int_a^{a+h} f(t) dt = \frac{h}{2} [f(a) + f(a+h)] - \\ - \sum_{k=2}^{\nu-1} \frac{h^k B_k}{k!} [f^{(k-1)}(a+h) - f^{(k-1)}(a)] + \\ + \frac{h^{\nu+1}}{\nu!} \int_0^1 f^{(\nu)}(a+h\tau) [B_\nu(1-\tau) - B_\nu] d\tau. \quad (11.1)$$

Первое слагаемое в правой части (11.1) представляет собой квадратурную сумму малой формулы трапеций (2.21). Следующие слагаемые, как и в случае формулы (10.12), имеют смысл поправок. Таким образом, формула (11.1) уточняет малую формулу трапеций.

Формула Эйлера—Маклорена, к установлению которой мы теперь переходим, предназначена для уточнения большой формулы трапеций. Рассмотрим интеграл

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Положим  $h = \frac{b-a}{n}$  и разобьем промежуток  $[a, b]$  на  $n$  частичных промежутков

$$[a + jh, a + (j+1)h], \quad j = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

К интегралу от  $f(x)$  по частичному промежутку применим формулу (11.1):

$$\begin{aligned} \int_{a+jh}^{a+(j+1)h} f(x) dx &= \frac{h}{2} [f(a+jh) + f(a+(j+1)h)] - \\ &- \sum_{m=2}^{\nu-1} \frac{h^m B_m}{m!} [f^{(m-1)}(a+(j+1)h) - f^{(m-1)}(a+jh)] + \\ &+ \frac{h^{\nu+1}}{\nu!} \int_0^1 f^{(\nu)}(a+jh+h\tau) [B_\nu(1-\tau) - B_\nu] d\tau. \end{aligned} \quad (11.2)$$

Введем обозначение

$$\begin{aligned} T_n = h \left[ \frac{1}{2} f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \dots \right. \\ \left. \dots + f(a+(n-1)h) + \frac{1}{2} f(b) \right] \end{aligned} \quad (11.3)$$

и просуммируем обе части формулы (11.2) по  $j$  от 0 до  $n-1$ . Получим

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx = T_n - \sum_{m=2}^{\nu-1} \frac{h^m B_m}{m!} [f^{(m-1)}(b) - f^{(m-1)}(a)] + \\ + \frac{h^{\nu+1}}{\nu!} \int_0^1 [B_\nu(1-\tau) - B_\nu] \sum_{j=0}^{n-1} f^{(\nu)}(a+jh+h\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (11.4)$$

Это и есть формула Эйлера — Маклорена. Обычно в формуле Эйлера — Маклорена берут четное  $\nu = 2k$ . Тогда множитель  $B_\nu(1-\tau) - B_\nu$  под знаком интеграла в правой части, в силу (9.14), можно записать так:

$$B_{2k}(1-\tau) - B_{2k} = B_{2k}(\tau) - B_{2k} = y_{2k}(\tau).$$

Этот множитель сохраняет знак при  $0 \leq \tau \leq 1$ . Если еще учесть, что  $B_m = 0$  при  $m = 3, 5, 7, \dots$ , то формулу (11.4) можно переписать следующим образом:

$$\int_a^b f(x) dx = T_n - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{h^{2j} B_{2j}}{(2j)!} [f^{(2j-1)}(b) - f^{(2j-1)}(a)] + \\ + \frac{h^{2k+1}}{(2k)!} \int_0^1 [B_{2k}(\tau) - B_{2k}] \sum_{j=0}^{n-1} f^{(2k)}(a + jh + h\tau) d\tau. \quad (11.5)$$

Формулу Эйлера — Маклорена (11.5) применяют как для вычисления интеграла  $\int_a^b f(x) dx$ , так и для вычисления суммы

$$f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \dots + f(b) = \frac{1}{h} T_n + \\ + \frac{1}{2} [f(a) + f(b)].$$

Мы рассматриваем формулу Эйлера — Маклорена как средство для приближенного вычисления интегралов.

Если в правой части формулы Эйлера — Маклорена (11.5) перейти к пределу при  $k \rightarrow \infty$  (формально), то получим ряд

$$T_n - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{h^{2j} B_{2j}}{(2j)!} [f^{(2j-1)}(b) - f^{(2j-1)}(a)]. \quad (11.6)$$

Этот ряд сходится лишь для весьма узкого класса функций  $f(x)$ . Как правило он расходится и его члены быстро возрастают. Отсюда следует, что остаточный член формулы (11.5)

$$R_{2k}(f) = \frac{h^{2k+1}}{(2k)!} \int_0^1 [B_{2k}(\tau) - B_{2k}] \sum_{j=0}^{n-1} f^{(2k)}(a + jh + h\tau) d\tau \quad (11.7)$$

при возрастании  $k$  быстро возрастает. При вычислениях следует  $k$  выбирать так, чтобы остаточный член (11.7) имел возможно меньшую величину.

Укажем две теоремы об остаточном члене формулы Эйлера — Маклорена.

**Теорема 1** (о представлении остатка). Если  $f(x)$  имеет непрерывную производную порядка  $2k$  на  $[a, b]$ , то

$$R_{2k}(f) = -\frac{h^{2k}}{(2k)!} (b-a) B_{2k} f^{(2k)}(\eta), \quad (11.8)$$

где  $a \leq \eta \leq b$ .

Доказательство. Обозначим

$$m = \min_{[a, b]} f^{(2k)}(x), \quad M = \max_{[a, b]} f^{(2k)}(x). \quad (11.9)$$

Предположим, что  $k$  — четное. Тогда

$$y_{2k}(\tau) = B_{2k}(\tau) - B_{2k} > 0$$

при  $0 < \tau < 1$  [см. (9.17)], и мы получаем

$$\begin{aligned} \frac{(2k)!}{h^{2k+1}} R_{2k}(f) &= \int_0^1 [B_{2k}(\tau) - B_{2k}] \sum_{j=0}^{n-1} f^{(2k)}(a + jh + h\tau) d\tau \leq \\ &\leq nM \int_0^1 [B_{2k}(\tau) - B_{2k}] d\tau = -nMB_{2k}. \end{aligned}$$

Аналогично получим

$$\frac{(2k)!}{h^{2k+1}} R_{2k}(f) \geq -nmB_{2k}.$$

Таким образом, имеем

$$-nmB_{2k} \leq \frac{(2k)!}{h^{2k+1}} R_{2k}(f) \leq -nMB_{2k}.$$

Разделим все члены этих неравенств на  $-nB_{2k} > 0$ . Получим

$$m \leq -\frac{(2k)!}{nB_{2k}h^{2k+1}} R_{2k}(f) = P \leq M.$$

Так как  $f^{(2k)}(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ , то найдется такая точка  $\eta$ ,  $a \leq \eta \leq b$ , что

$$P = f^{(2k)}(\eta).$$

Этим доказано (11.8) в случае четного  $k$ . При доказательстве (11.8) для нечетного  $k$  нужно принять во внимание, что  $y_{2k}(\tau) < 0$  при  $0 < \tau < 1$  и  $B_{2k} > 0$ .

Отметим, что при  $k=1$  (11.8) переходит в представление остаточного члена формулы трапеций (2.27).

**Теорема 2** (об оценке остаточного члена). *Если при всех  $x$  из  $[a, b]$*

$$f^{(2k)}(x) \geq 0 \text{ и } f^{(2k+2)}(x) \geq 0 \quad (11.10)$$

[или  $f^{(2k)}(x) \leq 0$  и  $f^{(2k+2)}(x) \leq 0$ ],

то остаточный член формулы Эйлера — Маклорена  $R_{2k}(f)$  имеет знак числа

$$-\frac{h^{2k} B_{2k}}{(2k)!} [f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)] \quad (11.11)$$

и абсолютная величина  $R_{2k}(f)$  не превосходит абсолютной величины числа (11.11).

Доказательство. Очевидно, имеем

$$R_{2k}(f) - R_{2k+2}(f) = -\frac{h^{2k} B_{2k}}{(2k)!} [f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)]. \quad (11.12)$$

В силу предположений (11.10) и свойства

$$\operatorname{sign} y_{2\nu}(\tau) = (-1)^\nu, \quad a < \tau < b$$

знаки  $R_{2k}(f)$  и  $R_{2k+2}(f)$  противоположны. Это вытекает из формулы

$$R_{2\nu}(f) = \frac{h^{2\nu+1}}{(2\nu)!} \int_0^1 [B_{2\nu}(\tau) - B_{2\nu}] \sum_{j=0}^{n-1} f^{(2\nu)}(a + jh + h\tau) d\tau$$

при  $\nu = k$  и  $\nu = k+1$ . Но тогда из формулы (11.12) следует утверждение теоремы.

С помощью формулы Эйлера — Маклорена нетрудно указать представление остаточного члена квадратурной формулы прямоугольников (2.10) для того частного случая, когда  $f(x)$  — периодическая, с периодом  $b-a$ , функция, имеющая непрерывную производную порядка  $2k$  на всей вещественной оси. В самом деле, в силу  $(b-a)$ -периодичности производ-

ных  $f^{(j)}(x)$ , формула Эйлера — Маклорена запишется в более простом виде:

$$\int_a^b f(x) dx = T_n + R_{2k}(f).$$

Ввиду периодичности  $f(x)$ , величина  $T_n$  совпадает с квадратурной суммой формулы прямоугольников, поэтому

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \\ &= \frac{b-a}{n} [f(a) + f(a+h) + \dots + f(a+(n-1)h)] + R_{2k}(f), \end{aligned}$$

и мы получаем, что в рассматриваемом случае остаточный член квадратурной формулы прямоугольников имеет представление (11.8).

В. И. Крылов построил формулы, аналогичные формуле Эйлера — Маклорена, предназначенные для уточнения квадратурных формул общего вида. В частности, имеет место формула, уточняющая квадратурную формулу Гаусса (5.1):

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx &\cong \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + \\ &+ \frac{1}{(2n+1)!} \left[ \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!} \right]^2 [f^{(2n-1)}(1) - f^{(2n-1)}(-1)] + \\ &+ \frac{1}{(2n+2)!} \left[ \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!} \right]^2 \left[ \frac{2n^2 + 2n - 1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} \right] + \\ &+ \frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n+1)} - \frac{n+1}{3} \left] [f^{(2n+1)}(1) - f^{(2n+1)}(-1)] + \dots \end{aligned}$$

(см. гл. 11 из книги [14]).

При вычислении интеграла по формуле Эйлера — Маклорена приходится находить производные подынтегральной функции на концах промежутка интегрирования. Если подынтегральная функция задана аналитически, то можно указать аналитические выражения производных и вычислить их значения на концах промежутка  $[a, b]$ . Если подынтегральная функция задана таблично или задана аналитически, но выра-

жения ее производных неудобны для вычислений, то указанный способ неприменим. Укажем, как поступать в этом случае.

Нам известны значения подынтегральной функции  $f(x)$  при  $x = a + kh$ :  $f_k = f(a + kh)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ , поэтому можно построить таблицу конечных разностей функции  $f(x)$  для  $x = a(h)b$ . Таблица конечных разностей функции  $f(x)$  позволяет указать приближенные значения производных от  $f(x)$  в точках  $a$  и  $b$ . Эти значения даются формулами (11.9) и (11.12) из гл. II:

$$f^{(m)}(a) \cong P_n^{(m)}(a) = \frac{m!}{h^m} \sum_{k=m}^n \frac{S_k^{(m)}}{k!} \Delta^k f_0,$$

$$f^{(m)}(b) \cong P_n^{(m)}(b) = \frac{m!}{h^m} \sum_{k=m}^n (-1)^{k-m} \frac{S_k^{(m)}}{k!} \Delta^k f_{n-k}, \quad (11.13)$$

где числа  $S_k^{(m)}$  определяются равенствами (11.6) из гл. II.

Подставляя приближенные значения производных (11.13) в формулу (11.5), получим

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx \cong T_n &= \frac{h}{12} (\Delta f_{n-1} - \Delta f_0) - \frac{h}{24} (\Delta^2 f_{n-2} + \Delta^2 f_0) - \\ &- \frac{19h}{720} (\Delta^3 f_{n-3} - \Delta^3 f_0) - \frac{3h}{160} (\Delta^4 f_{n-4} + \Delta^4 f_0) - \\ &- \frac{863h}{60480} (\Delta^5 f_{n-5} - \Delta^5 f_0) - \frac{275h}{24192} (\Delta^6 f_{n-6} + \Delta^6 f_0) - \dots \quad (11.14) \end{aligned}$$

Это *формула Грегори*.

Можно доказать, что в формуле (11.14) коэффициент при

$$-h (\Delta^k f_{n-k} + (-1)^k \Delta^k f_0)$$

равен

$$\frac{(-1)^k}{(k+1)!} \int_0^1 t(t-1) \dots (t-k) dt.$$

**Пример.** Интеграл

$$\text{Si}(1) = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$$

уже был вычислен по формуле трапеций в § 2 настоящей главы. Было получено  $T_{10} = 0,945831$ . Уточним это значение при помощи формулы Эйлера — Маклорена.

В § 2 было установлено неравенство (2.30)

$$\left| \frac{d^m}{dx^m} \left( \frac{\sin x}{x} \right) \right| \leq \frac{1}{m+1}.$$

Из представления остаточного члена (11.8) формулы Эйлера — Маклорена находим ( $h = 0,1$ )

$$|R_{2k}| \leq \frac{(0,1)^{2k}}{(2k+1)!} |B_{2k}|. \quad (11.15)$$

Так как при больших  $k$

$$|B_{2k}| \cong 2 \frac{(2k)!}{(2\pi)^{2k}},$$

то ясно, что  $R_{2k}$  быстро стремится к нулю и ряд (11.6) сходится. При  $k=2$  из (11.15) получаем

$$|R_4| < 3 \cdot 10^{-8},$$

так что в формуле (11.5) можно взять  $k=2$ . Так как

$$\frac{h^2 B_2}{2} [f'(1) - f'(0)] = -0,000251,$$

то

$$Si(1) \cong 0,945831 + 0,000251 = 0,946082,$$

что отличается от точного значения на одну единицу шестого десятичного знака. Разница получилась за счет ошибок округления.

## § 12. Заключительные замечания

Существенным моментом приближенного вычисления интегралов является выбор квадратурной формулы. Этот выбор должен определяться многими обстоятельствами: свойствами подынтегральной функции, способом ее задания, вычислительными средствами, имеющимися в распоряжении вычислителя, требуемой точностью и т. д.

Важное значение имеют свойства подынтегральной функции, поэтому, прежде чем решать вопрос о выборе квадра-

турной формулы, мы должны по возможности составить представление о графике функции, о поведении ее производных. Представление о графике функции может, например, подсказать, что промежуток интегрирования следует разбить на части и к интегралу по каждой части промежутка применить свою квадратурную формулу.

Пренебрежение такого рода предварительным исследованием может привести к напрасной трате времени и вычислительного труда. В самом деле, какова бы ни была квадратурная формула, можно указать такую функцию, для которой остаточный член данной квадратурной формулы (при заданном числе узлов) будет сколь угодно большим. Достаточно взять квадрат многочлена, корнями которого являются узлы квадратурной формулы, и умножить этот многочлен на достаточно большую постоянную.

С другой стороны, знание свойств подынтегральной функции и их использование в некоторых случаях может расширить область применения квадратурных формул. Эту мысль мы поясним на примере применения квадратурных формул к вычислению несобственных интегралов и интегралов от колеблющихся функций.

Для определенности промежуток интегрирования будем считать конечным. Вычисление несобственного интеграла с помощью квадратурной формулы вида

$$\int_a^b F(x) dx \cong \sum_{k=1}^n A_k F(x_k) \quad (12.1)$$

невозможно, если хотя бы один узел квадратурной формулы совпадает с особой точкой подынтегральной функции. Если вычисление и возможно, то оно, как правило, приводит к большой ошибке. К этому следует добавить, что и при вычислении собственного интеграла по формуле (12.1) мы можем получить большую ошибку, если  $F(x)$  непрерывна, но ее производная невысокого порядка не ограничена.

Некоторые из указанных в этой главе квадратурных формул можно применять к вычислению несобственных интегралов. Такова, например, формула типа Гаусса (6.2) с весовой функцией

$$p(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad \alpha > -1, \quad \beta > -1.$$

Действительно, если функция  $F(x)$  такова, что ее можно представить в виде

$$F(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta f(x), \quad \alpha > -1, \quad \beta > -1,$$

где  $f(x)$  — достаточное число раз дифференцируемая функция, то для вычисления интеграла  $\int_{-1}^1 F(x) dx$  можно воспользоваться квадратурной формулой (6.2).

Вообще, если подынтегральную функцию  $F(x)$  можно представить в виде

$$F(x) = p(x) f(x),$$

где  $p(x)$  или ее производная низкого порядка не ограничена, а  $f(x)$  имеет достаточное число производных, то для вычисления интеграла естественно воспользоваться интерполяционной квадратурной формулой с весом  $p(x)$ :

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \cong \sum_{k=1}^n A_k f(x_k). \quad (12.2)$$

Такую формулу, как показано в § 1, всегда можно построить, если существуют моменты функции  $p(x)$ .

Интерполяционные квадратурные формулы с весом можно применять также к вычислению интегралов вида

$$\int_0^T \varphi(Nx) f(x) dx, \quad (12.3)$$

где  $\varphi(x)$  есть  $T$ -периодическая функция и  $N$  — натуральное число, а  $f(x)$  — достаточное число раз дифференцируемая и медленно изменяющаяся функция. Функцию  $\varphi(Nx) f(x)$  будем называть *колеблющейся*. Непосредственное применение квадратурной формулы вида (12.1) к вычислению интеграла (12.3) при больших  $N$  затруднено тем, что для достаточно точного приближения  $\varphi(Nx) f(x)$  с помощью многочленов пришлось бы взять весьма много узлов.

Для вычисления интеграла (12.3) целесообразно воспользоваться интерполяционной квадратурной формулой (12.2) с весом  $p(x) = \varphi(Nx)$ , так как  $f(x)$  допускает хорошее

приближение многочленами на всем промежутке интегрирования. Формулы такого вида для  $\varphi(x) = \sin x, \cos x$  рассмотрены в [24].

В некоторых случаях особенность подынтегральной функции или ее производной невысокого порядка можно ослабить, выполнив интегрирование по частям. Пусть, например, функция  $F(x)$  имеет вид

$$F(x) = (x - x_1)^\alpha f(x), \quad \alpha > -1,$$

где  $x_1$  принадлежит промежутку  $[a, b]$ , число  $\alpha$  отлично от целого,  $f(x)$  имеет достаточное число производных на  $[a, b]$  и  $f(x_1) \neq 0$ . Записывая интеграл в виде

$$\int_a^b F(x) dx = \int_a^{x_1} F(x) dx + \int_{x_1}^b F(x) dx$$

и применяя к каждому интегралу в правой части формулу интегрирования по частям, получим

$$\begin{aligned} \int_a^b (x - x_1)^\alpha f(x) dx &= \\ &= \frac{1}{\alpha + 1} [f(b)(b - x_1)^{\alpha+1} - f(a)(a - x_1)^{\alpha+1}] - \\ &\quad - \frac{1}{\alpha + 1} \int_a^b (x - x_1)^{\alpha+1} f'(x) dx. \end{aligned} \quad (12.4)$$

Производная порядка  $[\alpha + 1]$  функции  $F(x)$  имеет особенность в точке  $x_1$ , в частности, при  $\alpha < 0$  точка  $x_1$  является особой для  $F(x)$ . Функция под знаком интеграла в правой части (12.4) непрерывна, а  $x_1$  — особая точка ее производной порядка  $[\alpha + 2]$ . Применяя к этому интегралу формулу интегрирования по частям  $k$  раз, мы увеличим порядок дифференцируемости подынтегральной функции в точке  $x_1$  на  $k$  единиц.

Интегрирование по частям оказывается полезным и при вычислении интегралов вида (12.3). Ограничимся рассмотрением частного случая

$$\int_0^1 f(x) \sin 2\pi Nx dx.$$

Интегрируя  $2k$  раз по частям, получим

$$\int_0^1 f(x) \sin 2\pi Nx \, dx = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^{j+1}}{(2\pi N)^{2j+1}} [f^{(2j)}(1) - f^{(2j)}(0)] + \\ + (-1)^k \frac{1}{(2\pi N)^{2k}} \int_0^1 f^{(2k)}(x) \sin 2\pi Nx \, dx.$$

Если  $N$  достаточно большое, то множитель перед интегралом в правой части будет малым, и вычисление этого интеграла можно производить с меньшей точностью, чем вычисление исходного интеграла.

Общий случай, когда в интеграле (12.3)  $\varphi(x)$  — произвольная  $T$ -периодическая функция, рассмотрен в работе [4]. Вопрос о вычислении интегралов от колеблющихся функций более общего, чем в (12.3) вида, рассмотрен в [16].

## ГЛАВА IV

# ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

### § 1. Введение

В настоящей главе мы будем заниматься численными методами решения обыкновенных дифференциальных уравнений или систем таких уравнений. Для определенности будем говорить сейчас об одном дифференциальном уравнении порядка  $n$

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \quad (1.1)$$

Известно, что решение уравнения (1.1) не определяется однозначно этим уравнением. Общее решение этого уравнения зависит, вообще говоря, от  $n$  произвольных постоянных. Численные методы применяются к нахождению частных решений уравнения (1.1). Чтобы получить частное решение дифференциального уравнения (1.1), мы должны искомое решение подчинить некоторым  $n$  дополнительным условиям.

Большое значение имеют два рода задач, связанных с определением частных решений уравнения (1.1): *задачи Коши*, или *задачи с начальными данными*, и *граничные задачи*.

Задача Коши формулируется следующим образом: найти то решение  $y(x)$  дифференциального уравнения (1.1), которое при  $x = x_0$  удовлетворяет условиям:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \quad (1.2)$$

Характерным для задачи Коши является то, что условия (1.2) задаются в одной точке  $x = x_0$ .

В случае граничных задач условия задаются не в одной, а в нескольких точках. Например, в случае дифференциаль-

ного уравнения второго порядка

$$y'' = f(x, y, y') \quad (1.3)$$

можно рассматривать такую двухточечную граничную задачу: найти то решение  $y(x)$  дифференциального уравнения (1.3) на промежутке  $[x_0, X]$ , которое удовлетворяет условиям

$$y(x_0) = A, \quad y(X) = B.$$

Здесь  $A$  и  $B$  — заданные постоянные числа.

В последующем мы будем заниматься численными методами решения задачи Коши и совсем не будем касаться вопроса о решении граничных задач. Отметим только, что имеются способы, позволяющие нахождение решения граничной задачи привести к отысканию решений ряда задач Коши для рассматриваемого дифференциального уравнения.

Рассматриваемые в настоящей главе методы позволяют построить таблицу приближенных значений решения задачи Коши. Эта таблица, например, в случае задачи Коши для системы двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$\left. \begin{aligned} y' &= f(x, y, z), \\ z' &= g(x, y, z), \end{aligned} \right\} \quad y(x_0) = y_0, \quad z(x_0) = z_0$$

имеет вид

$x$	$y$	$z$
$x_0$	$y_0$	$z_0$
$x_1$	$y_1$	$z_1$
$x_2$	$y_2$	$z_2$
...	...	...
$x_N$	$y_N$	$z_N$

где  $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N$  и  $y_j \cong y(x_j)$ ,  $z_j \cong z(x_j)$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ).

## § 2. Метод Рунге — Кутта

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (2.1)$$

Предполагаем, что решение  $y(x)$  задачи (2.1) существует. Метод Рунге — Кутта позволяет по дифференциальному уравнению и начальному условию (2.1) вычислить приближенное значение решения  $y(x)$  в точке  $x_1 = x_0 + h$ ,  $h > 0$ .

Делается это так. Последовательно вычисляются четыре числа  $k_1, k_2, k_3, k_4$  по формулам

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_0, y_0), \\ k_2 &= hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right), \\ k_3 &= hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right), \\ k_4 &= hf(x_0 + h, y_0 + k_3). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Величина

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (2.3)$$

принимается за приближенное значение  $y(x_1)$ . По  $y_1 \cong y(x_1)$  таким же путем вычисляем  $y_2 \cong y(x_2)$ , где  $x_2 = x_1 + h$ , и т. д. Заметим, что аргументы  $x_0, x_1, x_2, \dots$  не обязательно брать равноотстоящими.

Приближенное равенство

$$y(x_0 + h) - y_0 \cong \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (2.4)$$

является обобщением квадратурной формулы Симпсона в следующем отношении. Имеем равенство

$$y(x_0 + h) - y_0 = \int_{x_0}^{x_0+h} y'(x) dx = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x, y(x)) dx.$$

Если  $f(x, y) = f(x)$  не зависит от  $y$ , то мы можем вычислить интеграл в правой части последнего равенства по

формуле Симпсона. Получим

$$y(x_0 + h) - y_0 \cong \frac{h}{6} \left[ f(x_0) + 4f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) + f(x_0 + h) \right], \quad (2.5)$$

что совпадает с (2.4).

Предположим, что  $f(x)$  разлагается в окрестности точки  $x_0$  в ряд Тэйлора. Разложим левую и правую часть приближенного равенства (2.5) в ряд Тэйлора по степеням  $h$  в окрестности  $h=0$ . Нетрудно видеть, что коэффициент при  $h^k$  разложения в левой части совпадает с коэффициентом при  $h^k$  в правой части при  $k=0, 1, 2, 3, 4$ . Это утверждение вытекает из того, что приближенное равенство (2.5) обращается в равенство точное, если  $f(x)$  — многочлен третьей степени (для такой  $f(x)$  формула Симпсона точна).

Оказывается, что и в общем случае, когда правая часть дифференциального уравнения (2.1) зависит от  $y$ , имеет место аналогичное утверждение. Именно, если разложить левую и правую части приближенного равенства (2.4) в ряды Тэйлора по степеням  $h$  в окрестности  $h=0$ , то у этих разложений будут совпадающими коэффициенты при  $h^k$  для  $k=0, 1, 2, 3, 4$ . Это утверждение мы докажем, при этом будем предполагать, что правая часть дифференциального уравнения  $f(x, y)$  имеет достаточное число производных в некоторой области  $D$  плоскости  $(x, y)$ , содержащей график решения  $y=y(x)$ .

При доказательстве мы фактически найдем коэффициенты упомянутых разложений в ряды Тэйлора при  $h^k$ ,  $k=1, 2, 3, 4$ . Эти коэффициенты будут выражаться через частные производные от правой части  $f(x, y)$  дифференциального уравнения, вычисленные в начальной точке  $(x_0, y_0)$ . Например, коэффициент при  $\frac{h^2}{2!}$  в разложении левой части (2.4) равен

$$y''(x_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + f(x_0, y_0) \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}. \quad (2.6)$$

Для упрощения записи удобно ввести следующий оператор дифференцирования

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + f(x, y) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Оператор  $D$  можно применять к любой дифференцируемой функции двух переменных  $u(x, y)$ , при этом

$$Du = \frac{\partial u}{\partial x} + f \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Отметим некоторые свойства оператора  $D$ :

1)  $D(c_1u + c_2v) = c_1Du + c_2Dv$ ,  $c_1, c_2$  — постоянные,

2)  $D(uv) = uDv + vDu$ .

Эти свойства очевидны.

Определим  $n$ -ю степень оператора  $D$ :

$$D^n = \left( \frac{\partial}{\partial x} + f \frac{\partial}{\partial y} \right)^n = \sum_{\nu=0}^n C_n^{(\nu)} f^\nu \frac{\partial^n}{\partial x^{n-\nu} \partial y^\nu} \quad (2.7)$$

(здесь  $n$  — натуральное число). Докажем следующее свойство оператора  $D$ :

3)  $D(D^n f) = D^{n+1} f + nDf \cdot D^{n-1} \frac{\partial f}{\partial y}$ .

В силу определения (2.7) имеем

$$D^n f = \sum_{\nu=0}^n C_n^{(\nu)} f^\nu \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-\nu} \partial y^\nu}.$$

Применим к обеим частям этого равенства оператор  $D$  и воспользуемся свойствами 1) и 2):

$$\begin{aligned} D(D^n f) &= \sum_{\nu=0}^n C_n^{(\nu)} D \left[ f^\nu \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-\nu} \partial y^\nu} \right] = \\ &= \sum_{\nu=0}^n C_n^{(\nu)} f^\nu D \left( \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-\nu} \partial y^\nu} \right) + \sum_{\nu=0}^n C_n^{(\nu)} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-\nu} \partial y^\nu} Df^\nu. \quad (2.8) \end{aligned}$$

Преобразуем первую сумму в правой части (2.8):

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^n C_n^{(\nu)} f^\nu D \left( \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-\nu} \partial y^\nu} \right) &= \\ &= \sum_{\nu=0}^n C_n^{(\nu)} f^\nu \left( \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n-\nu+1} \partial y^\nu} + f \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n-\nu} \partial y^{\nu+1}} \right) = \\ &= \sum_{\nu=0}^n C_n^{(\nu)} f^\nu \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n-\nu+1} \partial y^\nu} + \sum_{\nu'=1}^{n+1} C_n^{(\nu'-1)} f^{\nu'} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n-\nu'+1} \partial y^{\nu'}}. \end{aligned}$$

Объединяя попарно слагаемые, получающиеся при  $\nu' = \nu$ , и принимая во внимание соотношение

$$C_n^{(\nu)} + C_n^{(\nu-1)} = C_{n+1}^{(\nu)},$$

получим

$$\sum_{\nu=0}^n C_n^{(\nu)} f^\nu D \left( \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-\nu} \partial y^\nu} \right) = \sum_{\nu=0}^{n+1} C_{n+1}^{(\nu)} f^\nu \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-\nu} \partial y^\nu} = D^{n+1} f. \quad (2.9)$$

Преобразуем теперь вторую сумму в правой части (2.8):

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^n C_n^{(\nu)} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-\nu} \partial y^\nu} D f^\nu &= D f \sum_{\nu=1}^n C_n^{(\nu)} \nu f^{\nu-1} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-\nu} \partial y^\nu} = \\ &= n D f \sum_{\nu=1}^n C_{n-1}^{(\nu-1)} f^{\nu-1} \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-\nu} \partial y^{\nu-1}} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \\ &= n D f \sum_{\nu'=0}^{n-1} C_{n-1}^{(\nu')} f^{\nu'} \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1-\nu'} \partial y^{\nu'}} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \\ &= n D f \cdot D^{n-1} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right). \quad (2.10) \end{aligned}$$

Остается сопоставить соотношения (2.8), (2.9) и (2.10), чтобы убедиться в правильности свойства 3).

Теперь нетрудно записать производные от решения  $y(x)$  задачи (2.1) в точке  $x = x_0$ . Пользуясь свойствами опера-

тора  $D$ , последовательно получаем:

$$y' = f,$$

$$y'' = \frac{d}{dx} f = Df,$$

$$y''' = \frac{d}{dx} y'' = D(Df) = D^2f + Df \cdot \frac{\partial f}{\partial y},$$

$$\begin{aligned} y^{(IV)} &= \frac{d}{dx} y''' = D[D^2f + Df \cdot \frac{\partial f}{\partial y}] = \\ &= D(D^2f) + D[Df \cdot \frac{\partial f}{\partial y}] = D(D^2f) + Df \cdot D \frac{\partial f}{\partial y} + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial y} D(Df) = D^3f + 2Df \cdot D \frac{\partial f}{\partial y} + Df \cdot D \frac{\partial f}{\partial y} + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial y} [D^2f + Df \cdot \frac{\partial f}{\partial y}] = D^3f + 3Df \cdot D \frac{\partial f}{\partial y} + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial y} [D^2f + Df \cdot \frac{\partial f}{\partial y}]. \end{aligned}$$

Таким образом, разложение левой части соотношения (2.4) по степеням  $h$  в окрестности  $h=0$  имеет вид

$$\begin{aligned} y(x_0 + h) - y_0 &= hf + \frac{h^2}{2} Df + \frac{h^3}{6} [D^2f + \frac{\partial f}{\partial y} Df] + \\ &+ \frac{h^4}{24} \left\{ D^3f + 3Df \cdot D \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} [D^2f + \frac{\partial f}{\partial y} Df] \right\} + \dots \end{aligned} \quad (2.11)$$

Для упрощения записи мы не указываем в обозначениях, что все функции  $f$ ,  $Df$  и т. д. берутся при  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ .

Будем теперь раскладывать в ряды Тэйлора по степеням  $h$  в окрестности  $h=0$  величины  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ ,  $k_4$ , определяемые формулами (2.2). Очевидно,

$$k_1 = hf(x_0, y_0) = hf. \quad (2.12)$$

При разложении  $k_2$  воспользуемся формулой Тэйлора для функции двух переменных:

$$\begin{aligned} k_2 &= hf \left( x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2} \right) = \\ &= h \left\{ f + \frac{1}{1!} \left( \frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{k_1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \right) f + \frac{1}{2!} \left( \frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{k_1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3!} \left( \frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{k_1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \right)^3 f + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Подставим сюда  $k_1 = hf$  и полученное выражение запишем более коротко при помощи оператора  $D$ :

$$k_2 = hf + \frac{h^2}{2} Df + \frac{h^3}{8} D^2f + \frac{h^4}{48} D^3f + \dots \quad (2.13)$$

Запишем разложение  $k_3$ :

$$k_3 = hf \left( x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2} \right) = h \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \left( \frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{k_2}{2} \frac{\partial}{\partial y} \right)^l f.$$

Чтобы получить в разложении  $k_3$  члены, содержащие  $h$  в степени до четвертой включительно, достаточно в выражение

$$\left( \frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{k_2}{2} \frac{\partial}{\partial y} \right)^l f,$$

при  $l = 1, 2, 3$ , вместо  $k_2$  подставить  $4 - l$  слагаемых правой части (2.13). Выполним такую подстановку и сделаем простые преобразования:

$$\begin{aligned} k_3 &= hf + h \left[ \frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( hf + \frac{h^2}{2} Df + \frac{h^3}{8} D^2f + \dots \right) \frac{\partial}{\partial y} \right] f + \\ &\quad + \frac{h}{2} \left[ \frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( hf + \frac{h^2}{2} Df + \dots \right) \frac{\partial}{\partial y} \right]^2 f + \\ &\quad + \frac{h}{6} \left[ \frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( hf + \dots \right) \frac{\partial}{\partial y} \right]^3 f + \dots = \\ &= hf + \frac{h^2}{2} Df + \frac{h^3}{4} \frac{\partial f}{\partial y} Df + \frac{h^4}{16} \frac{\partial f}{\partial y} D^2f + \dots \\ &\quad \dots + \frac{h}{2} \left[ \frac{h}{2} D + \frac{h^2}{4} Df \frac{\partial}{\partial y} + \dots \right]^2 f + \frac{h^4}{48} D^3f + \dots \end{aligned}$$

Получим

$$k_3 = hf + \frac{h^2}{2} Df + \frac{h^3}{4} \frac{\partial f}{\partial y} Df + \frac{h^3}{8} D^2f + \\ + \frac{h^4}{16} \frac{\partial f}{\partial y} D^2f + \frac{h^4}{8} Df \cdot D \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{h^4}{48} D^3f + \dots \quad (2.14)$$

Переходим к разложению  $k_4$ . Имеем

$$k_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3) = h \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k_3 \frac{\partial}{\partial y} \right)^l f.$$

Подставим вместо  $k_3$  правую часть (2.14). Получим

$$k_4 = hf + h \left[ h \frac{\partial}{\partial x} + \left( hf + \frac{h^2}{2} Df + \frac{h^3}{4} \frac{\partial f}{\partial y} Df + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{h^3}{8} D^2f + \dots \right) \frac{\partial}{\partial y} \right] f + \frac{h}{2} \left[ h \frac{\partial}{\partial x} + \left( hf + \frac{h^2}{2} Df + \dots \right) \frac{\partial}{\partial y} \right]^2 f + \\ + \frac{h}{6} \left[ h \frac{\partial}{\partial x} + \left( hf + \dots \right) \frac{\partial}{\partial y} \right]^3 f + \dots = hf + h^2 Df + \\ + \frac{h^3}{2} \frac{\partial f}{\partial y} Df + \frac{h^4}{4} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 Df + \frac{h^4}{8} \frac{\partial f}{\partial y} D^2f + \dots \\ \dots + \frac{h}{2} \left[ hD + \frac{h^2}{2} Df \frac{\partial}{\partial y} + \dots \right]^2 f + \frac{h^4}{6} D^3f + \dots$$

Окончательно найдем:

$$k_4 = hf + h^2 Df + \frac{h^3}{2} \frac{\partial f}{\partial y} Df + \frac{h^3}{2} D^2f + \frac{h^4}{4} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 Df + \\ + \frac{h^4}{8} \frac{\partial f}{\partial y} D^2f + \frac{h^4}{2} Df \cdot D \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{h^4}{6} D^3f + \dots \quad (2.15)$$

Теперь мы можем написать первые четыре члена разложения в ряд Тэйлора величины

$$\frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \\ = A_1 h + A_2 h^2 + A_3 h^3 + A_4 h^4 + \dots \quad (2.16)$$

составляя линейную комбинацию, указанную в левой части (2.16), при помощи формул (2.12), (2.13), (2.14), (2.15).

Легко убедиться, что  $A_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , совпадают с соответствующими коэффициентами разложения (2.11). Например,

$$A_3 = \frac{1}{6} \left[ 2 \cdot \frac{1}{8} D^2 f + 2 \left( \frac{1}{4} \frac{\partial f}{\partial y} Df + \frac{1}{8} D^2 f \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y} Df + \frac{1}{2} D^2 f \right] = \frac{1}{6} \left( D^2 f + \frac{\partial f}{\partial y} Df \right),$$

что совпадает с коэффициентом при  $h^3$  в разложении (2.11).

Выше мы уже отмечали, что если  $f(x, y)$  не зависит от  $y$  и является многочленом от  $x$  степени не выше трех (в рассматриваемом случае это равносильно тому, что решение  $y(x)$  является многочленом степени не выше четырех), то метод Рунге — Кутты при любом  $h$  дает точное значение решения  $y(x)$ . В общем случае, когда  $f(x, y)$  зависит от  $y$  и решение  $y(x)$  является многочленом степени не выше четырех, не совпадающим с многочленом первой степени, это обстоятельство не имеет места.

Вычисления по методу Рунге — Кутты располагают в схему:

$x$	$y$	$hf(x, y)$	$k$
$x_0$	$y_0$	$k_1 = hf(x_0, y_0)$	$k = \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$
$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{k_1}{2}$	$k_2 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right)$	
$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{k_2}{2}$	$k_3 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right)$	
$x_0 + h$	$y_0 + k_3$	$k_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3)$	
$x_1 = x_0 + h$	$y_1 = y_0 + k$	...	...

Основное достоинство метода Рунге — Кутта по сравнению с излагаемыми ниже разностными методами состоит в том, что при его применении не требуется построение так называемого начала таблицы. Другое преимущество метода Рунге — Кутта состоит в том, что в ходе вычисления можно менять величину шага  $h$ , не производя при этом дополнительных вычислений.

Вместе с тем метод Рунге — Кутта обладает существенными недостатками. Он более трудоемок, чем разностные методы, так как на каждом шаге приходится вычислять четыре значения правой части  $f(x, y)$  дифференциального уравнения. Как мы увидим, в случае разностных методов на каждом шаге нужно вычислять одно значение  $f(x, y)$  (экстраполяционный метод Адамса) или практически самое большее два — три (интерполяционные методы). Далее, вычислительная схема метода Рунге — Кутта не содержит в себе элементов контроля правильности вычислений.

Метод Рунге — Кутта можно применять для решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Приведем соответствующие формулы для случая системы двух уравнений:

$$\left. \begin{aligned} y' &= f(x, y, z), \\ z' &= g(x, y, z), \end{aligned} \right\} \begin{aligned} y(x_0) &= y_0, \\ z(x_0) &= z_0. \end{aligned}$$

Вычисляются последовательно пары чисел  $(k_j, l_j)$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ :

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_0, y_0, z_0), & l_1 &= hg(x_0, y_0, z_0), \\ k_2 &= hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}, z_0 + \frac{l_1}{2}\right), & l_2 &= hg\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}, z_0 + \frac{l_1}{2}\right), \\ k_3 &= hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}, z_0 + \frac{l_2}{2}\right), & l_3 &= hg\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}, z_0 + \frac{l_2}{2}\right), \\ k_4 &= hf(x_0 + h, y_0 + k_3, z_0 + l_3), & l_4 &= hg(x_0 + h, y_0 + k_3, z_0 + l_3). \end{aligned}$$

В качестве приближенных значений для  $y(x_0 + h)$  и  $z(x_0 + h)$  берутся числа

$$y(x_0 + h) \cong y_0 + k, \quad z(x_0 + h) \cong z_0 + l,$$

где

$$k = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad l = \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4).$$

В книге [12] изложено обобщение метода Рунге — Кутта на случай задачи Коши для дифференциального уравнения порядка  $n$ :

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

**Пример.** Найдем численное решение задачи Коши

$$y' = 0,25y^2 + x^2, \quad y(0) = -1 \quad (2.17)$$

на промежутке  $[0, 1]$  методом Рунге — Кутта.

Прежде всего нужно убедиться, что решение задачи (2.17) на промежутке  $[0, 1]$  существует. Воспользуемся следующей теоремой из теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Теорема Пикара. Предположим, что в прямоугольнике  $R$

$$|x - x_0| \leq a, \quad |y - y_0| \leq b$$

функция  $f(x, y)$  непрерывна как функция совокупности переменных  $(x, y)$  и удовлетворяет условию Липшица по  $y$

$$|f(x, y') - f(x, y'')| \leq L|y' - y''|.$$

Пусть

$$M = \max_R |f(x, y)|.$$

Тогда задача Коши

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

имеет единственное решение  $y = y(x)$  на промежутке

$$|x - x_0| \leq c,$$

где  $c = \min \left[ a, \frac{b}{M} \right]$ , при этом график решения расположен в прямоугольнике  $R$ .

Теорема Пикара позволяет утверждать, что задача (2.17) имеет решение на промежутке  $|x| \leq 0,7$ . В самом деле, возьмем  $a = 0,7$ ,  $b = 1,2$ . В прямоугольнике

$$|x| \leq 0,7, \quad |y + 1| \leq 1,2$$

наибольшее значение функции  $f(x, y) = 0,25y^2 + x^2$  равно

$$M = 0,25(1 + b)^2 + a^2 = 1,7.$$

Так как  $\frac{b}{M} = \frac{1,2}{1,7} > 0,7$ , то  $c = 0,7$ . Отметим, что при ином выборе параметров  $a$  и  $b$  мы не получим существенного увеличения  $c$ .

Однако можно показать, что последовательные приближения, определяемые в доказательстве теоремы Пикара

$$y_{n+1}(x) = -1 + \int_0^x [0,25y_n^2(t) + t^2] dt, \quad y_0(x) = -1,$$

при  $x \geq 0$  принадлежат прямоугольнику

$$0 \leq x \leq 1,2, \quad -1 \leq y \leq 0.$$

Отсюда уже нетрудно сделать заключение о существовании решения задачи (2.17) на промежутке  $[0; 1,2]$ .

Будем строить численное решение задачи (2.17) для равноотстоящих с шагом  $h = 0,1$  значений аргумента с пятью десятичными знаками. Мы берем  $h = 0,1$  по следующей причине. Запишем искомое решение  $y(x)$  в виде ряда по степеням  $x$ :

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!} x + \frac{y''(0)}{2!} x^2 + \dots$$

Чтобы получить с помощью этого ряда приближенное значение  $y(0,1)$  с пятью верными десятичными знаками, достаточно удержать члены ряда, содержащие степени  $x$  до четвертой включительно (см. § 5, пример 1). Это дает основание полагать, что метод Рунге — Кутта, по крайней мере в начале вычисления, будет давать значения, верные с пятью десятичными знаками. Результаты вычислений приведены в табл. 30.

### § 3. О разностных методах решения задачи Коши

Основную идею разностных методов решения задачи Коши мы изложим для случая одного дифференциального уравнения первого порядка

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (3.1)$$

Пусть требуется найти численное решение задачи (3.1) на конечном промежутке  $[x_0, X]$ , где  $X > x_0$ . Предполагаем,

Таблица 30

$x$	$y$	0,25y	$hf(x, y)$	$\frac{h}{2} f(x, y)$	$k_1 + 2k_2 +$ $+ 2k_3 + k_4$	$\frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 +$ $+ 2k_3 + k_4)$
0	-1	-0,25	0,025	0,01250		
0,05	-0,98750	-0,24688	0,024629	0,01231	0,148317	0,02472
0,05	-0,98769	-0,24692	0,024638			
0,1	-0,97536	-0,24384	0,024783			
0,1	-0,97528	-0,24382	0,024779	0,01239		
0,15	-0,96289	-0,24072	0,025429	0,01271	0,153020	0,02550
0,15	-0,96257	-0,24064	0,025413			
0,2	-0,94987	-0,23747	0,026557			
0,2	-0,94978	-0,23745	0,026553	0,01328		
0,25	-0,93650	-0,23413	0,028176	0,01409	0,169417	0,02824
0,25	-0,93569	-0,23392	0,028138			
0,3	-0,92164	-0,23041	0,030236			
0,3	-0,92154	-0,23039	0,030231	0,01512		
0,35	-0,90642	-0,22661	0,032790	0,01640	0,197024	0,03284
0,35	-0,90514	-0,22629	0,032732			
0,4	-0,88881	-0,22220	0,035749			
0,4	-0,88870	-0,22218	0,035745	0,01787		
0,45	-0,87083	-0,21771	0,039209	0,01960	0,235475	0,03925
0,45	-0,86910	-0,21728	0,039131			
0,5	-0,84957	-0,21239	0,043044			
0,5	-0,84945	-0,21236	0,043039	0,02152		
0,55	-0,82793	-0,20698	0,047386	0,02369	0,284491	0,04742
0,55	-0,82576	-0,20644	0,047297			
0,6	-0,80215	-0,20054	0,052086			
0,6	-0,80203	-0,20051	0,052082	0,02604		
0,65	-0,77599	-0,19400	0,057304	0,02865	0,343965	0,05733
0,65	-0,77483	-0,18621	0,062869			
0,7	-0,74483	-0,18621	0,062869			
0,7	-0,74470	-0,18618	0,062865	0,03143		
0,75	-0,71327	-0,17832	0,068969	0,03448	0,413944	0,06899
0,75	-0,71022	-0,17756	0,068861			
0,8	-0,67584	-0,16896	0,075419			
0,8	-0,67571	-0,16893	0,075415	0,03771		
0,85	-0,63800	-0,15950	0,082426	0,04121	0,494700	0,08245
0,85	-0,63450	-0,15863	0,082315			
0,9	-0,59339	-0,14885	0,089803			
0,9	-0,59326	-0,14832	0,089800	0,04490		
0,95	-0,54836	-0,13709	0,097767	0,04888	0,586792	0,09780
0,95	-0,54438	-0,13610	0,097659			
1	-0,49560	-0,12390	0,106140			
1	-0,49546					

конечно, что решение  $y(x)$  задачи (3.1) на промежутке  $[x_0, X]$  существует. Считаем также, что в некоторой замкнутой области  $D$  на плоскости  $(x, y)$ , содержащей график решения  $y=y(x)$  на  $[x_0, X]$ , функция  $f(x, y)$  непрерывна как функция совокупности переменных  $(x, y)$  и имеет непрерывные частные производные (в том числе и смешанные) до требуемого порядка  $l$ . Из этого предположения вытекает, что решение  $y(x)$  на промежутке  $[x_0, X]$  имеет непрерывную производную порядка  $l+1$ .

Область  $D$  предполагаем выпуклой по  $y$ . Это означает, что если любые две точки  $(x, y')$  и  $(x, y'')$  принадлежат области  $D$ , то и соединяющий их отрезок также принадлежит  $D$ . В качестве  $D$  можно брать, например, криволинейную полосу

$$x_0 \leq x \leq X, \quad -\rho \leq y(x) - y \leq \rho, \quad \rho > 0$$

(см. рис. 22). Указанные предположения о задаче (3.1) будем считать всегда выполненными.

Пусть  $h > 0$  и

$$x_j = x_0 + jh, \quad j = 0, 1, 2, \dots, N, \quad (3.2)$$

— равноотстоящие с шагом  $h$  точки, расположенные на промежутке  $[x_0, X]$ :

$$x_0 + Nh \leq X < x_0 + (N+1)h.$$

Число  $h$  будем называть *шагом интегрирования*.\*)

Предположим, что известны приближенные значения решения  $y(x)$  в точках

$$x_0, x_1, \dots, x_k,$$

где  $k < N$ . Обозначим эти значения через

$$y_0, y_1, \dots, y_k, \quad (3.3)$$

---

\*) Говоря о равноотстоящих значениях аргумента, мы не принимаем во внимание возможного в ходе численного интегрирования изменения величины шага  $h$ .

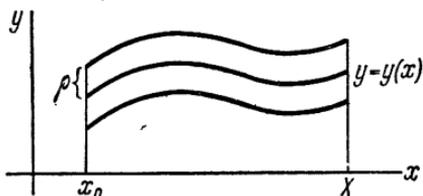


Рис. 22.

так что

$$y_j \cong y(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Значение  $y_0$  задано и оно совпадает с  $y(x_0)$ . Если  $k \geq 1$ , то  $y_1, y_2, \dots, y_k$  должны быть вычислены каким-либо другим методом, например методом Рунге—Кутты.

Числа (3.3), которые можно записать в виде таблицы

$x$	$x_0$	$x_1$	$\dots$	$x_k$
$y$	$y_0$	$y_1$	$\dots$	$y_k$

называются *начальными значениями* или *началом таблицы*. Методы построения начала таблицы мы рассмотрим в § 5.

Разностные методы позволяют продолжить начало таблицы: вычислить приближенные значения  $y(x)$  в точках (3.2) при  $j \geq k+1$ . Эти приближенные значения будем обозначать, как и начальные значения (3.3), через  $y_j$ :

$$y_j \cong y(x_j), \quad j = k+1, k+2, \dots, N.$$

Пусть уже вычислены значения

$$y_0, y_1, \dots, y_n \quad (3.4)$$

при  $n \geq k$ . Основой вычисления  $y_{n+1}$  разностными методами является алгебраическое интерполирование. Построим интерполяционный многочлен функции  $y'(x)$  — производной от решения  $y(x)$  задачи (3.1) — по ее значениям в следующих  $k+p+1$  узлах:

$$x_{n-k}, x_{n-k+1}, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+p}. \quad (3.5)$$

Здесь  $n+p < N$ .

Интерполяционный многочлен возьмем в форме Лагранжа

$$P(x) = \sum_{j=-p}^k \frac{\omega(x)}{(x-x_{n-j})\omega'(x_{n-j})} y'(x_{n-j}), \quad (3.6)$$

где

$$\omega(x) = (x-x_{n-k})(x-x_{n-k+1}) \dots (x-x_{n+p}).$$

Имеем

$$y'(x) = P(x) + r(x), \quad (3.7)$$

где  $r(x)$  — остаточный член интерполирования.

Если  $f(x, y)$  в области  $D$  имеет непрерывные частные производные до порядка  $l = k + p + 1$  включительно, то остаточный член можно представить в виде

$$r(x) = \frac{\omega(x)}{(k+p+1)!} y^{(k+p+2)}(\eta). \quad (3.8)$$

Так как представление (3.8) мы будем использовать на промежутке  $[x_n, x_{n+1}]$ , то считаем, что  $x_{n-k} \leq \eta \leq x_{n+p}$  при  $p \geq 1$  и  $x_{n-k} \leq \eta \leq x_{n+1}$  при  $p = 0$ .

В формуле

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x) dx \quad (3.9)$$

заменяем  $y'(x)$  правой частью равенства (3.7). Получим

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} P(x) dx + \int_{x_n}^{x_{n+1}} r(x) dx. \quad (3.10)$$

Преобразуем первый из интегралов в правой части равенства (3.10). В силу (3.6) имеем

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} P(x) dx = \sum_{j=-}^k I_j y'(x_{n-j}), \quad (3.11)$$

где

$$I_j = \int_{x_n}^{x_n+h} \frac{\omega(x)}{(x-x_{n-j}) \omega'(x_{n-j})} dx. \quad (3.12)$$

В интеграле (3.12) сделаем замену переменной интегрирования  $x = x_n + ht$ . Если обозначить

$$\sigma(t) = (t+k)(t+k-1) \dots t(t-1) \dots (t-p), \quad (3.13)$$

то получим

$$\begin{aligned}\omega(x) &= h^{k+p+1} \sigma(t), \\ \omega'(x_{n-j}) &= h^{k+p} \sigma'(-j), \\ x - x_{n-j} &= h(t+j).\end{aligned}$$

Таким образом, находим

$$I_j = h \int_0^1 \frac{\sigma(t)}{(t+j)\sigma'(-j)} dt. \quad (3.14)$$

Введем обозначение

$$b_{kj}^{(p)} = \int_0^1 \frac{\sigma(t)}{(t+j)\sigma'(-j)} dt. \quad (3.15)$$

Отметим, что числа  $b_{kj}^{(p)}$  не зависят от  $n$  и  $h$ . На основании (3.14) и (3.15) равенство (3.11) можно записать в виде

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} P(x) dx = h \sum_{j=-p}^k b_{kj}^{(p)} y'(x_{n-j}). \quad (3.16)$$

Преобразуем второй интеграл в правой части (3.10):

$$R_{n,k}^{(p)} = \int_{x_n}^{x_{n+1}} r(x) dx. \quad (3.17)$$

Подставим вместо  $r(x)$  правую часть равенства (3.8) и сделаем замену переменной интегрирования  $x = x_n + ht$ . Получим

$$R_{n,k}^{(p)} = \frac{h^{k+p+2}}{(k+p+1)!} \int_0^1 \sigma(t) y^{(k+p+2)}(\eta) dt.$$

Так как  $\sigma(t)$  сохраняет знак на промежутке интегрирования и  $y^{(k+p+2)}(x)$  непрерывна на  $[x_0, X]$ , то последнее ра-

венство можно переписать так:

$$R_{n,k}^{(p)} = \frac{h^{k+p+2}}{(k+p+1)!} y^{(k+p+2)}(\xi) \int_0^1 \sigma(t) dt, \quad (3.18)$$

где  $x_{n-k} \leq \xi \leq x_{n+p}$  при  $p \geq 1$  и  $x_{n-k} \leq \xi \leq x_{n+1}$  при  $p=0$ .

Теперь формула (3.10), в силу (3.16) и (3.17), запишется следующим образом:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h \sum_{j=-p}^k b_{kj}^{(p)} y'(x_{n-j}) + R_{n,k}^{(p)}, \quad (3.19)$$

где числа  $b_{kj}^{(p)}$  определены равенством (3.15) и остаточный член  $R_{n,k}^{(p)}$  имеет представление (3.18), если  $f(x, y)$  в  $D$  имеет непрерывные частные производные до порядка  $l = k + p + 1$ .

Из формулы (3.19) можно получить различные разностные методы решения задачи Коши. Получающиеся при этом методы в случае  $p \geq 1$  называют *интерполяционными*. Метод, отвечающий  $p=0$ , называется *экстраполяционным*. Причина таких названий следующая. Наименьший промежуток, содержащий узлы (3.5), по которым строится интерполяционный многочлен  $P(x)$ , есть  $[x_{n-k}, x_{n+p}]$ . В случае  $p=0$  этот промежуток находится вне промежутка  $[x_n, x_{n+1}]$ , по которому вычисляется интеграл (3.11) от  $P(x)$ . Значения многочлена экстраполируются на промежуток  $[x_n, x_{n+1}]$ . В случае  $p \geq 1$  промежуток  $[x_n, x_{n+1}]$  содержится внутри  $[x_{n-k}, x_{n+p}]$ , следовательно, здесь мы имеем дело с интерполированием в собственном смысле этого слова.

Рассмотрим сначала экстраполяционный метод. Запишем формулу (3.19) при  $p=0$ :

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h \sum_{j=0}^k b_{kj} y'(x_{n-j}) + R_{n,k}. \quad (3.20)$$

Коэффициенты  $b_{kj} = b_{kj}^{(0)}$  определяются формулами (3.15) при  $p=0$ :

$$b_{kj} = (-1)^j \int_0^1 \frac{t(t+1)\dots(t+k)}{(t+j)j!(k-j)!} dt, \quad j=0, 1, 2, \dots, k. \quad (3.21)$$

Остаточный член  $R_{n,k} = R_{n,k}^{(0)}$  можно записать по формуле (3.18) при  $p = 0$ :

$$R_{n,k} = \frac{h^{k+2}}{(k+1)!} y^{(k+2)}(\xi) \int_0^1 t(t+1)\dots(t+k) dt, \quad x_{n-k} \leq \xi \leq x_{n+1}. \quad (3.22)$$

Приведем численные значения коэффициентов  $b_{kj}$  при  $k = 0, 1, 2, 3$ :

$$\begin{aligned} b_{00} &= 1, \\ b_{10} &= \frac{3}{2}, & b_{11} &= -\frac{1}{2}, \\ b_{20} &= \frac{23}{12}, & b_{21} &= -\frac{4}{3}, & b_{22} &= \frac{5}{12}, \\ b_{30} &= \frac{55}{24}, & b_{31} &= -\frac{59}{24}, & b_{32} &= \frac{37}{24}, & b_{33} &= -\frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Из формулы (3.21) видно, что числа  $b_{kj}$  при четном  $j$  положительны, при нечетном  $j$  — отрицательны. В частности,

$$b_{k0} > 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.23)$$

Формула (3.20) непригодна для вычислений, так как в нее входит неизвестный остаточный член  $R_{n,k}$ , значения первой производной искомого решения

$$y'(x_{n-k}), \quad y'(x_{n-k+1}), \dots, \quad y'(x_n) \quad (3.24)$$

и  $y(x_n)$ . Если бы были известны точные значения

$$y(x_{n-k}), \quad y(x_{n-k+1}), \dots, \quad y(x_n),$$

то с помощью дифференциального уравнения (3.1) мы могли бы найти точные значения (3.24):

$$y'(x_{n-j}) = f(x_{n-j}, y(x_{n-j})), \quad j = 0, 1, 2, \dots, k.$$

Но нам известны приближенные значения (3.4) искомого решения

$$y_{n-k}, \quad y_{n-k+1}, \dots, \quad y_n \quad (n \geq k),$$

и при помощи их можно найти приближенные значения производной. Обозначим эти приближенные значения через  $y'_{n-j}$ :

$$y'_{n-j} = f(x_{n-j}, y_{n-j}), \quad j = 0, 1, 2, \dots, k. \quad (3.25)$$

Заменим в (3.20) производные (3.24) их приближенными значениями (3.25), значение  $y(x_n)$  — его приближенным значением  $y_n$  и отбросим остаточный член  $R_{n,k}$ . Получим приближенное равенство

$$y(x_{n+1}) \cong y_n + h \sum_{j=0}^k b_{kj} f(x_{n-j}, y_{n-j}).$$

Правую часть этого равенства принимаем за  $y_{n+1}$ :

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{j=0}^k b_{kj} f(x_{n-j}, y_{n-j}). \quad (3.26)$$

Полагая в (3.26)  $n=k$  и подставляя в правую часть известные значения (3.3)  $y_0, y_1, \dots, y_k$ , найдем  $y_{k+1}$ . Полагая в (3.26)  $n=k+1$  и подставляя  $y_1, y_2, \dots, y_k$  и уже найденное значение  $y_{k+1}$ , получим  $y_{k+2}$  и т. д. Таким образом, формула (3.26) позволяет последовательно найти  $y_n$  при  $n=k+1, k+2, \dots, N$ . Метод численного решения задачи Коши, определяемый формулой (3.26), называется *экстраполяционным методом Адамса*.

Формула (3.26) представляет собой так называемое *разностное уравнение или уравнение в конечных разностях* (по поводу разностных уравнений см. [2], гл. V). Экстраполяционный метод Адамса можно истолковать как метод построения решения этого разностного уравнения  $y_n$ , принимающего при  $n=0, 1, 2, \dots, k$  заданные значения (3.3).

Если решение  $y(x)$  задачи (3.1) есть многочлен степени не выше  $k+1$ , то значения  $y(x_n)$  ( $n=0, 1, 2, \dots, N$ ) удовлетворяют разностному уравнению (3.26). Действительно, в силу (3.22)  $R_{n,k}=0$ , и утверждение следует из равенства (3.20).

Рассмотрим интерполяционный метод, отвечающий  $p=1$ . Запишем формулу (3.19) при  $p=1$ :

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h \sum_{j=-1}^k b_{kj}^* y'(x_{n-j}) + R_{n,k}^*. \quad (3.27)$$

Коэффициенты  $b_{kj}^* = b_{kj}^{(1)}$  даются формулой (3.15) при  $p = 1$ :

$$b_{kj}^* = (-1)^{j+1} \int_0^1 \frac{(t-1)t(t+1)\dots(t+k)}{(t+j)(j+1)!(k-j)!} dt, \\ j = -1, 0, 1, 2, \dots, k. \quad (3.28)$$

Представление остаточного члена  $R_{n,k}^* = R_{n,k}^{(1)}$  получаем из (3.18) при  $p = 1$ :

$$R_{n,k}^* = \frac{h^{k+3}}{(k+2)!} y^{(k+3)}(\xi) \int_0^1 (t-1)t(t+1)\dots(t+k) dt, \\ x_{n-k} \leq \xi \leq x_{n+1}. \quad (3.29)$$

Отметим, что формулы (3.27), (3.28) и (3.29) имеют смысл и для  $k = -1$ , если условиться считать  $x_{n-k} = x_n$  при  $k = -1$  и

$$t(t+1)\dots(t+k) = 1 \quad \text{при } k = -1.$$

В случае  $k = -1$  интерполяционный многочлен функции  $y'(x)$  строится по одному узлу  $x_{n+1}$ .

Приведем численные значения коэффициентов  $b_{kj}^*$  при  $k = -1, 0, 1, 2$ :

$$b_{-1,-1}^* = 1, \\ b_{0,-1}^* = \frac{1}{2}, \quad b_{00}^* = \frac{1}{2}, \\ b_{1,-1}^* = \frac{5}{12}, \quad b_{10}^* = \frac{2}{3}, \quad b_{11}^* = -\frac{1}{12}, \\ b_{2,-1}^* = \frac{3}{8}, \quad b_{20}^* = \frac{19}{24}, \quad b_{21}^* = -\frac{5}{24}, \quad b_{22}^* = \frac{1}{24}.$$

Из формулы (3.28) получаем

$$b_{k,-1}^* > 0, \quad k = -1, 0, 1, 2, \dots \quad (3.30)$$

Далее, при  $j \geq 0$  коэффициенты  $b_{kj}^*$  положительны, когда  $j$  четное, и отрицательны, когда  $j$  нечетное. В частности,

$$b_{k0}^* > 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.31)$$

Чтобы сделать формулу (3.27) пригодной для вычислений, отбросим остаточный член  $R_{n,k}^*$ , заменим  $y'(x_{n-j})$  на

$$y'_{n-j} = f(x_{n-j}, y_{n-j})$$

при  $j = -1, 0, 1, 2, \dots, k$  и  $y(x_n)$  — на  $y_n$ . Получим

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{j=-1}^k b_{kj}^* f(x_{n-j}, y_{n-j}). \quad (3.32)$$

Формула (3.32) не дает явного выражения для  $y_{n+1}$ , так как  $y_{n+1}$  входит в слагаемое правой части, отвечающее  $j = -1$ . Таким образом, (3.32) представляет собой уравнение относительно  $y_{n+1}$ . Обычно это уравнение решают методом итерации. Метод численного решения задачи Коши, определяемый формулой (3.32), называется *интерполяционным методом Адамса*.

Если  $y(x)$  — многочлен степени не выше  $k+2$ , то, как следует из (3.29) и (3.27), значения  $y(x_n)$  удовлетворяют разностному уравнению (3.32).

Сравним экстраполяционный и интерполяционный методы Адамса. При этом следует сравнивать формулу (3.26) с формулой

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{j=-1}^{k-1} b_{k-1,j}^* f(x_{n-j}, y_{n-j}), \quad (3.33)$$

которая получается из (3.32) заменой  $k$  на  $k-1$ , так как при построении этих формул использовано одинаковое число  $k+1$  узлов для интерполирования функции  $y'(x)$ . Именно, в случае формулы (3.26) использованы узлы

$$x_{n-k}, x_{n-k+1}, \dots, x_n, \quad (3.34)$$

в случае формулы (3.33) —

$$x_{n-k+1}, x_{n-k+2}, \dots, x_n, x_{n+1}. \quad (3.35)$$

Приближение функции  $y'(x)$  в точках промежутка  $[x_n, x_{n+1}]$  интерполяционным многочленом, построенным по узлам (3.35), будет лучшим, чем приближение многочленом, построенным по узлам (3.34) (см. § 6 гл. II). В этом смысле интерполяционный метод Адамса точнее экстраполяционного.

Наиболее точным в указанном смысле является интерполяционный метод, который мы получим при  $p = k + 1$ . Положим в формуле (3.19)  $p = k + 1$ :

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h \sum_{j=-k-1}^k \tilde{b}_{kj} y'(x_{n-j}) + \tilde{R}_{n,k}. \quad (3.36)$$

Коэффициенты  $\tilde{b}_{kj} = b_{kj}^{(k+1)}$  определяются равенством (3.15) при  $p = k + 1$ . Остаточный член  $\tilde{R}_{n,k} = R_{n,k}^{(k+1)}$  записывается по формуле (3.18):

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{n,k} = \frac{h^{2k+3}}{(2k+2)!} y^{(2k+3)}(\xi) \int_0^1 (t+k)(t+k-1) \dots \\ \dots t(t-1) \dots (t-k-1) dt, \quad (3.37) \\ x_{n-k} \leq \xi \leq x_{n+k+1}. \end{aligned}$$

Из (3.36) получаем формулу

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{j=-k-1}^k \tilde{b}_{kj} f(x_{n-j}, y_{n-j}). \quad (3.38)$$

Формула (3.38) представляет собой уравнение с  $k + 1$  неизвестными

$$y_{n+1}, y_{n+2}, \dots, y_{n+k+1}.$$

Метод численного решения задачи Коши, определяемый формулой (3.38), будем называть *методом типа Коуэлла*. Этот метод мы рассмотрим в § 7.

#### § 4. Экстраполяционный метод Адамса

Формулы разностных методов, которые мы получили в § 3, при вычислениях часто применяют в измененном виде. Изменение сводится к тому, что значения функции  $f(x_j, y_j)$  заменяются конечными разностями. В настоящем параграфе приводится видоизмененная формула экстраполяционного метода Адамса и указывается схема вычислений по этой формуле.

Запишем формулу (3.26) экстраполяционного метода Адамса

$$\Delta y_n = h \sum_{j=0}^k b_{kj} f(x_{n-j}, y_{n-j}). \quad (4.1)$$

Эта формула была установлена следующим образом. Строился интерполяционный многочлен  $P(x)$  по значениям функции  $y'(x)$  в узлах

$$x_{n-k}, x_{n-k+1}, \dots, x_n.$$

Далее, вычислялся интеграл от  $P(x)$  по промежутку  $[x_n, x_{n+1}]$  и в полученном выражении значения  $y'(x_{n-j})$  заменялись значениями

$$y'_{n-j} = f(x_{n-j}, y_{n-j}), \quad j = 0, 1, 2, \dots, k.$$

Очевидно, что мы получим тот же результат, если вычислим интеграл по промежутку  $[x_n, x_{n+1}]$  от интерполяционного многочлена  $Q(x)$ , построенного по условиям

$$Q(x_{n-j}) = y'_{n-j}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, k. \quad (4.2)$$

Таким образом, формулу (4.1) можно записать в виде

$$\Delta y_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} Q(x) dx$$

или, если сделать замену переменной интегрирования  $x = x_n + ht$ ,

$$\Delta y_n = h \int_0^1 Q(x_n + ht) dt, \quad (4.3)$$

где  $Q(x)$  — интерполяционный многочлен, построенный по условиям (4.2).

Так как промежуток  $[x_n, x_{n+1}]$ , на котором мы используем значения интерполяционного многочлена  $Q(x)$ , примыкает к концу таблицы значений

$$y'_{n-k}, y'_{n-k+1}, \dots, y'_n,$$

то естественно  $Q(x)$  записать по формуле Ньютона для интерполирования в конце таблицы [см. (7.12) гл. II]

$$Q(x_n + ht) = y'_n + \frac{t}{1!} \Delta y'_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!} \Delta^2 y'_{n-2} + \dots \\ \dots + \frac{t(t+1) \dots (t+k-1)}{k!} \Delta^k y'_{n-k}. \quad (4.4)$$

Введем обозначение

$$a_j = \frac{1}{j!} \int_0^1 t(t+1) \dots (t+j-1) dt, \quad j=0, 1, 2, \dots \quad (4.5)$$

Числа  $a_j$  не зависят от  $k$ . Выпишем несколько первых чисел  $a_j$ :

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{5}{12}, \quad a_3 = \frac{3}{8}, \\ a_4 = \frac{251}{720}, \quad a_5 = \frac{95}{288}, \quad a_6 = \frac{19\,087}{60\,480}.$$

Проинтегрируем обе части равенства (4.4) по промежутку  $[0, 1]$  и воспользуемся обозначением (4.5). Получим

$$\int_0^1 Q(x_n + ht) dt = y'_n + \frac{1}{2} \Delta y'_{n-1} + \\ + \frac{5}{12} \Delta^2 y'_{n-2} + \dots + a_k \Delta^k y'_{n-k}.$$

Сопоставляя это равенство с равенством (4.3), найдем

$$\Delta y_n = h \left( y'_n + \frac{1}{2} \Delta y'_{n-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 y'_{n-2} + \dots + a_k \Delta^k y'_{n-k} \right). \quad (4.6)$$

Это и есть формула экстраполяционного метода Адамса, записанная с помощью конечных разностей.

Положим

$$\eta_j = hf(x_j, y_j), \quad j=0, 1, 2, \dots \quad (4.7)$$

Формула (4.6) в этом обозначении запишется следующим образом:

$$\Delta y_n = \eta_n + \frac{1}{2} \Delta \eta_{n-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 \eta_{n-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 \eta_{n-3} + \dots + a_k \Delta^k \eta_{n-k}. \quad (4.8)$$

Формула (4.8) обычно и применяется при вычислениях.

При  $k=0$  формула (4.8) принимает вид

$$\Delta y_n = hf(x_n, y_n). \quad (4.9)$$

Применение этой формулы не требует построения начала таблицы. Метод численного решения задачи Коши, определяемый формулой (4.9), известен как *метод Эйлера*.

Вычисления по формуле (4.8) принято располагать по следующей схеме (для определенности считаем  $k=4$ ):

$x$	$y$	$\Delta y$	$\eta = hf(x, y)$	$\Delta \eta$	$\Delta^2 \eta$	$\Delta^3 \eta$	$\Delta^4 \eta$
$x_0$	$y_0$		$\eta_0$				
$x_1$	$y_1$	$\Delta y_0$	$\eta_1$	$\Delta \eta_0$	$\Delta^2 \eta_0$		
$x_2$	$y_2$	$\Delta y_1$	$\eta_2$	$\Delta \eta_1$	$\Delta^2 \eta_1$	$\Delta^3 \eta_0$	
$x_3$	$y_3$	$\Delta y_2$	$\eta_3$	$\Delta \eta_2$	$\Delta^2 \eta_2$	$\Delta^3 \eta_1$	$\Delta^4 \eta_0$
$x_4$	$y_4$	$\Delta y_3$	$\eta_4$	$\Delta \eta_3$			
$x_5$							

Все величины, записанные в этой таблице, известны, так как предполагается, что начало таблицы уже построено. Формула (4.8) при  $k=4$  записывается так:

$$\Delta y_n = \eta_n + \frac{1}{2} \Delta \eta_{n-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 \eta_{n-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 \eta_{n-3} + \frac{251}{720} \Delta^4 \eta_{n-4}. \quad (4.10)$$

• Положим в (4.10)  $n=4$

$$\Delta y_4 = \eta_4 + \frac{1}{2} \Delta \eta_3 + \frac{5}{12} \Delta^2 \eta_2 + \frac{3}{8} \Delta^3 \eta_1 + \frac{251}{720} \Delta^4 \eta_0.$$

Все величины, входящие в правую часть этой формулы, расположены в нижней косой строке таблицы конечных разностей, и мы можем найти  $\Delta u_4$  и, следовательно,  $u_5$ . По  $u_5$  вычисляем  $\eta_5 = hf(x_5, u_5)$  и добавляем новую косую строку в таблице конечных разностей. Полагая в (4.10)  $n = 5$ , найдем  $\Delta u_5$  и т. д.

### § 5. Построение начала таблицы

Рассмотрим вопрос о вычислении начальных значений решения задачи Коши (3.1)

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (5.1)$$

Требуется найти приближенные значения решения  $y(x)$  в точках  $x_j = x_0 + jh$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ :

$$y_1, y_2, \dots, y_m, \quad (5.2)$$

где  $m \geq k \geq 1$ .

Пусть  $f(x, y)$  разлагается в ряд

$$f(x, y) = \sum_{i,j} A_{ij} (x - x_0)^i (y - y_0)^j, \quad (5.3)$$

сходящийся при

$$|x - x_0| < R_1, \quad |y - y_0| < R_2 \quad (R_1 > 0, R_2 > 0). \quad (5.4)$$

Тогда по теореме Коши из теории дифференциальных уравнений задача (5.1) имеет решение  $y(x)$ , представимое рядом

$$y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{y^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i, \quad (5.5)$$

сходящимся в некоторой окрестности точки  $x_0$ . Производные  $y^{(i)}(x_0)$  можно последовательно найти при помощи дифференциального уравнения и начального условия:

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0),$$

$$y''(x_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} f(x_0, y_0)$$

.....

Теорема Коши позволяет также указать окрестность точки  $x_0$ , в которой сходится ряд (5.5). Именно, обозначим через  $M$  такую постоянную, что

$$|f(x, y)| \leq M$$

при

$$|x - x_0| \leq r_1 < R_1, \quad |y - y_0| \leq r_2 < R_2,$$

где  $R_1$  и  $R_2$  — числа, определяющие область (5.4) сходимости ряда (5.3), и  $r_1$  и  $r_2$  — некоторые положительные числа. Тогда можно утверждать, что ряд (5.5) сходится при

$$|x - x_0| < r,$$

где

$$r = r_1 \left( 1 - e^{-\frac{1}{2M} \frac{r_2}{r_1}} \right). \quad (5.6)$$

Указанное значение  $r$ , как правило, оказывается значительно меньше радиуса сходимости ряда (5.5).

Построение начала таблицы в рассматриваемом случае осуществляется так. Строится отрезок ряда (5.5)

$$y(x) \cong \sum_{i=0}^l \frac{y^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i$$

и с его помощью находятся числа (5.2)

$$y_j = \sum_{i=0}^l \frac{y^{(i)}(x_0)}{i!} (jh)^i, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Конечно, число  $l$  должно быть взято таким, чтобы ошибка

$$y(x_j) - y_j = \sum_{i=l+1}^{\infty} \frac{y^{(i)}(x_0)}{i!} (x_j - x_0)^i, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

по абсолютной величине не превосходила половины единицы последнего удерживаемого десятичного знака в значении  $y_j$ .

При построении начала таблицы должен быть решен вопрос о выборе величины шага  $h$ . Шаг нужно выбрать так, чтобы старшая разность в формуле (4.8)  $\Delta^k \eta_l$  ( $l = 0, 1, 2, \dots, m - k$ ) была постоянной в пределах нескольких единиц последней цифры. Чтобы убедиться в постоянстве  $\Delta^k \eta_l$ , следует брать  $m > k$ , т. е. строить начало таблицы,

содержащее больше значений (на одно — два), чем это требуется для применения формулы (4.8). Следует еще иметь в виду, что формулу (4.8) целесообразно применять при небольших  $k$  ( $k = 2, 3, 4, 5$ ).

**Пример 1.** Выбрать шаг интегрирования и построить начало таблицы для задачи Коши (2.17)

$$y' = 0,25y^2 + x^2, \quad y(0) = -1. \quad (5.7)$$

Будем вычислять значения  $y$ , с пятью верными десятичными знаками.

Находим производные из дифференциального уравнения:

$$y'' = \frac{1}{2} y y' + 2x,$$

$$y''' = \frac{1}{2} (y'^2 + y y'') + 2,$$

$$y^{(IV)} = \frac{3}{2} y' y'' + \frac{1}{2} y y''',$$

$$y^{(V)} = \frac{3}{2} y''^2 + 2y' y''' + \frac{1}{2} y y^{(IV)}.$$

Последовательно определяем

$$y'(0) = \frac{1}{4}, \quad y''(0) = -\frac{1}{8}, \quad y'''(0) = \frac{67}{32}, \quad y^{(IV)}(0) = -\frac{35}{32},$$

$$y^{(V)}(0) = \frac{207}{128}$$

и можем записать первые шесть членов ряда

$$y(x) = -1 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{16}x^2 +$$

$$+ \frac{67}{192}x^3 - \frac{35}{768}x^4 + \frac{69}{5120}x^5 - \dots \quad (5.8)$$

Теорема Коши гарантирует сходимость ряда (5.8) на промежутке  $|x| \leq 0,27$ . В самом деле, при  $x$  и  $y$ , удовлетворяющих неравенствам

$$|x| \leq 0,5 \quad |y + 1| \leq 1,$$

имеем

$$|f(x, y)| = |0,25[(y + 1) - 1]^2 + x^2| \leq$$

$$\leq 0,25(|y + 1| + 1)^2 + |x|^2 \leq 1,25,$$

так что из формулы (5.6) при  $r_1 = 0,5$ ,  $r_2 = 1$  и  $M = 1,25$  получаем

$$r = 0,5(1 - e^{-0,8}) \cong 0,275.$$

В качестве  $h$  естественно выбирать число, записанное при помощи одной — двух значащих цифр, например 0,02, 0,05, 0,1, 0,25, 0,3, 0,5. Вычислим  $y(0,1)$  при помощи (5.8). Получим

$$y(0,1) = -1 + 0,025 - 0,000625 + \\ + 0,000349 - 0,000005 = -0,97528.$$

Мы видим, что достаточно взять четыре члена ряда, чтобы получить пять десятичных знаков в значении  $y(0,1)$ . Отсюда заключаем, что  $y(x)$  на промежутке  $[-0,1; 0,1]$  с точностью до  $5 \cdot 10^{-6}$  аппроксимируется многочленом третьей степени.

Дифференцируя ряд (5.8), найдем, что производную  $y'(x)$  на промежутке  $[-0,1; 0,1]$  с той же точностью можно приблизить многочленом третьей степени, при этом старший член многочлена  $\frac{35}{192}x^3$  оказывает влияние лишь на четвертый десятичный знак.

Далее можно провести следующее наводящее рассуждение. Весьма вероятно, что  $y'(x)$  на промежутке  $[0; 0,2]$  можно приблизить с точностью до  $5 \cdot 10^{-6}$  многочленом третьей степени, при этом старший член  $ax^3$  многочлена будет величиной порядка нескольких единиц четвертого десятичного знака. Но тогда  $hy'(x)$  на промежутке  $[0; 0,2]$ , если взять  $h=0,05$ , будет с точностью до нескольких единиц пятого десятичного знака многочленом второй степени. Поэтому мы вправе надеяться, что при выборе  $h=0,05$  в таблице конечных разностей величины (4.7)

$$\eta_j = hf(x_j, y_j), \quad j=0, 1, 2, 3, 4,$$

вторые разности в пределах пяти десятичных знаков будут постоянными.

Значения  $y(j \cdot 0,05)$ ,  $j=1, 2, 3, 4$ , вычисленные при помощи (5.8) с пятью десятичными знаками, приведены в табл. 31. В таблице указаны также значения  $\eta_j = hf(x_j, y_j)$  и их разности. Значения  $\eta_j$  приведены с шестью десятичными знаками, так как в последующем, при численном решении задачи (5.7) методом Адамса, нам понадобится запасной знак. Из таблицы видно, что в пределах пяти десятичных знаков вторые разности  $\Delta^2\eta_j$  ( $j=0, 1, 2$ ) постоянны.

Таблица 31

$x$	$y$	$\eta$	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$	$\Delta^3\eta$
0	-1	0,012500			
0,05	-0,98761	0,012317	-183		
0,1	-0,97528	0,012390	73	256	-8
0,15	-0,96275	0,012711	321	248	-4
0,2	-0,94798	0,013276	565	244	

Остановимся на способе построения начала таблицы, предложенном А. Н. Крыловым [13]. Способ А. Н. Крылова пригоден и в том случае, когда правая часть  $f(x, y)$  дифференциального уравнения задана таблично.

Предположим, что мы уже выбрали шаг интегрирования  $h$  и при этом наивысшая разность в формуле (4.8)  $\Delta^k\eta_j$  постоянна. Будем считать для простоты, что  $k=3$ . Перепишем формулу (4.8) для этого случая

$$\Delta y_n = \eta_n + \frac{1}{2} \Delta\eta_{n-1} + \frac{5}{12} \Delta^2\eta_{n-2} + \frac{3}{8} \Delta^3\eta_{n-3}.$$

Положим здесь  $n=0, 1, 2$ :

$$\begin{aligned} \Delta y_0 &= \eta_0 + \frac{1}{2} \Delta\eta_{-1} + \frac{5}{12} \Delta^2\eta_{-2} + \frac{3}{8} \Delta^3\eta_{-3}, \\ \Delta y_1 &= \eta_1 + \frac{1}{2} \Delta\eta_0 + \frac{5}{12} \Delta^2\eta_{-1} + \frac{3}{8} \Delta^3\eta_{-2}, \\ \Delta y_2 &= \eta_2 + \frac{1}{2} \Delta\eta_1 + \frac{5}{12} \Delta^2\eta_0 + \frac{3}{8} \Delta^3\eta_{-1}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Из условия постоянства третьих разностей

$$\Delta^3\eta_{-3} = \Delta^3\eta_{-2} = \Delta^3\eta_{-1} = \Delta^3\eta_0$$

находим

$$\begin{aligned} \Delta^2\eta_{-1} &= \Delta^2\eta_0 - \Delta^3\eta_{-1} = \Delta^2\eta_0 - \Delta^3\eta_0, \\ \Delta^2\eta_{-2} &= \Delta^2\eta_{-1} - \Delta^3\eta_{-2} = \Delta^2\eta_0 - 2\Delta^3\eta_0, \\ \Delta\eta_{-1} &= \Delta\eta_0 - \Delta^2\eta_{-1} = \Delta\eta_0 - \Delta^2\eta_0 + \Delta^3\eta_0. \end{aligned}$$

Подставляя найденные значения разностей с отрицательными индексами в равенства (5.9), получим

$$\left. \begin{aligned} \Delta y_0 &= \eta_0 + \frac{1}{2} \Delta \eta_0 - \frac{1}{12} \Delta^2 \eta_0 + \frac{1}{24} \Delta^3 \eta_0, \\ \Delta y_1 &= \eta_1 + \frac{1}{2} \Delta \eta_0 + \frac{5}{12} \Delta^2 \eta_0 - \frac{1}{24} \Delta^3 \eta_0, \\ \Delta y_2 &= \eta_2 + \frac{1}{2} \Delta \eta_1 + \frac{5}{12} \Delta^2 \eta_0 + \frac{3}{8} \Delta^3 \eta_0. \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

Равенства (5.10) можно рассматривать как систему, вообще говоря, нелинейных уравнений относительно неизвестных  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$ . Метод А. Н. Крылова представляет собою своеобразный метод итерации для решения этой системы.

Нам известны  $y_0$  и  $\eta_0 = hf(x_0, y_0)$ . Первое из уравнений (5.10) дает приближенное равенство

$$\Delta y_0 \cong \eta_0,$$

из которого находим

$$y_1^{(1)} = y_0 + \eta_0.$$

По  $y_1^{(1)}$  — приближенному значению  $y_1$  — можно найти приближенное значение  $\eta_1$

$$\eta_1^{(1)} = hf(x_1, y_1^{(1)})$$

и, следовательно, приближенное значение разности  $\Delta \eta_0$

$$\Delta \eta_0^{(1)} = \eta_1^{(1)} - \eta_0.$$

Таким образом, в нашем распоряжении имеются величины

$\eta_0$	$\Delta \eta_0^{(1)}$
$\eta_1^{(1)}$	

(5.11)

Из первых двух равенств (5.10), удерживая в них по два слагаемых и заменяя эти слагаемые приближенными величинами (5.11), находим

$$\Delta y_0^{(2)} = \eta_0 + \frac{1}{2} \Delta \eta_0^{(1)},$$

$$\Delta y_1^{(2)} = \eta_1^{(1)} + \frac{1}{2} \Delta \eta_0^{(1)}.$$

Отсюда

$$y_1^{(2)} = y_0 + \Delta y_0^{(2)}, \quad y_2^{(2)} = y_1^{(2)} + \Delta y_1^{(2)}.$$

По  $y_1^{(2)}$  и  $y_2^{(2)}$  находим

$$\eta_1^{(2)} = hf(x_1, y_1^{(2)}), \quad \eta_2^{(2)} = hf(x_2, y_2^{(2)}),$$

и теперь мы располагаем величинами

$\eta_0$	$\Delta \eta_0^{(2)}$	$\Delta^2 \eta_0^{(2)}$	(5.12)
$\eta_1^{(2)}$	$\Delta \eta_1^{(2)}$		
$\eta_2^{(2)}$			

При помощи величин (5.12) из равенств (5.10), если во всех этих равенствах удерживать по три первых слагаемых, получим

$$\Delta y_0^{(3)} = \eta_0 + \frac{1}{2} \Delta \eta_0^{(2)} - \frac{1}{12} \Delta^2 \eta_0^{(2)},$$

$$\Delta y_1^{(3)} = \eta_1^{(2)} + \frac{1}{2} \Delta \eta_1^{(2)} + \frac{5}{12} \Delta^2 \eta_1^{(2)},$$

$$\Delta y_2^{(3)} = \eta_2^{(2)} + \frac{1}{2} \Delta \eta_2^{(2)} + \frac{5}{12} \Delta^2 \eta_2^{(2)},$$

откуда

$$y_1^{(3)} = y_0 + \Delta y_0^{(3)}, \quad y_2^{(3)} = y_1^{(3)} + \Delta y_1^{(3)}, \quad y_3^{(3)} = y_2^{(3)} + \Delta y_2^{(3)}. \quad (5.13)$$

Мы имеем теперь приближенные значения (5.13) для всех неизвестных  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$ . Далее, для решения системы (5.10) применяется обычный метод итерации с начальным приближением (5.13)  $y_1^{(3)}$ ,  $y_2^{(3)}$ ,  $y_3^{(3)}$ . Таким образом, процесс определения величин (5.13) можно рассматривать как метод построения начального приближения к решению системы (5.10).

Обычный метод итерации проводится следующим образом. Вычисляем числа

$$\eta_j^{(3)} = hf(x_j, y_j^{(3)}), \quad j = 1, 2, 3,$$

и составляем таблицу конечных разностей

$\eta_0$			
$\eta_1^{(3)}$	$\Delta\eta_0^{(3)}$	$\Delta^2\eta_0^{(3)}$	$\Delta^3\eta_0^{(3)}$
$\eta_2^{(3)}$	$\Delta\eta_1^{(3)}$	$\Delta^2\eta_1^{(3)}$	
$\eta_3^{(3)}$	$\Delta\eta_2^{(3)}$		

При помощи таблицы из системы (5.10) находим  $y_1^{(4)}$ ,  $y_2^{(4)}$ ,  $y_3^{(4)}$ . Вычисления продолжаем до тех пор, пока не совпадут с требуемой точностью два последовательные приближения

$$y_1^{(j)} = y_1^{(j+1)}, \quad y_2^{(j)} = y_2^{(j+1)}, \quad y_3^{(j)} = y_3^{(j+1)}.$$

С целью упрощения вычислительной схемы начальное приближение к решению системы (5.10) можно находить методом Эйлера по формуле (4.9):

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n).$$

Приведем без вывода систему, используемую в способе А. Н. Крылова для случая  $k=5$ :

$$\left. \begin{aligned} \Delta y_0 &= \eta_0 + \frac{1}{2} \Delta\eta_0 - \frac{1}{12} \Delta^2\eta_0 + \\ &\quad + \frac{1}{24} \Delta^3\eta_0 - \frac{19}{720} \Delta^4\eta_0 + \frac{3}{160} \Delta^5\eta_0, \\ \Delta y_1 &= \eta_1 + \frac{1}{2} \Delta\eta_0 + \frac{5}{12} \Delta^2\eta_0 - \\ &\quad - \frac{1}{24} \Delta^3\eta_0 + \frac{11}{720} \Delta^4\eta_0 - \frac{11}{1440} \Delta^5\eta_0, \\ \Delta y_2 &= \eta_2 + \frac{1}{2} \Delta\eta_1 + \frac{5}{12} \Delta^2\eta_0 + \\ &\quad + \frac{3}{8} \Delta^3\eta_0 - \frac{19}{720} \Delta^4\eta_0 + \frac{11}{1440} \Delta^5\eta_0, \\ \Delta y_3 &= \eta_3 + \frac{1}{2} \Delta\eta_2 + \frac{5}{12} \Delta^2\eta_1 + \\ &\quad + \frac{3}{8} \Delta^3\eta_0 + \frac{251}{720} \Delta^4\eta_0 - \frac{3}{160} \Delta^5\eta_0, \\ \Delta y_4 &= \eta_4 + \frac{1}{2} \Delta\eta_3 + \frac{5}{12} \Delta^2\eta_2 + \\ &\quad + \frac{3}{8} \Delta^3\eta_1 + \frac{251}{720} \Delta^4\eta_0 + \frac{95}{288} \Delta^5\eta_0. \end{aligned} \right\} (5.14)$$

Эта система содержит в себе как частные случаи системы, применяемые в способе А. Н. Крылова, для любого  $k$ ,  $1 \leq k \leq 5$ . Чтобы получить нужную систему для такого  $k$ , мы должны взять из системы (5.14)  $k$  первых уравнений и положить равными нулю разности  $\Delta^i \eta_j$ , при  $i \geq k + 1$ . В частности, при  $k = 3$  получим систему (5.10).

**Пример 2.** Построим начало таблицы для задачи Коши (5.7) методом А. Н. Крылова. Берем  $h = 0,05$ . При вычислениях пользуемся формулами (5.10). Результаты вычислений приведены в табл. 32.

Таблица 32

$x$	$y$	$\Delta y$	$0,25y$	$f(x, y)$	$\eta$	$\Delta \eta$	$\Delta^2 \eta$	$\Delta^3 \eta$
0	-1		-0,25	0,25	0,012500			
0 0,05	-1 -0,98750	0,01250	-0,24688	0,24629	0,012500 0,012314	-186		
0 0,05 0,10	-1 -0,98759 -0,97537	0,01241 0,01222	-0,24690 -0,24384	0,24634 0,24783	0,012500 0,012317 0,012392	-183 75	258	
0 0,05 0,10 0,15	-1 -0,98761 -0,97528 -0,96274	0,01239 0,01233 0,01254	-0,24690 -0,24382 -0,24068	0,24634 0,24779 0,25421	0,012500 0,012317 0,012390 0,012710	-183 73 320	256 247	-9
0 0,05 0,10 0,15	-1 -0,98761 -0,97528 -0,96275	0,01239 0,01233 0,01253	-0,24069	0,25422	0,012500 0,012317 0,012390 0,012711	-183 73 321	256 248	-8

Таблица 33

$x$	$y$	$\Delta y$	$0,25y$	$f(x, y)$	$\eta$	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$	$\Delta^3\eta$
0	-1	0,01250	-0,25	0,25	0,012500	-186	260	-10
0,05	-0,98750	0,01231	-0,24688	0,24629	0,012314	74	250	
0,10	-0,97519	0,01239	-0,24380	0,24775	0,012388	324		
0,15	-0,96280		-0,24070	0,25425	0,012712			
0	-1	0,01239			0,012500	-183	256	-8
0,05	-0,98761	0,01233	-0,24690	0,24634	0,012317	73	248	
0,10	-0,97528	0,01253	-0,24382	0,24779	0,012390	321		
0,15	-0,96275		-0,24069	0,25422	0,012711			

В табл. 33 дано построение начала таблицы той же задачи (5.7), использующее метод Эйлера для построения начального приближения к решению системы (5.10). Мы видим, что вычислительная схема в данном случае проще, чем в методе А. Н. Крылова. Для получения пяти верных десятичных знаков понадобилось сделать лишь одну итерацию.

Метод Рунге — Кутты численного решения задачи Коши также можно применять для построения начала таблицы.

**Пример 3.** Найдем численное решение задачи (5.7) экстраполяционным методом Адамса. Начало таблицы уже построено. При вычислениях пользуемся формулой (4.8) для  $k=3$ :

$$\Delta y_n = \eta_n + \frac{1}{2} \Delta\eta_{n-1} + \frac{5}{12} \Delta^2\eta_{n-2} + \frac{3}{8} \Delta^3\eta_{n-3}. \quad (5.15)$$

Величины  $\eta_j$  вычисляем с одной запасной цифрой (так же как и выше при построении начала таблицы) с тем, чтобы уменьшить влияние ошибок округления, возникающих при вычислении  $\Delta y_n$  по формуле (5.15). Результаты вычислений приведены в табл. 34.

Таблица 34

$x$	$y$	$\Delta y$	$0,25y$	$f(x, y)$	$\eta$	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$	$\Delta^3\eta$
0	-1		-0,25	0,25	0,012500			
0,05	-0,98761		-0,24690	0,24634	0,012317	-183	256	
0,10	-0,97528		-0,24382	0,24779	0,012390	73	248	-8
0,15	-0,96275		-0,24069	0,25422	0,012711	321	244	-4
0,20	-0,94978		-0,23744	0,26552	0,013276	565	238	-6
0,25	-0,93612	0,01366	-0,23403	0,28158	0,014079	803	233	-5
0,30	-0,92154	0,01458	-0,23038	0,30230	0,015115	1036	230	-3
0,35	-0,90581	0,01573	-0,22645	0,32762	0,016381	1266	225	-5
0,40	-0,88870	0,01711	-0,22218	0,35745	0,017872	1491	223	-2
0,45	-0,86999	0,01871	-0,21750	0,39172	0,019586	1714	220	-3
0,50	-0,84945	0,02054	-0,21236	0,43039	0,021520	1934	218	-2
0,55	-0,82687	0,02258	-0,20672	0,47343	0,023672	2152	217	-1
0,60	-0,80203	0,02484	-0,20051	0,52082	0,026041	2369	218	1
0,65	-0,77471	0,02732	-0,19368	0,57255	0,028628	2587	217	-1
0,70	-0,74470	0,03001	-0,18618	0,62865	0,031432	2804	222	5
0,75	-0,71178	0,03292	-0,17794	0,68915	0,034458	3026	224	2
0,80	-0,67571	0,03607	-0,16893	0,75415	0,037708	3250	228	4
0,85	-0,63628	0,03943	-0,15907	0,82371	0,041186	3478	236	8
0,90	-0,59326	0,04302	-0,14832	0,89799	0,044900	3714	243	7
0,95	-0,54640	0,04686	-0,13660	0,97714	0,048857	3957		
1	-0,49546	0,05094						

### § 6. Интерполяционный метод Адамса

Интерполяционный метод Адамса определяется формулой (3.32)

$$\Delta y_n = h \sum_{j=-1}^k b_{kj}^* f(x_{n-j}, y_{n-j}). \quad (6.1)$$

Из способа построения этой формулы ясно, что ее правая часть представляет собой интеграл по промежутку  $[x_n, x_{n+1}]$  от интерполяционного многочлена  $Q(x)$ , построенного по условиям

$$Q(x_{n-j}) = y'_{n-j} = f(x_{n-j}, y_{n-j}), \quad j = -1, 0, 1, 2, \dots, k.$$

Таким образом, формулу (6.1) можно представить в виде

$$\Delta y_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} Q(x) dx. \quad (6.3)$$

Промежуток  $[x_n, x_{n+1}]$ , по которому выполняется интегрирование  $Q(x)$ , находится в конце таблицы значений

$$y'_{n-k}, y'_{n-k+1}, \dots, y'_n, y'_{n+1},$$

поэтому  $Q(x)$  запишем по формуле Ньютона для интерполирования в конце таблицы:

$$Q(x_{n+1} + ht) = y'_{n+1} + \frac{t}{1!} \Delta y'_n + \frac{t(t+1)}{2!} \Delta^2 y'_{n-1} + \dots \\ \dots + \frac{t(t+1) \dots (t+k)}{(k+1)!} \Delta^{k+1} y'_{n-k}. \quad (6.4)$$

Сделаем в интеграле (6.3) замену переменной интегрирования  $x = x_{n+1} + ht$ :

$$\Delta y_n = h \int_{-1}^0 Q(x_{n+1} + ht) dt. \quad (6.5)$$

Чтобы записать интеграл по промежутку  $[-1, 0]$  от интерполяционного многочлена (6.4), воспользуемся обозначением

$$a_j^* = \frac{1}{j!} \int_{-1}^0 t(t+1) \dots (t+j-1) dt, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (6.6)$$

Выпишем несколько первых чисел  $a_j^*$ :

$$a_0^* = 1, \quad a_1^* = -\frac{1}{2}, \quad a_2^* = -\frac{1}{12}, \quad a_3^* = -\frac{1}{24}, \quad a_4^* = -\frac{19}{720}, \\ a_5^* = -\frac{3}{160}, \quad a_6^* = -\frac{863}{60480}.$$

Интегрируя (6.4) по  $[-1, 0]$ , получим

$$\int_{-1}^0 Q(x_{n+1} + ht) dt = \\ = y'_{n+1} - \frac{1}{2} \Delta y'_n - \frac{1}{12} \Delta^2 y'_{n-1} - \dots + a_{k+1}^* \Delta^{k+1} y'_{n-k}.$$

Заменим интеграл в (6.5) правой частью последнего равенства. Получим видоизмененную формулу интерполяционного метода Адамса:

$$\Delta y_n = h \left( y'_{n+1} - \frac{1}{2} \Delta y'_n - \frac{1}{12} \Delta^2 y'_{n-1} - \dots + a_{k+1}^* \Delta^{k+1} y'_{n-k} \right). \quad (6.7)$$

Мы уже отмечали в § 3, что интерполяционный метод Адамса в некотором смысле точнее экстраполяционного. Это обстоятельство проявляется в том факте, что коэффициенты формулы (6.7) убывают с ростом  $n$  быстрее, чем коэффициенты формулы (4.6).

При вычислениях формула (6.7) применяется в виде

$$\Delta y_n = \eta_{n+1} - \frac{1}{2} \Delta \eta_n - \frac{1}{12} \Delta^2 \eta_{n-1} - \frac{1}{24} \Delta^3 \eta_{n-2} - \dots \\ \dots + a_{k+1}^* \Delta^{k+1} \eta_{n-k}, \quad (6.8)$$

где  $\eta_j$  определено равенством (4.7):

$$\eta_j = hf(x_j, y_j), \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Формула (6.8) представляет собой уравнение относительно  $y_{n+1}$  [см. (6.1)]:

$$y_{n+1} = hb_{k,-1}^* f(x_{n+1}, y_{n+1}) + F(y_{n-k}, \dots, y_n),$$

которое обычно решают методом итерации. Из вида этого уравнения ясно, что метод итерации для него сходится, если шаг  $h$  выбран достаточно малым и начальное приближение  $y_{n+1}^{(0)}$  взято достаточно близким к его корню  $y_{n+1}$ . Конечно, мы предполагаем при этом, что  $f(x, y)$  имеет частную производную  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ , непрерывную в некоторой полосе

$$x_0 \leq x \leq X, \quad -\rho \leq y(x) - y \leq \rho, \quad \rho > 0,$$

содержащей  $y(x)$  и  $y_j$  при  $j = 1, 2, \dots, N$ . (См. теорему 1 о сходимости метода итерации, гл. I, § 3.)

Численное решение задачи Коши интерполяционным методом Адамса по формуле (6.8) выполняется следующим образом. По значениям  $y_0, y_1, \dots, y_k, y_{k+1}$  составляется такая же таблица, как в случае экстраполяционного метода

Адамса. Мы считаем, что помимо начальных значений  $y_0, y_1, \dots, y_k$ , необходимых для вывода формулы (6.8), известно еще одно значение:  $y_{k+1}$ . Запишем таблицу для  $k = 3$ :

$x$	$y$	$\Delta y$	$\eta = hf(x, y)$	$\Delta \eta$	$\Delta^2 \eta$	$\Delta^3 \eta$	$\Delta^4 \eta$
$x_0$	$y_0$		$\eta_0$				
$x_1$	$y_1$	$\Delta y_0$	$\eta_1$	$\Delta \eta_0$	$\Delta^2 \eta_0$		
$x_2$	$y_2$	$\Delta y_1$	$\eta_2$	$\Delta \eta_1$	$\Delta^2 \eta_1$	$\Delta^3 \eta_0$	
$x_3$	$y_3$	$\Delta y_2$	$\eta_3$	$\Delta \eta_2$	$\Delta^2 \eta_2$	$\Delta^3 \eta_1$	$\Delta^4 \eta_0$
$x_4$	$y_4$	$\Delta y_3$	$\eta_4$	$\Delta \eta_3$	$\Delta^2 \eta_3$	$\Delta^3 \eta_2$	$\Delta^4 \eta_1$
$x_5$			$\eta_5$	$\Delta \eta_4$			

В случае  $k = 3$  формула (6.8) имеет вид

$$\Delta y_n = \eta_{n+1} - \frac{1}{2} \Delta \eta_n - \frac{1}{12} \Delta^2 \eta_{n-1} - \frac{1}{24} \Delta^3 \eta_{n-2} - \frac{19}{720} \Delta^4 \eta_{n-3}.$$

Положим здесь  $n = 4$ :

$$\Delta y_4 = \eta_5 - \frac{1}{2} \Delta \eta_4 - \frac{1}{12} \Delta^2 \eta_3 - \frac{1}{24} \Delta^3 \eta_2 - \frac{19}{720} \Delta^4 \eta_1. \quad (6.9)$$

В правую часть этой формулы входят разности

$$\eta_5, \Delta \eta_4, \Delta^2 \eta_3, \Delta^3 \eta_2, \Delta^4 \eta_1. \quad (6.10)$$

расположенные в таблице ниже жирной ступенчатой линии. Эти разности неизвестны, и мы должны указать для них начальные приближения.

Чтобы указать начальные приближения к разностям (6.10), достаточно указать приближение к одной из них. Проще всего указать начальное приближение к четвертой разности  $\Delta^4 \eta_1$ . Действительно, если шаг  $h$  выбран правильно, то в пределах нескольких единиц последней значащей цифры

$$\Delta^4 \eta_1 \cong \Delta^4 \eta_0.$$

и мы можем взять в качестве начального приближения к  $\Delta^4\eta_1$  величину  $\Delta^4\eta_1^{(0)} = \Delta^4\eta_0$ . Это позволяет вычислить приближения ко всем разностям (6.10)

$$\eta_5^{(0)}, \Delta\eta_4^{(0)}, \Delta^2\eta_3^{(0)}, \Delta^3\eta_2^{(0)}, \Delta^4\eta_1^{(0)} \quad (6.11)$$

последовательно по формулам

$$\Delta^3\eta_2^{(0)} = \Delta^3\eta_1 + \Delta^4\eta_1^{(0)},$$

$$\Delta^2\eta_3^{(0)} = \Delta^2\eta_2 + \Delta^3\eta_2^{(0)},$$

$$\Delta\eta_4^{(0)} = \Delta\eta_3 + \Delta^2\eta_3^{(0)},$$

$$\eta_5^{(0)} = \eta_4 + \Delta\eta_4^{(0)}.$$

Подставив начальные приближения (6.11) в формулу (6.9), найдем  $\Delta y_4^{(1)}$  и, следовательно,

$$y_5^{(1)} = y_4 + \Delta y_4^{(1)}.$$

Теперь можем вычислить

$$\eta_5^{(1)} = hf(x_5, y_5^{(1)}).$$

Если  $\eta_5^{(1)} = \eta_5^{(0)}$ , то полагаем  $y_5 = y_5^{(1)}$  и вычисление  $y_5$  считаем законченным.

Если  $\eta_5^{(1)} \neq \eta_5^{(0)}$ , то по  $\eta_5^{(1)}$  вычисляем новые значения разностей (6.10)

$$\eta_5^{(1)}, \Delta\eta_4^{(1)}, \Delta^2\eta_3^{(1)}, \Delta^3\eta_2^{(1)}, \Delta^4\eta_1^{(1)} \quad (6.12)$$

последовательно по формулам

$$\Delta\eta_4^{(1)} = \eta_5^{(1)} - \eta_4,$$

$$\Delta^2\eta_3^{(1)} = \Delta\eta_4^{(1)} - \Delta\eta_3,$$

$$\Delta^3\eta_2^{(1)} = \Delta^2\eta_3^{(1)} - \Delta^2\eta_2,$$

$$\Delta^4\eta_1^{(1)} = \Delta^3\eta_2^{(1)} - \Delta^3\eta_1.$$

Подставим приближения (6.12) в формулу (6.9). Найдем  $\Delta y_4^{(2)}$  и, следовательно,  $y_5^{(2)}$ . Если окажется, что  $y_5^{(2)} = y_5^{(1)}$ , то

считаем  $y_5 = y_5^{(2)}$ . В противном случае следует продолжать итерации. Конечно, много итераций делать невыгодно. Шаг должен быть таким, чтобы было достаточно одной—двух итераций. После того как найдено  $y_5$ , таким же путем вычисляем  $y_6$  и т. д.

Иногда начальные приближения к неизвестным разностям

$$\eta_{n+1}, \Delta\eta_n, \Delta^2\eta_{n-1}, \dots, \Delta^{k+1}\eta_{n-k}$$

вычисляют с помощью формулы экстраполяционного метода Адамса. Именно, по формуле (4.8) вычисляют  $y_{n+1}^{(0)}$ . Это позволяет найти  $\eta_{n+1}^{(0)}$  и, следовательно, указать начальные приближения ко всем разностям.

**Пример.** Найдём численное решение задачи Коши

$$y' = \frac{x}{y} + 0,5y, \quad y(0) = 1 \quad (6.13)$$

интерполяционным методом Адамса. Решение этой задачи существует на всей оси  $x$ :

$$y(x) = \sqrt{3e^x - 2 - 2x}.$$

Начало таблицы будем строить методом разложения  $y(x)$  в ряд по степеням  $x$ . Для вычисления производных запишем дифференциальное уравнение в виде

$$y'y - 0,5y^2 - x = 0.$$

Вычисляя последовательные производные по  $x$  от левой части этого равенства, получим

$$\begin{aligned} y''y + y'^2 - yy' - 1 &= 0, \\ y'''y + 3y'y'' - y'^2 - yy'' &= 0, \\ \dots & \end{aligned} \quad (6.14)$$

Из дифференциального уравнения, полагая в нем  $x = 0$ , найдём  $y'(0) = 0,5$ . Из первого из соотношений (6.14), полагая  $x = 0$  и зная  $y(0)$  и  $y'(0)$ , найдём  $y''(0)$ ; из второго

из соотношений (6.14) находим  $y'''(0)$  и т. д. В результате вычислений получим

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = \frac{1}{2}, \quad y''(0) = \frac{5}{4}, \quad y'''(0) = -\frac{3}{8},$$

$$y^{(IV)}(0) = -\frac{39}{16}, \quad y^{(V)}(0) = \frac{393}{32}, \quad y^{(VI)}(0) = \frac{573}{64}.$$

Имеем

$$y(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{5}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \frac{13}{128}x^4 +$$

$$+ \frac{131}{1280}x^5 + \frac{191}{15360}x^6 + \dots \quad (6.15)$$

Выберем в качестве шага интегрирования  $h=0,1$ . Мы намерены получать значения  $y(x)$  с пятью десятичными знаками. Основанием для выбора шага  $h=0,1$  служит то обстоятельство, что для получения  $y(0,3)$  с пятью верными десятичными знаками достаточно удержать в разложении (6.15) выписанные члены (до  $x^6$  включительно) и, следовательно, на промежутке  $[-0,3; 0,3]$   $y(x)$  с принятой точностью можно считать многочленом шестой степени. То же самое можно сказать и о величине  $hy'(x)$ .

На самом деле как  $y(x)$ , так и  $hy'(x)$  в пределах пяти десятичных знаков можно, видимо, представить на рассматриваемом промежутке в виде многочлена более низкой степени — четвертой или пятой (ибо отрезок ряда Тейлора не является наилучшим многочленом в смысле равномерного приближения). Из этого наводящего рассуждения ясно, что четвертая или пятая разность в таблице значений величины

$$\eta_i = hf(x_i, y_i) \cong hy'(x_i)$$

по крайней мере для  $x_i$ , близких к  $x=0$ , будет постоянна в пределах пяти десятичных знаков.

Нам нужно вычислить 5—6 значений  $y(x)$  для равноотстоящих с шагом 0,1 значений  $x$ . Целесообразно вычислить  $y(\pm 0,1)$ ,  $y(\pm 0,2)$ ,  $y(\pm 0,3)$ , чтобы не привлекать новых членов ряда, следующих за выписанными в (6.15).

Вычисленные значения  $y(t \cdot 0,1)$ , величина  $\eta_i$ ,  $i=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ , и ее разности записаны в табл. 35 жирным шрифтом. Величину  $\eta_i$  мы записываем с одной запасной цифрой с тем, чтобы уменьшить влияние ошибок округления,

Таблица 35

$x$	$y$	$\Delta y$	$\frac{x}{y}$	$0,5y$	$f(x, y)$	$\eta$	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$	$\Delta^3\eta$	$\Delta^4\eta$
-0,3	0,90689		-0,33080	0,45345	0,12265	0,012265				
-0,2	0,92531		-0,21614	0,46265	0,24651	0,024651	12386			
-0,1	0,95630		-0,10457	0,47815	0,37358	0,037358	12707	321	-386	86
0	1		0	0,5	0,5	0,050000	12642	-65	-300	
0,1	1,05618		0,09468	0,52809	0,62277	0,062277	12277	-365	-183	117
0,2	1,12437		0,17788	0,56218	0,74006	0,074006	11729	-548	-71	112
0,3	1,20398		0,24917	0,60199	0,85116	0,085116		-619		86
0,4	1,29440	0,09042	0,30902	0,64720	0,95622	0,095622	11110	-604	15	107
0,5	1,39505	0,10065	0,35841	0,69752	1,05593	0,105593	10527	-583	36	54
0,6	1,50544	0,11039	0,39855	0,75272	1,15127	0,115127	10527	-535	69	60
0,7	1,62519	0,11975	0,43072	0,81260	1,24332	0,124332	9971	-529	75	29
0,8	1,75403	0,12883	0,45609	0,87702	1,33311	0,133311	9977		98	22
0,9	1,89177	0,13774	0,45610	0,87701	1,33311	0,133307	9977	-437	91	10
1,0	2,03834	0,15540	0,47574	0,94588	1,42162	0,142162	9534	-444	108	4
1,1	2,19374	0,16430	0,47574	0,94588	1,42162	0,142147	9527		102	
1,2	2,35803	0,16429	0,48072	1,01260	1,51262	0,151262	9205	-329	99	-5
			0,48072	1,01260	1,51262	0,151262	9199	-335	103	-9
			0,48072	1,01260	1,51262	0,151262	8979	-226	99	-5
			0,48072	1,01260	1,51262	0,151262	8975	-230	98	-20
			0,48072	1,01260	1,51262	0,151262	8851	-128	83	-6
			0,48072	1,01260	1,51262	0,151262	8836	-143	92	-5
			0,48072	1,01260	1,51262	0,151262	8816	-36	93	-18
			0,48072	1,01260	1,51262	0,151262	8816	-35	86	-6
			0,48072	1,01260	1,51262	0,151262	8815	38	74	-3
			0,48072	1,01260	1,51262	0,151262	8816	50	86	-30
			0,48072	1,01260	1,51262	0,151262	8853		71	
			0,48072	1,01260	1,51262	0,151262	8865		44	
			0,48072	1,01260	1,51262	0,151262	8865	109		
			0,48072	1,01260	1,51262	0,151262	8962	82		
			0,48072	1,01260	1,51262	0,151262	8935			
			0,48072	1,01260	1,51262	0,151262	0,168792			
			0,48072	1,01260	1,51262	0,151262	0,168765			

возникающих при вычислении  $\Delta u_n$ . Мы видим, что четвертые разности (в единицах шестого десятичного знака равные 86, 117, 112) отличаются друг от друга в пределах трех единиц пятого знака.

Вычисления при продолжении начала таблицы ведем по формуле (6.8) для  $k=3$ , при этом ее коэффициенты записываем с шестью десятичными знаками:

$$\Delta u_n = \eta_{n+1} - 0,5\Delta\eta_n - 0,0833333\Delta^2\eta_{n-1} - \\ - 0,041667\Delta^3\eta_{n-2} - 0,026389\Delta^4\eta_{n-3}. \quad (6.16)$$

Обозначаем  $x_l = 0,1l$ ,  $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Сделаем пояснения к табл. 35. При вычислении  $\Delta u_3$  мы берем  $\Delta^4\eta_0^{(0)} = 107$ , предполагая, что пятая разность постоянна и равна  $\Delta^4\eta_{-1} - \Delta^4\eta_{-2} = 112 - 117 = -5$ . По разности  $\Delta^4\eta_0^{(0)} = 107$  вычисляем разности, стоящие в косой строке. Эти разности записаны в таблице обычным шрифтом. Теперь мы можем по формуле (6.16) найти  $\Delta u_3^{(1)} = 0,09042$  и, следовательно,

$$y_4^{(1)} = y_3 + \Delta u_3^{(1)} = 1,29440.$$

Далее вычисляем  $f(x_4, y_4^{(1)}) = 0,95622$ . Числа  $\Delta u_3^{(1)}$ ,  $y_4^{(1)}$  и  $f(x_4, y_4^{(1)})$  записаны в таблице обычным шрифтом.

Вычисляем  $\eta_4^{(1)} = 0,1f(x_4, y_4^{(1)})$  и перевычисляем все разности косой строки. Числа  $\Delta^k\eta_{4-k}^{(1)}$  записаны в таблице жирным шрифтом над соответствующими числами  $\Delta^k\eta_{4-k}^{(0)}$  ( $k = 0, 1, 2, 3, 4$ ). По формуле (6.16) находим  $\Delta u_3^{(2)}$ , которое оказывается равным 0,09042, и поэтому  $y_4^{(1)} = 1,29440$  считаем окончательным значением и переходим к вычислению  $\Delta u_4$ . Числа косой строки

$$\eta_4^{(0)}, \Delta\eta_3^{(0)}, \Delta^2\eta_2^{(0)}, \Delta^3\eta_1^{(0)}, \Delta^4\eta_0^{(0)},$$

записанные обычным шрифтом, при дальнейших вычислениях во внимание не принимаются. При вычислении  $\Delta u_4$  берем  $\Delta^4\eta_1^{(0)} = 60$  и т. д.

На некоторых шагах вычисления оказывается, что  $\Delta u_m^{(1)} \neq \Delta u_m^{(2)}$  (разница в одну единицу пятого десятичного знака),

например, при  $m = 7$ , но всякий раз значение  $\Delta y_m^{(2)}$  оказывается окончательным.

Отметим, что начальные разности, которые мы используем для получения первого приближения и которые записаны обычным шрифтом, при вычислениях пишут карандашом, а разности, употребляемые для получения второго приближения, записывают чернилами, исправляя изменившиеся последние цифры начальных разностей.

### § 7. Метод типа Коуэлла

Формулу метода типа Коуэлла (3.38)

$$\Delta y_n = h \sum_{j=-k-1}^k \tilde{b}_{kj} f(x_{n-j}, y_{n-j}) \quad (7.1)$$

приведем к виду, в котором она обычно применяется при вычислениях.

Пусть  $Q(x)$  — интерполяционный многочлен, построенный по условиям

$$Q(x_{n-j}) = y'_{n-j} = f(x_{n-j}, y_{n-j}), \quad (7.2)$$

$$j = -k-1, -k, \dots, 0, 1, \dots, k.$$

Из способа построения формулы (7.1) ясно, что

$$\Delta y_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} Q(x) dx = h \int_0^1 Q(x_n + ht) dt. \quad (7.3)$$

Узлы, используемые при построении интерполяционного многочлена  $Q(x)$

$$x_{n-k}, x_{n-k+1}, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k+1},$$

расположены симметрично относительно середины промежутка  $[x_n, x_{n+1}]$ , по которому выполняется интегрирование  $Q(x)$ . Число узлов равно  $2k + 2$ . Многочлен  $Q(x)$  естественно

записать с помощью формулы Бесселя [см. (8.11) гл. II]:

$$\begin{aligned}
 Q(x_n + ht) = & \frac{y'_{n+1} + y'_n}{2} + \frac{t - \frac{1}{2}}{1!} \Delta y'_n + \\
 & + \frac{t(t - \frac{1}{2})}{2!} \frac{\Delta^2 y'_n + \Delta^2 y'_{n-1}}{2} + \dots \\
 & \dots + \frac{(t + k - 1)(t + k - 2) \dots t(t - 1) \dots (t - k)}{(2k)!} \times \\
 & \times \frac{\Delta^{2k} y'_{n-k+1} + \Delta^{2k} y'_{n-k}}{2} + \\
 & + \frac{\left(t - \frac{1}{2}\right)(t + k - 1)(t + k - 2) \dots t(t - 1) \dots (t - k)}{(2k + 1)!} \Delta^{2k+1} y'_{n-k}.
 \end{aligned} \tag{7.4}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned}
 \tilde{a}_{2j} &= \frac{1}{(2j)!} \int_0^1 (t + j - 1)(t + j - 2) \dots t(t - 1) \dots (t - j) dt, \\
 \tilde{a}_{2j+1} &= \frac{1}{(2j + 1)!} \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)(t + j - 1)(t + j - 2) \dots \\
 & \dots t(t - 1) \dots (t - j) dt, \quad j = 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned} \tag{7.5}$$

Считаем, что

$$(t + j - 1)(t + j - 2) \dots t(t - 1) \dots (t - j) = 1 \quad \text{при } j = 0.$$

Числа  $\tilde{a}_{2j+1}$  равны нулю. В самом деле, если обозначить подынтегральную функцию — многочлен степени  $2j + 1$  — через

$$F(t) = \left(t - \frac{1}{2}\right)(t + j - 1)(t + j - 2) \dots t(t - 1) \dots (t - j)$$

и выполнить замену переменной  $t = 1 - z$ , то получим

$$\begin{aligned}
 F(t) = & \left(-z + \frac{1}{2}\right)(-z + j) \dots (-z + 1)(-z) \dots \\
 & \dots (-z - j + 1).
 \end{aligned}$$

Изменяя знак внутри каждой скобки на обратный (скобок  $2j + 1$ ), найдем

$$F(t) = -F(z) = -F(1-t).$$

Отсюда видно, что

$$(2j+1)! \tilde{a}_{2j+1} = \int_0^1 F(t) dt = 0.$$

Числа  $\tilde{a}_{2j}$  все отличны от нуля, так как подынтегральная функция есть многочлен, корнями которого являются только целые числа. Выпишем несколько первых чисел  $\tilde{a}_{2j}$ :

$$\tilde{a}_0 = 1, \quad \tilde{a}_2 = -\frac{1}{12}, \quad \tilde{a}_4 = \frac{11}{720}, \quad \tilde{a}_6 = -\frac{191}{60480}.$$

Интегрируем обе части (7.4) по промежутку  $[0, 1]$ , при этом пользуемся обозначениями (7.5):

$$\int_0^1 Q(x_n + ht) dt = \frac{y'_{n+1} + y'_n}{2} - \frac{1}{12} \frac{\Delta^2 y'_n + \Delta^2 y'_{n-1}}{2} + \dots$$

$$\dots + \tilde{a}_{2k} \frac{\Delta^{2k} y'_{n-k+1} + \Delta^{2k} y'_{n-k}}{2}.$$

Сопоставляя это равенство с (7.3), получим

$$\Delta y_n = h \left( \frac{y'_{n+1} + y'_n}{2} - \frac{1}{12} \frac{\Delta^2 y'_n + \Delta^2 y'_{n-1}}{2} + \dots \right.$$

$$\left. \dots + \tilde{a}_{2k} \frac{\Delta^{2k} y'_{n-k+1} + \Delta^{2k} y'_{n-k}}{2} \right). \quad (7.6)$$

Это и есть требуемая формула метода типа Коуэлла.

Расположение узлов, применяемых при выводе формулы (7.6), является наилучшим в смысле минимизации остатка интерполирования в точках промежутка  $[x_n, x_{n+1}]$  (см. § 6 гл. II), поэтому коэффициенты формулы (7.6) убывают наиболее быстро (по сравнению с аналогичной формулой любого разностного метода, полученного по схеме § 3 при  $p \neq k + 1$ ).

По этой причине формулу (7.6) называют также *формулой с наиболее быстро убывающими коэффициентами*.

Пользуясь обозначением (4.7)

$$\eta_j = hf(x_j, y_j), \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

перепишем (7.6) в виде

$$\Delta y_n = \frac{\eta_{n+1} + \eta_n}{2} - \frac{1}{12} \frac{\Delta^2 \eta_n + \Delta^2 \eta_{n-1}}{2} + \frac{11}{720} \frac{\Delta^4 \eta_{n-1} + \Delta^4 \eta_{n-2}}{2} - \dots + \tilde{a}_{2k} \frac{\Delta^{2k} \eta_{n-k+1} + \Delta^{2k} \eta_{n-k}}{2}. \quad (7.7)$$

При вычислениях и применяется формула (7.7). Ее правая часть зависит от  $y_{n+1}, y_{n+2}, \dots, y_{n+k+1}$ , так что эта формула представляет собой уравнение с  $k+1$  неизвестными.

Поясним, как вести вычисления по формуле (7.7). Будем предполагать, что известны значения

$$y_0, y_1, y_2, \dots, y_{2k}.$$

Для определенности считаем  $k=2$ . Составляем такую же таблицу, как в случае методов Адамса:

$x$	$y$	$\Delta y$	$\eta = hf(x, y)$	$\Delta \eta$	$\Delta^2 \eta$	$\Delta^3 \eta$	$\Delta^4 \eta$	
$x_0$	$y_0$	$\Delta y_0$ $\Delta y_1$ $\Delta y_2$ $\Delta y_3$	$\eta_0$	$\Delta \eta_0$	$\Delta^2 \eta_0$	$\Delta^3 \eta_0$	$\Delta^4 \eta_0$	
$x_1$	$y_1$		$\eta_1$	$\Delta \eta_1$				$\Delta^2 \eta_1$
$x_2$	$y_2$		$\eta_2$	$\Delta \eta_2$	$\Delta^2 \eta_2$	$\Delta^3 \eta_2$		$\Delta^4 \eta_1$
$x_3$	$y_3$		$\eta_3$	$\Delta \eta_3$	$\Delta^2 \eta_3$	$\Delta^3 \eta_3$		$\Delta^4 \eta_2$
$x_4$	$y_4$		$\eta_4$	$\Delta \eta_4$	$\Delta^2 \eta_4$	$\Delta^3 \eta_4$	$\Delta^4 \eta_3$	
$x_5$			$\eta_5$	$\Delta \eta_5$	$\Delta^2 \eta_5$			
$x_6$			$\eta_6$	$\Delta \eta_6$				
$x_7$			$\eta_7$					

В таблице известны все величины, расположенные выше жирной ступенчатой линии. Формула (7.7) при  $k = 2$  записывается так:

$$\Delta y_n = \frac{\eta_{n+1} + \eta_n}{2} - \frac{1}{12} \frac{\Delta^2 \eta_n + \Delta^2 \eta_{n-1}}{2} + \frac{11}{720} \frac{\Delta^4 \eta_{n-1} + \Delta^4 \eta_{n-2}}{2}. \quad (7.8)$$

Положим в этой формуле  $n = 4$ :

$$\Delta y_4 = \frac{\eta_5 + \eta_4}{2} - \frac{1}{12} \frac{\Delta^2 \eta_4 + \Delta^2 \eta_3}{2} + \frac{11}{720} \frac{\Delta^4 \eta_3 + \Delta^4 \eta_2}{2}. \quad (7.9)$$

В правую часть формулы (7.9) входят разности, зависящие от трех неизвестных величин  $\eta_5$ ,  $\eta_6$ ,  $\eta_7$ . В таблице эти разности расположены ниже жирной ступенчатой линии в трех косых строках, содержащих  $\eta_5$ ,  $\eta_6$ ,  $\eta_7$ . Возьмем начальные приближения к четвертым разностям

$$\Delta^4 \eta_1^{(0)}, \quad \Delta^4 \eta_2^{(0)}, \quad \Delta^4 \eta_3^{(0)},$$

полагая их, например, равными  $\Delta^4 \eta_0$ . Это позволяет указать начальные приближения для всех разностей, расположенных в неизвестных косых строках. По формуле (7.9) находим

$$\Delta y_4^{(1)} = \frac{\eta_5^{(0)} + \eta_4^{(0)}}{2} - \frac{1}{12} \frac{\Delta^2 \eta_4^{(0)} + \Delta^2 \eta_3^{(0)}}{2} + \frac{11}{720} \frac{\Delta^4 \eta_3^{(0)} + \Delta^4 \eta_2^{(0)}}{2}$$

и определяем  $y_5^{(1)}$ .

Вычисляем

$$\eta_5^{(1)} = hf(x_5, y_5^{(1)}).$$

Если  $\eta_5^{(1)} = \eta_5^{(0)}$ , то считаем  $y_5 = y_5^{(1)}$  и переходим к вычислению  $y_6$ . Если  $\eta_5^{(1)} \neq \eta_5^{(0)}$ , то пересчитываем все разности косой строки, заменив  $\eta_5^{(0)}$  на  $\eta_5^{(1)}$ . Получим новое значение для разности четвертого порядка  $\Delta^4 \eta_1^{(1)}$  и можем указать новые приближения к двум следующим разностям четвертого порядка:  $\Delta^4 \eta_2^{(1)}$ ,  $\Delta^4 \eta_3^{(1)}$ . Далее, находим элементы требуемых косых строк и по формуле (7.9) вычисляем  $y_5^{(2)}$ . Если  $y_5^{(2)} = y_5^{(1)}$ , то  $y_5^{(2)}$  принимаем за искомое значение  $y_5$ . Если  $y_5^{(2)} \neq y_5^{(1)}$ , то находим  $\eta_5^{(2)}$ . В случае  $\eta_5^{(2)} = \eta_5^{(1)}$  считаем  $y_5 = y_5^{(2)}$ , в противном случае исправляем четвертую разность на  $\Delta^4 \eta_1^{(2)}$ ,

указываем новые приближения к двум следующим четвертым разностям и т. д. При вычислениях шаг  $h$  должен быть выбран так, чтобы  $y_5^{(1)}$  или  $y_5^{(2)}$  уже не требовали исправления.

Отметим, что при вычислениях по формуле (7.7), в отличие от интерполяционного метода Адамса, мы не имеем полного контроля при помощи дифференциального уравнения: контролируется лишь первая из неизвестных косых строк, содержащая  $\eta_{n+1}$ . Но это не очень опасно, так как влияние ошибок в разностях следующих косых строк на правую часть формулы (7.7) незначительно. Например, из второй косой строки (содержащей  $\eta_{n+2}$ ) в третье слагаемое формулы (7.7) входит вторая разность  $\Delta^2 \eta_n$ . Вторые разности по абсолютной величине значительно меньше, чем величины  $\eta_i$ , и коэффициентом при третьем слагаемом является  $\frac{1}{12}$ , в то время как коэффициентом при втором слагаемом, содержащем  $\eta_{n+1}$ , является 1. Влияние следующих косых строк еще меньше.

**Пример.** Рассмотрим задачу Коши (6.13)

$$y' = \frac{x}{y} + 0.5y, \quad y(0) = 1.$$

В § 6 было построено начало таблицы для этой задачи (с шагом  $h=0,1$ ). В табл. 36, 37 и 38 проведено численное интегрирование этой задачи методом типа Коуэлла. В табл. 36 вычислены значения  $y_4, y_5$  и  $y_6$ , в табл. 37 — значения  $y_7, y_8$  и  $y_9$  и в табл. 38 — значения с  $y_{10}$  по  $y_{15}$ . Результаты вычислений размещены в трех таблицах для упрощения записи таблиц.

Сделаем пояснения к табл. 36. Значения  $y_i, \eta_i, i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$  известны. Эти значения и их разности напечатаны жирным шрифтом. Чтобы вычислить  $\Delta y_3$ , мы должны указать начальные приближения к трем разностям четвертого порядка, следующим за  $\Delta^4 \eta_{-1} = 112$  (в единицах шестого десятичного знака). Имея в виду вычислить все три значения  $y_4, y_5, y_6$ , мы указываем начальные приближения для пяти разностей четвертого порядка

$$\Delta^4 \eta_0^{(0)} = 107, \Delta^4 \eta_1^{(0)} = 102, \Delta^4 \eta_2^{(0)} = 97, \Delta^4 \eta_3^{(0)} = 92, \Delta^4 \eta_4^{(0)} = 87.$$

Таблица 36

$x$	$y$	$\Delta y$	$\frac{x}{y}$	$0,5y$	$f(x, y)$	$\eta$	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$	$\Delta^3\eta$	$\Delta^4\eta$
-0,3	0,90689		-0,33080	0,45345	0,12265	0,012265				
							12386			
-0,2	0,92531		-0,21614	0,46265	0,24651	0,024651		321		
							12707		-386	
-0,1	0,95630		-0,10457	0,47815	0,37358	0,037358		-65		86
							12642		-300	
0	1		0	0,5	0,5	0,050000		-365		117
							12277		-183	
0,1	1,05618		0,09468	0,52809	0,62277	0,062277		-548		112
							11729		-71	
0,2	1,12437		0,17788	0,56218	0,74006	0,074006		-619		86
									15	107
							11110		36	
0,3	1,20398		0,24917	0,60199	0,85116	0,085116		-604		54
								-583		56
									69	102
		0,09042				0,090369	10506	-568	71	42
						0,090380	10527	-514	138	100
								-535		29
0,4	1,29440		0,30902	0,64720	0,95622	0,095622		-533		29
						0,095643		-445		97
		0,10065				0,100608	9971	-486	98	16
		0,10071				0,100608	9973	-483	100	16
						0,100684	10082	-328	235	94
						0,105593		-437		4
	1,39505		0,35841	0,69752	1,05593	0,105595		-433		2
0,5	1,39511		0,35839	0,69756	1,05595	0,105725		-210		92
		0,11039				0,110360	9534	-386	102	-8
		0,11040				0,110365	9540	-382	102	-12
		0,11067				0,110661	9872	-46	327	90
	1,50544		0,39855	0,75272	1,15127	0,115127		-335		-21
	1,50545		0,39855	0,75272	1,15127	0,115135		-331		-25
0,6	1,50578		0,39846	0,75289	1,15135	0,115597		117		87

Таблица 37

$x$	$y$	$\Delta y$	$\frac{x}{y}$	$0,5y$	$f(x, y)$	$\eta$	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$	$\Delta^3\eta$	$\Delta^4\eta$
0,4	1,29440	0,10065				0,095622		-535		29
										9971
0,5	1,39505	0,11039				0,105593		-437		10
							9534		102	
0,6	1,50544	0,11975				0,115127		-329		-5
									103	-21
						0,119730	9205	-278	102	-4
						0,119726	9199	-294	81	-34
								-226		-5
								-227		-3
0,7	1,62519	0,12884	0,43072	0,81260	1,24332	0,124332		-254		-46
		0,12882				0,128822	8979	-178	98	-2
						0,128821	8978	-178	99	-2
						0,128798	8945	-236	35	-58
						0,133311		-128		-5
						0,133310		-128		0
0,8	1,75403	0,13774	0,45609	0,87702	1,33311	0,133271		-219		-71
	1,75401									
			0,45610	0,87700	1,33310	0,137736	8851	-82	93	-5
						0,137735	8850	-78	99	2
		0,13765				0,137634	8726	-237	-36	-84
						0,142162		-35		-5
	1,89177		0,47574	0,94588	1,42162	0,142160		-29		3
0,9	1,89166		0,47577	0,94583	1,42160	0,141997		-255		-96

Заполняем таблицу конечных разностей величины  $\eta_i^{(0)}$  вплоть до горизонтальной строки, содержащей  $x_6 = 0,6$ . Именно, последовательными сложениями находим разности третьего порядка

$$\Delta^3\eta_1^{(0)} = \Delta^3\eta_0 + \Delta^4\eta_0^{(0)} = -71 + 107 = 36,$$

$$\Delta^3\eta_2^{(0)} = \Delta^3\eta_1^{(0)} + \Delta^4\eta_1^{(0)} = 36 + 102 = 138,$$

$$\Delta^3\eta_3^{(0)} = \Delta^3\eta_2^{(0)} + \Delta^4\eta_2^{(0)} = 138 + 97 = 235,$$

$$\Delta^3\eta_4^{(0)} = \Delta^3\eta_3^{(0)} + \Delta^4\eta_3^{(0)} = 235 + 92 = 327.$$

Таблица 38

$x$	$y$	$\Delta y$	$\frac{x}{y}$	$0,5y$	$f(x, y)$	$\eta$	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$	$\Delta^3\eta$	$\Delta^4\eta$
0,6	1,50544					0,115127		-329		-5
0,7	1,62519					0,124332	9205	-226	103	-5
0,8	1,75403					0,133311	8979	-128	98	-6 -5
0,9	1,89177					0,142162	8851	-36 -35	92 93	-18 -5
		0,14657				0,16570 0,146570	8815 8816	1 9	74 88	-10 -5
1,0	1,03834		0,49060	1,01917	1,50977	0,150977 0,150978		38 53		-2 -5
		0,15540				0,155404 0,155412	8853 8869	74 94	71 72 83	-6 -5
1,1	2,19374		0,50143	1,09687	1,59830	0,159830 0,159847		109 110 136		-10 -9 -5
		0,16430 0,16434				0,164311 0,164312 0,164350	8962 8963 9005	140 142 175	61 63 78	-7 -8 -5
1,2	2,35804 2,35808		0,50890 0,50889	1,17902 1,17904	1,68792 1,68793	0,168792 0,168793 0,168852		170 173 214		-4 -7 -5
		0,17334 0,17344				0,173358 0,173361 0,173462	9132 9136 9219	198 201 250	57 56 73	-6 -4 -5
1,3	2,53138 2,53152		0,51355 0,51353	1,26569 1,26576	1,77924 1,77929	0,177924 0,177929 0,178071		227 229 287		-7 -1 -5
		0,18258 0,18259 0,18280				0,182804 0,182612 0,182824	9359 9365 9506	252 256 321	50 55 68	-8 2 -5
1,4	2,71396 2,71397 2,71432		0,51585 0,51585 0,51578	1,35698 1,35698 1,35716	1,87283 1,87283 1,87294	0,187283 0,187294 0,187577		277 284 355		-10 5 -5
		0,19208 0,19209 0,19148				0,192101 0,192118 0,192508	9636 9649 9861	297 314 386	40 60 63	-12 8 -5
1,5	2,90604 2,90606 2,90680		0,51617 0,51616 0,51603	1,45302 1,44303 1,45340	1,96919 1,96919 1,96043	0,196919 0,196943 0,197438		317 344 418		-13 11 -5

Таким же путем находим разности второго порядка:

$$\begin{aligned}\Delta^2\eta_2^{(0)} &= \Delta^2\eta_1 + \Delta^3\eta_1^{(0)} = -619 + 36 = -583, \\ \Delta^2\eta_3^{(0)} &= \Delta^2\eta_2^{(0)} + \Delta^3\eta_2^{(0)} = -583 + 138 = -445, \\ \Delta^2\eta_4^{(0)} &= \Delta^2\eta_3^{(0)} + \Delta^3\eta_3^{(0)} = -445 + 235 = -210, \\ \Delta^2\eta_5^{(0)} &= \Delta^2\eta_4^{(0)} + \Delta^3\eta_4^{(0)} = -210 + 327 = 117;\end{aligned}$$

разности первого порядка:

$$\begin{aligned}\Delta\eta_3^{(0)} &= \Delta\eta_2 + \Delta^2\eta_2^{(0)} = 11110 - 583 = 10527, \\ \Delta\eta_4^{(0)} &= \Delta\eta_3^{(0)} + \Delta^2\eta_3^{(0)} = 10527 - 445 = 10082, \\ \Delta\eta_5^{(0)} &= \Delta\eta_4^{(0)} + \Delta^2\eta_4^{(0)} = 10082 - 210 = 9872\end{aligned}$$

и величины  $\eta$ :

$$\begin{aligned}\eta_4^{(0)} &= \eta_3 + \Delta\eta_3^{(0)} = 85116 + 10527 = 95643, \\ \eta_5^{(0)} &= \eta_4^{(0)} + \Delta\eta_4^{(0)} = 95643 + 10082 = 105725, \\ \eta_6^{(0)} &= \eta_5^{(0)} + \Delta\eta_5^{(0)} = 105725 + 9872 = 115597.\end{aligned}$$

Записываем полусуммы разностей четного порядка

$$\frac{\eta_i^{(0)} + \eta_{i+1}^{(0)}}{2}, \quad \frac{\Delta^2\eta_{i-1}^{(0)} + \Delta^2\eta_i^{(0)}}{2}, \quad \frac{\Delta^4\eta_{i-2}^{(0)} + \Delta^4\eta_{i-1}^{(0)}}{2},$$

$$i = 3, 4, 5 \quad (\eta_3^{(0)} = \eta_3).$$

Каждая полусумма разностей записывается в строке, расположенной между теми разностями, из которых она составлена, и в том же столбце, из которого берутся разности.

Далее, по формуле (7.8)

$$\Delta y_i^{(1)} = \frac{\eta_i^{(0)} + \eta_{i+1}^{(0)}}{2} - \frac{1}{12} \frac{\Delta^2\eta_{i-1}^{(0)} + \Delta^2\eta_i^{(0)}}{2} + \frac{11}{720} \frac{\Delta^4\eta_{i-2}^{(0)} + \Delta^4\eta_{i-1}^{(0)}}{2}$$

находим  $\Delta y_i^{(1)}$ ,  $i = 3, 4, 5$ . Полусуммы разностей, нужные для вычисления  $\Delta y_i^{(1)}$ , находятся в той же горизонтальной строке, в которую следует записывать  $\Delta y_i^{(1)}$ . Зная  $\Delta y_i^{(1)}$ , можем вычислить

$$y_{i+1}^{(1)} = y_i^{(1)} + \Delta y_i^{(1)}, \quad i = 3, 4, 5 \quad (y_3^{(1)} = y_3).$$

и найти

$$f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(1)}), \quad i = 3, 4, 5.$$

Все величины, о которых мы сейчас говорили: начальные значения разностей, полусуммы разностей четного порядка,

$$\Delta y_i^{(1)}, \quad y_{i+1}^{(1)}, \quad f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(1)}), \quad i = 3, 4, 5,$$

в таблице записаны обычным шрифтом.

Далее, находим  $\eta_i^{(1)}$  по формуле

$$\eta_i^{(1)} = 0,1 f(x_i, y_i^{(1)}), \quad i = 4, 5, 6.$$

Вычисляем разности первого порядка

$$\Delta \eta_i^{(1)} = \eta_{i+1}^{(1)} - \eta_i^{(1)}, \quad i = 3, 4, 5 \quad (\eta_3^{(1)} = \eta_3),$$

разности второго порядка

$$\Delta^2 \eta_i^{(1)} = \Delta \eta_{i+1}^{(1)} - \Delta \eta_i^{(1)}, \quad i = 2, 3, 4 \quad (\Delta \eta_2^{(1)} = \Delta \eta_2),$$

разности третьего порядка

$$\Delta^3 \eta_i^{(1)} = \Delta^2 \eta_{i+1}^{(1)} - \Delta^2 \eta_i^{(1)}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (\Delta^2 \eta_1^{(1)} = \Delta^2 \eta_1),$$

разности четвертого порядка

$$\Delta^4 \eta_i^{(1)} = \Delta^3 \eta_{i+1}^{(1)} - \Delta^3 \eta_i^{(1)}, \quad i = 0, 1, 2 \quad (\Delta^3 \eta_0^{(1)} = \Delta^3 \eta_0).$$

Найденных величин  $\eta_i^{(1)}$  и их разностей недостаточно, чтобы воспользоваться формулой (7.8) и найти  $\Delta y_i^{(2)}$ . Указываем недостающие разности следующим образом. Мы уже нашли

$$\Delta^4 \eta_0^{(1)} = 86, \quad \Delta^4 \eta_1^{(1)} = 56, \quad \Delta^4 \eta_2^{(1)} = 29.$$

Считая, что пятая разность постоянна и равна  $-27$ , положим

$$\Delta^4 \eta_3^{(1)} = 2, \quad \Delta^4 \eta_4^{(1)} = -25.$$

Это позволяет найти  $\Delta^3 \eta_4^{(1)}$  и  $\Delta^2 \eta_5^{(1)}$ . Каждое из чисел  $\Delta^k \eta_i^{(1)}$  записано курсивом над числом  $\Delta^k \eta_i^{(0)}$  в той же клетке таблицы, в которой находится  $\Delta^k \eta_i^{(0)}$ .

По разностям  $\Delta^k \eta_i^{(1)}$  находим второе приближение  $\Delta y_i^{(2)}$  ( $i = 3, 4, 5$ ) точно так же, как выше мы находили первое

приближение  $\Delta y_i^{(1)}$  ( $i = 3, 4, 5$ ) по начальным разностям  $\Delta^k \eta_i^{(0)}$ . Именно, вычисляем полусуммы четных разностей

$$\frac{\eta_i^{(1)} + \eta_{i+1}^{(1)}}{2}, \quad \frac{\Delta^2 \eta_{i-1}^{(1)} + \Delta^2 \eta_i^{(1)}}{2}, \quad \frac{\Delta^4 \eta_{i-2}^{(1)} + \Delta^4 \eta_{i-1}^{(1)}}{2},$$

$$i = 3, 4, 5 \quad (\eta_3^{(1)} = \eta_3),$$

и записываем курсивом над соответствующими полусуммами начальных разностей. По формуле

$$\Delta y_i^{(2)} = \frac{\eta_i^{(1)} + \eta_{i+1}^{(1)}}{2} - \frac{1}{12} \frac{\Delta^2 \eta_{i-1}^{(1)} + \Delta^2 \eta_i^{(1)}}{2} + \frac{11}{720} \frac{\Delta^4 \eta_{i-2}^{(1)} + \Delta^4 \eta_{i-1}^{(1)}}{2}$$

находим  $\Delta y_i^{(2)}$ ,  $i = 3, 4, 5$ . При этом оказывается, что

$$\Delta y_3^{(2)} = \Delta y_3^{(1)} = 0,09042,$$

поэтому значение  $\Delta y_3^{(2)}$  в таблицу не записываем и считаем значение  $\Delta y_3^{(1)}$  и, значит,  $y_4^{(1)}$  окончательным;  $\Delta y_i^{(2)} \neq \Delta y_i^{(1)}$  при  $i = 4, 5$ , поэтому  $\Delta y_i^{(2)}$ ,  $y_{i+1}^{(2)}$ , а также  $f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(2)})$ ,  $i = 4, 5$ , записываем (курсивом) в таблицу над соответствующими величинами первого приближения.

Вычисляем

$$\eta_i^{(2)} = 0,1 f(x_i, y_i^{(2)}), \quad i = 5, 6,$$

и их разности. В таблице эти числа, а также числа, получаемые при дальнейших вычислениях, записаны жирным шрифтом (над соответствующим числом, записанным курсивом). В частности, получаем

$$\Delta^4 \eta_1^{(2)} = 54, \quad \Delta^4 \eta_2^{(2)} = 29.$$

Считая пятую разность постоянной и равной  $-25$ , полагаем

$$\Delta^4 \eta_3^{(2)} = 4, \quad \Delta^4 \eta_4^{(2)} = -21.$$

Находим  $\Delta^3 \eta_4^{(2)}$  и  $\Delta^2 \eta_5^{(2)}$ .

По разностям  $\Delta^k \eta_i^{(2)}$  можно найти третье приближение:  $\Delta y_4^{(3)}$  и  $\Delta y_5^{(3)}$ . При этом получим

$$\Delta y_4^{(3)} = \Delta y_4^{(2)} = 0,10065,$$

поэтому  $\Delta y_4^{(3)}$  не записываем в таблицу и  $\Delta y_4^{(2)}$  и, следовательно,  $y_5^{(2)}$  считаем окончательным значением. Далее запи-

сываем  $\Delta y_5^{(3)} = 0,11039$  и  $y_6^{(3)} = 1,50544$ , что отличается от  $y_6^{(2)}$  на одну единицу пятого десятичного знака. Вычисляя  $f(x_6, y_6^{(3)})$ , получим:

$$f(x_6, y_6^{(3)}) = f(x_6, y_6^{(2)}) = 1,15127$$

и, следовательно,  $\gamma_6^{(3)} = \gamma_6^{(2)}$ . По этой причине значение  $y_6^{(3)}$  также считаем окончательным.

### § 8. Численное интегрирование систем уравнений первого порядка

Рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Чтобы не усложнять записи, ограничимся случаем системы двух уравнений:

$$\left. \begin{aligned} y' &= f(x, y, z), \\ z' &= g(x, y, z), \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

$$y(x_0) = y_0, \quad z(x_0) = z_0.$$

Требуется построить таблицы значений функций  $y(x)$  и  $z(x)$  с шагом  $h$  и начальными значениями  $y_0$  и  $z_0$  соответственно. Предполагаем, как и в случае задачи Коши для одного уравнения первого порядка, что нам известно начало таблицы, т. е. указаны приближенные значения функций  $y(x)$  и  $z(x)$  для  $x = x_0 + jh$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, k$ :

$$\begin{aligned} &y_0, y_1, y_2, \dots, y_k, \\ &z_0, z_1, z_2, \dots, z_k. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Строить начало таблицы можно методом разложения решений  $y(x)$  и  $z(x)$  в ряд по степеням  $x - x_0$ , а также методом Рунге — Кутты.

Для продолжения таблиц (8.2) может служить любой из рассмотренных выше методов для уравнений первого порядка. Покажем например, как можно применить расчетную формулу экстраполяционного способа Адамса (4.8) для продолжения таблиц (8.2).

Введем величины

$$\begin{aligned} \eta_l &= h y'_l = h f(x_l, y_l, z_l), \\ \zeta_l &= h z'_l = h g(x_l, y_l, z_l), \quad l = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (8.3)$$

и составим две таблицы конечных разностей:

$x$	$y$	$\eta$	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$	$\Delta^3\eta$	$\Delta^4\eta$
$x_0$	$y_0$	$\eta_0$				
$x_1$	$y_1$	$\eta_1$	$\Delta\eta_0$			
$x_2$	$y_2$	$\eta_2$	$\Delta\eta_1$	$\Delta^2\eta_0$		
$x_3$	$y_3$	$\eta_3$	$\Delta\eta_2$	$\Delta^2\eta_1$	$\Delta^3\eta_0$	
$x_4$	$y_4$	$\eta_4$	$\Delta\eta_3$	$\Delta^2\eta_2$	$\Delta^3\eta_1$	$\Delta^4\eta_0$

$x$	$z$	$\zeta$	$\Delta\zeta$	$\Delta^2\zeta$	$\Delta^3\zeta$	$\Delta^4\zeta$
$x_0$	$z_0$	$\zeta_0$				
$x_1$	$z_1$	$\zeta_1$	$\Delta\zeta_0$			
$x_2$	$z_2$	$\zeta_2$	$\Delta\zeta_1$	$\Delta^2\zeta_0$		
$x_3$	$z_3$	$\zeta_3$	$\Delta\zeta_2$	$\Delta^2\zeta_1$	$\Delta^3\zeta_0$	
$x_4$	$z_4$	$\zeta_4$	$\Delta\zeta_3$	$\Delta^2\zeta_2$	$\Delta^3\zeta_1$	$\Delta^4\zeta_0$

Для определенности мы взяли здесь  $k=4$ . Значения  $y_5$  и  $z_5$  можем найти по формулам

$$y_5 = y_4 + \eta_4 + \frac{1}{2} \Delta\eta_3 + \frac{5}{12} \Delta^2\eta_2 + \frac{3}{8} \Delta^3\eta_1 + \frac{251}{720} \Delta^4\eta_0,$$

$$z_5 = z_4 + \zeta_4 + \frac{1}{2} \Delta\zeta_3 + \frac{5}{12} \Delta^2\zeta_2 + \frac{3}{8} \Delta^3\zeta_1 + \frac{251}{720} \Delta^4\zeta_0.$$

Эти формулы получены на основании (4.8). Зная  $y_5$  и  $z_5$ , мы можем найти  $\eta_5$  и  $\zeta_5$  по формулам (8.3) и, следовательно, добавить косую строку в каждой из таблиц. Таким же путем находим  $y_6$  и  $z_6$  и т. д.

В случае системы  $n$  уравнений нужно заполнять одновременно  $n$  таблиц конечных разностей.

Известно, что задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения порядка  $n$

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}), \\ y(x_0) &= y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{aligned} \quad (8.4)$$

приводится к задаче Коши для системы дифференциальных уравнений первого порядка. Именно, обозначим

$$y' = y_1, \quad y'' = y_2, \dots, \quad y^{(n-1)} = y_{n-1}.$$

Очевидно, задача Коши (8.4) равносильна задаче Коши для системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned}y' &= y_1, \\y_1' &= y_2, \\&\dots \dots \dots \\y_{n-2}' &= y_{n-1}, \\y_{n-1}' &= f(x, y, y_1, y_2, \dots, y_{n-1})\end{aligned}$$

с начальными условиями

$$y(x_0) = y_0, \quad y_1(x_0) = y_0', \quad y_2(x_0) = y_0'', \quad \dots, \quad y_{n-1}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Таким образом, мы получаем способ решения задачи Коши (8.4) для дифференциального уравнения порядка  $n$ .

## § 9. Экстраполяционный метод Штермера

В этом и двух следующих параграфах будем рассматривать разностные методы решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка специального вида

$$y'' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0'. \quad (9.1)$$

Предполагаем, что решение задачи (9.1) существует на конечном промежутке  $[x_0, X]$ ,  $X > x_0$ . Считаем, что в некоторой замкнутой области  $D$  на плоскости  $(x, y)$ , содержащей график решения  $y = y(x)$  на  $[x_0, X]$ , функция  $f(x, y)$  непрерывна и имеет непрерывные частные производные до требуемого порядка.

Конечно, задачу (9.1) можно было бы решать методом приведения к системе уравнений первого порядка, как указано в § 8, однако при этом пришлось бы заполнять две таблицы конечных разностей. То обстоятельство, что  $f(x, y)$  не зависит от  $y'$ , позволяет указать такие методы, при осуществлении которых требуется заполнять лишь одну таблицу конечных разностей.

Пусть  $h > 0$  и

$$x_j = x_0 + jh, \quad j = 0, 1, 2, \dots, N,$$

где  $N$  удовлетворяет неравенству

$$x_0 + Nh \leq X < x_0 + (N + 1)h.$$

Предположим, что имеется начало таблицы, т. е. указаны приближенные значения решения  $y(x)$  для  $x = x_j$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, k$ :

$$y_0, y_1, \dots, y_k. \quad (9.2)$$

Начало таблицы можно строить методом разложения решения в ряд по степеням  $x - x_0$ , методом Рунге — Кутты и методом, аналогичным способу А. Н. Крылова (§ 5).

Разностные методы решения задачи (9.1) позволяют вычислить приближенные значения решения  $y(x)$  в точках  $x_j$  при  $j \geq k + 1$ . Эти приближенные значения, как и начальные значения (9.2), будем обозначать через  $y_j$ .

Пусть уже вычислены значения

$$y_0, y_1, \dots, y_n, \quad (9.3)$$

где  $n \geq k$ . Требуется вычислить  $y_{n+1}$ . По формуле Тейлора с остаточным членом в интегральной форме имеем

$$y(x) = y(x_n) + y'(x_n)(x - x_n) + \int_{x_n}^x y''(z)(x - z) dz. \quad (9.4)$$

Положим в (9.4) сначала  $x = x_n + h$ , а затем  $x = x_n - h$ . Получим два равенства

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \int_{x_n}^{x_n+h} y''(z)(x_n + h - z) dz,$$

$$y(x_{n-1}) = y(x_n) - hy'(x_n) + \int_{x_n}^{x_n-h} y''(z)(x_n - h - z) dz.$$

Исключим из этих равенств величину  $hy'(x_n)$ , выполняя их почленное сложение:

$$y(x_{n+1}) + y(x_{n-1}) = 2y(x_n) + \int_{x_n}^{x_n+h} y''(x)(h + x_n - x) dx + \int_{x_n}^{x_n-h} y''(x)(x_n - h - x) dx. \quad (9.5)$$

У второго интеграла переставим пределы интегрирования и изменим знак подынтегральной функции. Тогда этот интеграл запишется так:

$$\int_{x_n-h}^{x_n} y''(x)(h+x-x_n) dx.$$

Очевидно, теперь оба интеграла в правой части (9.5) можно объединить в один, и формула (9.5) переписется следующим образом:

$$\Delta^2 y(x_{n-1}) = \int_{x_n-h}^{x_n+h} y''(x)(h-|x-x_n|) dx. \quad (9.6)$$

Подобно тому, как при изложении разностных методов решения задачи Коши для уравнений первого порядка мы исходили из формулы (3.9)

$$\Delta y(x_n) = \int_{x_n}^{x_n+h} y'(x) dx,$$

при изложении разностных методов решения задачи (9.1) будем исходить из формулы (9.6).

Построим интерполяционный многочлен  $P(x)$  функции  $y''(x)$  по ее значениям в следующих  $k+p+1$  узлах:

$$x_{n-k}, x_{n-k+1}, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+p}. \quad (9.7)$$

Имеем

$$y''(x) = P(x) + r(x),$$

где  $r(x)$  — остаточный член интерполирования. Подставляя в (9.6) вместо  $y''(x)$  правую часть последнего равенства, получим, как и в § 3, различные разностные методы решения задачи (9.1).

При  $p=0$  получим так называемый *экстраполяционный метод Штермера*. Разностные методы, получающиеся при  $p \geq 1$ , называются *интерполяционными*. В последующем рассмотрим два таких метода: *интерполяционный метод Штермера*, отвечающий  $p=1$ , и *метод Коуэлла*, отвечающий  $p=k$ .

Установим формулу экстраполяционного метода Штермера. Интерполяционный многочлен  $P(x)$ , построенный по условиям

$$P(x_{n-j}) = y''(x_{n-j}), \quad j = 0, 1, 2, \dots, k,$$

естественно записать по формуле Ньютона для интерполирования в конце таблицы, так как значения этого многочлена будут использованы на промежутке  $[x_{n-1}, x_{n+1}]$ :

Имеем

$$\begin{aligned} y''(x_n + ht) = & y''(x_n) + \frac{t}{1!} \Delta y''(x_{n-1}) + \frac{t(t+1)}{2!} \Delta^2 y''(x_{n-2}) + \dots \\ & \dots + \frac{t(t+1) \dots (t+k-1)}{k!} \Delta^k y''(x_{n-k}) + r(x_n + ht), \end{aligned} \quad (9.8)$$

где  $r(x_n + ht)$  — остаточный член интерполирования.

В интеграле (9.6) сделаем замену переменной интегрирования  $x = x_n + ht$ :

$$\Delta^2 y(x_{n-1}) = h^2 \int_{-1}^1 y''(x_n + ht) (1 - |t|) dt.$$

Подставим сюда вместо  $y''(x_n + ht)$  правую часть формулы (9.8). Получим

$$\begin{aligned} \Delta^2 y(x_{n-1}) = & h^2 \int_{-1}^1 \left[ y''(x_n) + \frac{t}{1!} \Delta y''(x_{n-1}) + \dots \right. \\ & \left. \dots + \frac{t(t+1) \dots (t+k-1)}{k!} \Delta^k y''(x_{n-k}) \right] (1 - |t|) dt + \\ & + h^2 \int_{-1}^1 r(x_n + ht) (1 - |t|) dt. \end{aligned} \quad (9.9)$$

Введем обозначение

$$\begin{aligned} \alpha_j = & \frac{1}{j!} \int_{-1}^1 t(t+1) \dots (t+j-1) (1 - |t|) dt, \\ & j = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (9.10)$$

Выпишем несколько первых чисел  $\alpha_j$ :

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \frac{1}{12}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{12}, \quad \alpha_4 = \frac{19}{240},$$

$$\alpha_5 = \frac{3}{40}, \quad \alpha_6 = \frac{863}{12096}.$$

С помощью этих обозначений формулу (9.9) можно записать так:

$$\Delta^2 y(x_{n-1}) = h^2 \left[ y''(x_n) + \frac{1}{12} \Delta^2 y''(x_{n-2}) + \frac{1}{12} \Delta^3 y''(x_{n-3}) + \dots \right. \\ \left. \dots + \alpha_k \Delta^k y''(x_{n-k}) \right] + R_{n,k}. \quad (9.11)$$

Здесь

$$R_{n,k} = h^2 \int_{-1}^1 r(x_n + ht) (1 - |t|) dt. \quad (9.12)$$

Предполагая, что существует  $y^{(k+3)}(x)$  на промежутке  $[x_{n-k}, x_{n+1}]$ , можем воспользоваться представлением остаточного члена интерполирования (7.13) из гл. II

$$r(x_n + ht) = h^{k+1} \frac{t(t+1)\dots(t+k)}{(k+1)!} y^{(k+3)}(\xi), \quad x_{n-k} < \xi < x_{n+1}.$$

Подставим это выражение  $r(x_n + ht)$  в (9.12). Получим

$$R_{n,k} = \frac{h^{k+3}}{(k+1)!} \int_{-1}^1 t(t+1)\dots(t+k)(1-|t|) y^{(k+3)}(\xi) dt. \quad (9.13)$$

Множитель при  $y^{(k+3)}(\xi)$  под знаком интеграла меняет знак на промежутке интегрирования, поэтому нельзя применить теорему о среднем.

Формула (9.11) точная, но пользоваться ею при вычислениях нельзя, так как в нее входит остаточный член и неизвестные значения  $y''(x_{n-j})$ . Отбросим в (9.11) остаточный член  $R_{n,k}$ , а вместо величин  $y''(x_i)$  подставим их приближенные значения  $y''_i$ , определяемые из дифференциального уравнения

$$y''_i = f(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (9.14)$$

Значения (9.3)  $y_0, y_1, \dots, y_n$  известны. Получим

$$\Delta^2 y_{n-1} = h^2 \left( y_n'' + \frac{1}{12} \Delta^2 y_{n-2}'' + \frac{1}{12} \Delta^3 y_{n-3}'' + \right. \\ \left. + \frac{19}{240} \Delta^4 y_{n-4}'' + \frac{3}{40} \Delta^5 y_{n-5}'' + \dots + \alpha_k \Delta^k y_{n-k}'' \right). \quad (9.15)$$

Введем обозначение

$$\eta_i = h^2 y_i'' = h^2 f(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (9.16)$$

и перепишем формулу (9.15) в виде

$$\Delta^2 \eta_{n-1} = \eta_n + \frac{1}{12} \Delta^2 \eta_{n-2} + \frac{1}{12} \Delta^3 \eta_{n-3} + \\ + \frac{19}{240} \Delta^4 \eta_{n-4} + \frac{3}{40} \Delta^5 \eta_{n-5} + \dots + \alpha_k \Delta^k \eta_{n-k}. \quad (9.17)$$

Это и есть формула экстраполяционного метода Штермера.

Вычисления по формуле (9.17) располагают в следующую таблицу (считаем  $k=3$ ):

$x$	$y$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\eta = h^2 f(x, y)$	$\Delta \eta$	$\Delta^2 \eta$	$\Delta^3 \eta$
$x_0$	$y_0$			$\eta_0$			
$x_1$	$y_1$	$\Delta y_0$	$\Delta^2 y_0$	$\eta_1$	$\Delta \eta_0$	$\Delta^2 \eta_0$	
$x_2$	$y_2$	$\Delta y_1$	$\Delta^2 y_1$	$\eta_2$	$\Delta \eta_1$	$\Delta^2 \eta_1$	$\Delta^3 \eta_0$
$x_3$	$y_3$	$\Delta y_2$		$\eta_3$	$\Delta \eta_2$		
$x_4$							

Величины, указанные в таблице, известны. Нам нужно вычислить  $y_4$  или, что то же,  $\Delta^2 y_2$ . Положим в (9.17)  $k=3$  и  $n=3$ . Получим

$$\Delta^2 y_2 = \eta_3 + \frac{1}{12} \Delta^2 \eta_1 + \frac{1}{12} \Delta^3 \eta_0.$$

Все величины в правой части этой формулы расположены в нижней косой строке таблицы разностей  $\eta_i$ . Определив  $y_4$ , вычисляем  $\eta_4 = h^2 f(x_4, y_4)$  и добавляем новую косую строку, что позволяет найти  $\Delta^2 y_3$  и т. д.

Таблица 39

$x$	$y$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\cos x$	$y \cos x$	$\eta$	$\Delta \eta$	$\Delta^2 \eta$	$\Delta^3 \eta$	$\Delta^4 \eta$	$\Delta^5 \eta$	$\Delta^6 \eta$
-0,6	1,17968	-0,09971		0,82534	0,97364	0,038946	843	-645	460	-301		
-0,4	1,07997	-0,05997	0,03974	0,92106	0,99472	0,039789	198	-185	159	-318	-17	34
-0,2	1,02000	-0,02000	0,03997	0,98007	0,99967	0,039987	13	-26	-159	-301	17	23
0	1	0,02000	0,04000	1	1	0,040000	-13	-185	-460	-261	40	54
0,2	1,02000	0,05997	0,03997	0,98007	0,99967	0,039987	-198	-645	-721	-167	94	50
0,4	1,07997	0,09971	0,03974	0,92106	0,99472	0,039789	-843	-1366	-888	-23	144	71
0,6	1,17968	0,13854	0,03883	0,82534	0,97364	0,038946	-2209	-2254	-911	192	215	32
0,8	1,31822	0,17509	0,03655	0,69671	0,91842	0,036737	-4463	-3165	-719	439	247	7
1	1,49331	0,20710	0,03201	0,54030	0,80684	0,032274	-7628	-3884	-280	693		
1,2	1,70041	0,23142	0,02432	0,36236	0,61616	0,024646	-11512	-4164	413			
1,4	1,93183	0,24421	0,01279	0,16997	0,32835	0,013134	-15676	-3751				
1,6	2,17604	0,24135	-0,00286	-0,02920	-0,06354	-0,002542	-19427					
1,8	2,41739	0,21918	-0,02217	-0,02270	-0,54923	-0,021969						
2,0	2,63657											

**Пример.** Рассмотрим задачу Коши

$$y'' = y \cos x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \quad (9.18)$$

Ее решение существует на всей вещественной оси  $-\infty < x < +\infty$ .

Для построения начала таблицы воспользуемся разложением решения  $y(x)$  в ряд по степеням  $x$ :

$$y(x) = 1 + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{144} x^6 + \frac{1}{4480} x^8 + \dots \quad (9.19)$$

В качестве шага интегрирования выбираем  $h=0,2$  и вычисляем значения  $y(x)$  для  $x = x_j = j \cdot 0,2$ ;  $j = \pm 1, \pm 2, \pm 3$  с пятью десятичными знаками. Для получения пяти верхних десятичных знаков достаточно тех членов ряда, которые выписаны в (9.19).

Вычислим значения  $y_j$ ,  $j = 4, 5, \dots, 10$ , экстраполяционным методом Штермера. Будем пользоваться формулой (9.17) при  $k=6$ :

$$\begin{aligned} \Delta^2 y_{n-1} = & \eta_n + \frac{1}{12} \Delta^2 \eta_{n-2} + \frac{1}{12} \Delta^3 \eta_{n-3} + \\ & + \frac{19}{240} \Delta^4 \eta_{n-4} + \frac{3}{40} \Delta^5 \eta_{n-5} + \frac{863}{12096} \Delta^6 \eta_{n-6}. \end{aligned}$$

Результаты вычислений приведены в табл. 39.

## § 10. Интерполяционный метод Штермера

Представим функцию  $y''(x)$  с помощью интерполяционного многочлена, построенного по ее значениям в узлах (9.7) при  $p=1$ :

$$x_{n-k}, x_{n-k+1}, \dots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}. \quad (10.1)$$

Интерполяционный многочлен запишем по формуле Ньютона для интерполирования в конце таблицы:

$$\begin{aligned} y''(x_{n+1} + ht) = & y''(x_{n+1}) + \\ & + \frac{t}{1!} \Delta y''(x_n) + \frac{t(t+1)}{2!} \Delta^2 y''(x_{n-1}) + \dots \\ & \dots + \frac{t(t+1) \dots (t+k)}{(k+1)!} \Delta^{k+1} y''(x_{n-k}) + r(x_{n+1} + ht). \end{aligned} \quad (10.2)$$

Здесь  $r(x_{n+1} + ht)$  — остаточный член интерполирования.

В формуле (9.6)

$$\Delta^2 y(x_{n-1}) = \int_{x_n-h}^{x_n+h} y''(x) (h - |x - x_n|) dx$$

сделаем замену переменной интегрирования  $x = x_{n+1} + ht$ :

$$\Delta^2 y(x_{n-1}) = h^2 \int_{-2}^0 y''(x_{n+1} + ht) (1 - |1 + t|) dt. \quad (10.3)$$

Введем обозначение

$$\alpha_j^* = \frac{1}{j!} \int_{-2}^0 t(t+1) \dots (t+j-1) (1 - |1+t|) dt, \\ j = 0, 1, 2, \dots \quad (10.4)$$

Выпишем несколько первых чисел  $\alpha_j^*$ :

$$\alpha_0^* = 1, \quad \alpha_1^* = -1, \quad \alpha_2^* = \frac{1}{12}, \quad \alpha_3^* = 0, \quad \alpha_4^* = -\frac{1}{240}, \\ \alpha_5^* = -\frac{1}{240}, \quad \alpha_6^* = -\frac{221}{60480}.$$

Подставим в (10.3) вместо  $y''(x_{n+1} + ht)$  правую часть формулы (10.2) и примем во внимание обозначения (10.4). Получившиеся при этом первые два слагаемых, содержащие  $y''(x_{n+1})$  и  $\Delta y''(x_n)$ , можно объединить, так как

$$y''(x_{n+1}) - \Delta y''(x_n) = y''(x_n).$$

Получим

$$\Delta^2 y(x_{n-1}) = h^2 \left[ y''(x_n) + \frac{1}{12} \Delta^2 y''(x_{n-1}) - \frac{1}{240} \Delta^4 y''(x_{n-3}) - \dots \right. \\ \left. \dots + \alpha_{k+1}^* \Delta^{k+1} y''(x_{n-k}) \right] + R_{n,k}^*. \quad (10.5)$$

Здесь

$$R_{n,k}^* = h^2 \int_{-2}^0 r(x_{n+1} + ht) (1 - |1+t|) dt.$$

Предположим, что  $y(x)$  имеет производную порядка  $k+4$ . Тогда для остаточного члена интерполирования справедливо представление

$$r(x_{n+1} + ht) = \frac{h^{k+2} t(t+1) \dots (t+k+1)}{(k+2)!} y^{(k+4)}(\xi),$$

$$x_{n-k} < \xi < x_{n+1},$$

и  $R_{n,k}^*$  можно записать в виде

$$R_{n,k}^* = \frac{h^{k+2}}{(k+2)!} \int_{-2}^0 t(t+1) \dots$$

$$\dots (t+k+1) (1 - |1+t|) y^{(k+4)}(\xi) dt. \quad (10.6)$$

В формуле (10.5) отбросим остаточный член и заменим величины  $y''(x_i)$  их приближенными значениями

$$y''_i = f(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Получим

$$\Delta^2 y_{n-1} = h^2 \left( y''_n + \frac{1}{12} \Delta^2 y''_{n-1} - \frac{1}{240} \Delta^4 y''_{n-3} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{240} \Delta^5 y''_{n-4} - \dots + \alpha_{k+1}^* \Delta^{k+1} y''_{n-k} \right). \quad (10.7)$$

Перепишем (10.7), пользуясь обозначением (9.16)

$$\eta_i = h^2 f(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Получим формулу интерполяционного метода Штермера

$$\Delta^2 y_{n-1} = \eta_n + \frac{1}{12} \Delta^2 \eta_{n-1} - \frac{1}{240} \Delta^4 \eta_{n-3} -$$

$$- \frac{1}{240} \Delta^5 \eta_{n-4} - \dots + \alpha_{k+1}^* \Delta^{k+1} \eta_{n-k}. \quad (10.8)$$

Эта формула представляет собой уравнение относительно  $y_{n+1}$ .

Вычисления по формуле (10.8) ведутся так же, как в случае интерполяционного метода Адамса. Считаем, что известны значения

$$y_0, y_1, \dots, y_k, y_{k+1}.$$

Пусть для определенности  $k = 3$ . Составим таблицу:

$x$	$y$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\eta = h^2 f(x, y)$	$\Delta \eta$	$\Delta^2 \eta$	$\Delta^3 \eta$	$\Delta^4 \eta$
$x_0$	$y_0$			$\eta_0$				
$x_1$	$y_1$	$\Delta y_0$		$\eta_1$	$\Delta \eta_0$			
$x_2$	$y_2$	$\Delta y_1$	$\Delta^2 y_0$	$\eta_2$	$\Delta \eta_1$	$\Delta^2 \eta_0$		
$x_3$	$y_3$	$\Delta y_2$	$\Delta^2 y_1$	$\eta_3$	$\Delta \eta_2$	$\Delta^2 \eta_1$	$\Delta^3 \eta_0$	$\Delta^4 \eta_0$
$x_4$	$y_4$	$\Delta y_3$	$\Delta^2 y_2$	$\eta_4$	$\Delta \eta_3$	$\Delta^2 \eta_2$	$\Delta^3 \eta_1$	$\Delta^4 \eta_1$
$x_5$				$\eta_5$	$\Delta \eta_4$	$\Delta^2 \eta_3$	$\Delta^3 \eta_2$	

В таблице известны все величины, расположенные выше жирной ступенчатой линии. Нам нужно вычислить  $y_5$ . Положим в формуле (10.8)  $k = 3$  и  $n = 4$ :

$$\Delta^2 y_3 = \eta_4 + \frac{1}{12} \Delta^2 \eta_3 - \frac{1}{240} \Delta^4 \eta_1. \quad (10.9)$$

Разности  $\Delta^2 \eta_3$  и  $\Delta^4 \eta_1$  неизвестны, они расположены в косой строке таблицы под жирной ступенчатой линией. Укажем начальное приближение к разности  $\Delta^4 \eta_1$ , полагая, например,  $\Delta^4 \eta_1^{(0)} = \Delta^4 \eta_0$ . Это позволяет найти начальные приближения

$$\Delta^4 \eta_1^{(0)}, \Delta^3 \eta_2^{(0)}, \Delta^2 \eta_3^{(0)}, \Delta \eta_4^{(0)}, \eta_5^{(0)}.$$

По формуле (10.9) находим

$$\Delta^2 y_3^{(1)} = \eta_4 + \frac{1}{12} \Delta^2 \eta_3^{(0)} - \frac{1}{240} \Delta^4 \eta_1^{(0)}$$

и определяем  $y_5^{(1)}$ .

Вычисляем  $\eta_5^{(1)} = h^2 f(x_5, y_5^{(1)})$ . Если  $\eta_5^{(1)} = \eta_5^{(0)}$ , то считаем  $y_5 = y_5^{(1)}$  и переходим к вычислению  $y_6$ . Если  $\eta_5^{(1)} \neq \eta_5^{(0)}$ , то  $\eta_5^{(0)}$  заменяем на  $\eta_5^{(1)}$  и пересчитываем все разности этой косой строки. По формуле (10.9) находим  $\Delta^2 y_3^{(2)}$ . Если

Таблица 40

$x$	$y$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\cos x$	$y \cos x$	$\eta$	$\Delta \eta$	$\Delta^2 \eta$	$\Delta^3 \eta$	$\Delta^4 \eta$	$\Delta^5 \eta$	$\Delta^6 \eta$
-0,6	1,17968	-0,09971		0,82534	0,97364	0,038946	843	-645				
-0,4	1,07997	-0,05997	0,03974	0,92106	0,99472	0,039789	198	-185	460	-301		
-0,2	1,02000	-0,02000	0,03997	0,98007	0,99967	0,039987	13	-26	159	-318	-17	34
0	1	0,02000	0,04000	1	1	0,040000	-13	-185	-159	-301	17	23
0,2	1,02000	0,05997	0,03997	0,98007	0,99967	0,039987	-198	-645	-460	-261	40	34
0,4	1,07997	0,09971	0,03974	0,92106	0,99472	0,039789	-843	-1355	-721	-250	94	54
0,6	1,17968	0,13854	0,03883	0,82534	0,97364	0,038946	-2209	-1366	-710	-167	63	23
							-2198	-1355	-888	-198	144	54
									-919		148	



$\Delta^2 y_3^{(2)} = \Delta^2 y_3^{(1)}$ , то полагаем  $y_5 = y_5^{(1)}$ . Если  $\Delta^2 y_3^{(2)} \neq \Delta^2 y_3^{(1)}$ , то находим  $\eta_5^{(2)}$ , сравниваем  $\eta_5^{(2)}$  и  $\eta_5^{(1)}$  и т. д. Шаг должен быть таким, чтобы  $y_{n+1}^{(1)}$  или  $y_{n+1}^{(2)}$  давали окончательное значение  $y_{n+1}$ .

**Пример.** Найдем численное решение задачи (9.18)

$$y'' = y \cos x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

интерполяционным методом Штермера. Считаем  $h = 0,2$ . Начало таблицы построено в § 9. Вычисление значений  $y_j$  при  $j = 4, 5, \dots, 10$  производим по формуле (10.8) для  $k = 5$ :

$$\begin{aligned} \Delta^2 y_{n-1} = & \eta_n + \frac{1}{12} \Delta^2 \eta_{n-1} - \frac{1}{240} \Delta^4 \eta_{n-3} - \\ & - \frac{1}{240} \Delta^5 \eta_{n-4} - \frac{221}{60480} \Delta^6 \eta_{n-5}. \end{aligned} \quad (10.10)$$

Результаты вычислений приведены в табл. 40.

Сделаем пояснения к таблице. Для вычисления  $y_4$  мы должны указать начальное приближение к разности шестого порядка  $\Delta^6 \eta_{-2}^{(0)}$ . Так как мы располагаем только одной разностью  $\Delta^6 \eta_{-3} = 34$  (в единицах шестого десятичного знака), то полагаем  $\Delta^6 \eta_{-2}^{(0)} = 34$ . Далее, вычисляем разности косой строки, содержащей  $\Delta^6 \eta_{-2}^{(0)}$ , и по формуле (10.10) при  $n = 3$  находим  $\Delta^2 y_2^{(1)} = 0,03883$ . Теперь мы можем вычислить  $y_4^{(1)}$  и  $f(x_4, y_4^{(1)})$ . Все величины, о которых мы только что говорили, а именно начальные приближения к разностям,  $\Delta^2 y_2^{(1)}$ ,  $\Delta y_3^{(1)}$ ,  $y_4^{(1)}$ ,  $y_4^{(1)} \cos x_4$  записаны в таблице обычным шрифтом. Вычисляя величину  $\eta_4^{(1)} = 0,036737$ , мы видим, что  $\eta_4^{(1)} \neq \eta_4^{(0)} = 0,036748$ . Находим новые приближения для разностей:  $\Delta^i \eta_{4-i}^{(1)}$  ( $i = 0, 1, \dots, 6$ ). Разности  $\Delta^i \eta_{4-i}^{(1)}$  в таблице записаны жирным шрифтом над соответствующими разностями  $\Delta^i \eta_{4-i}^{(0)}$ . По формуле (10.10), используя разности  $\Delta^i \eta_{4-i}^{(1)}$ , находим  $\Delta^2 y_2^{(2)}$ , при этом оказывается  $\Delta^2 y_2^{(2)} = \Delta^2 y_2^{(1)} = 0,03883$ , так что за окончательное значение  $y_4$  принимаем  $y_4^{(1)}$ .

При вычислении  $y_8$  (а также  $y_{10}$ ) первое и второе приближения не совпадают:  $y_8^{(2)} \neq y_8^{(1)}$ , но  $\eta_8^{(2)} = \eta_8^{(1)}$  и поэтому за окончательное значение  $y_8$  принимаем  $y_8^{(2)}$ . Величины  $y_8^{(2)}$ ,  $\Delta y_7^{(2)}$ ,  $\Delta^2 y_6^{(2)}$  записаны в таблице жирным шрифтом.

## § 11. Метод Коуэлла

Чтобы прийти к методу Коуэлла, мы должны в формуле (9.6)

$$\Delta^2 y(x_{n-1}) = \int_{x_n-h}^{x_n+h} y''(x)(h - |x - x_n|) dx \quad (11.1)$$

заменить функцию  $y''(x)$  представлением с помощью интерполяционного многочлена, построенного по значениям  $y''(x)$  в узлах (9.7) при  $p = k$ :

$$x_{n-k}, \dots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k} \quad (11.2)$$

(см. § 9). Выбор узлов (11.2), расположенных симметрично относительно точки  $x_n$ , является наилучшим в отношении минимизации остатка интерполирования в точках промежутка  $[x_n - h, x_n + h]$ .

Интерполяционный многочлен естественно записать по формуле Стирлинга [см. (8.8) гл. II]:

$$\begin{aligned} y''(x_n + ht) = & y''(x_n) + \frac{t}{1!} \frac{\Delta y''(x_n) + \Delta y''(x_{n-1})}{2} + \\ & + \frac{t^2}{2!} \Delta^2 y''(x_{n-1}) + \frac{t(t^2 - 1^2)}{3!} \frac{\Delta^3 y''(x_{n-1}) + \Delta^3 y''(x_{n-2})}{2} + \dots \\ & \dots + \frac{t(t^2 - 1^2)(t^2 - 2^2) \dots (t^2 - (k-1)^2)}{(2k-1)!} \times \\ & \times \frac{\Delta^{2k-1} y''(x_{n-k+1}) + \Delta^{2k-1} y''(x_{n-k})}{2} + \\ & + \frac{t^2(t^2 - 1^2)(t^2 - 2^2) \dots (t^2 - (k-1)^2)}{(2k)!} \Delta^{2k} y''(x_{n-k}) + r(x_n + ht), \end{aligned} \quad (11.3)$$

где  $r(x_n + ht)$  — остаточный член интерполирования.

В интеграле (11.1) сделаем замену переменной интегрирования  $x = x_n + ht$ :

$$\Delta^2 y(x_{n-1}) = h^2 \int_{-1}^1 y''(x_n + ht)(1 - |t|) dt. \quad (11.4)$$

Обозначим

$$\tilde{\alpha}_{2j} = \frac{1}{(2j)!} \int_{-1}^1 t^2 (t^2 - 1^2) \dots (t^2 - (j-1)^2) (1 - |t|) dt, \quad (11.5)$$

$$\tilde{\alpha}_{2j+1} = \frac{1}{(2j+1)!} \int_{-1}^1 t (t^2 - 1^2) \dots (t^2 - j^2) (1 - |t|) dt, \\ j = 0, 1, 2, \dots$$

Очевидно,  $\tilde{\alpha}_{2j+1} = 0$ . Выпишем несколько первых чисел  $\tilde{\alpha}_{2j}$ :

$$\tilde{\alpha}_0 = 1, \quad \tilde{\alpha}_2 = \frac{1}{12}, \quad \tilde{\alpha}_4 = -\frac{1}{240}, \quad \tilde{\alpha}_6 = \frac{31}{60480}, \\ \tilde{\alpha}_8 = -\frac{289}{3628800}.$$

Подставим вместо  $y''(x_n + ht)$  в (11.4) правую часть равенства (11.3) и воспользуемся обозначениями (11.5). Получим

$$\Delta^2 y(x_{n-1}) = h^2 \left[ y''(x_n) + \frac{1}{12} \Delta^2 y''(x_{n-1}) - \frac{1}{240} \Delta^4 y''(x_{n-2}) + \dots \right. \\ \left. \dots + \tilde{\alpha}_{2k} \Delta^{2k} y''(x_{n-k}) \right] + \tilde{R}_{n,k}, \quad (11.6)$$

где

$$\tilde{R}_{n,k} = h^2 \int_{-1}^1 r(x_n + ht) (1 - |t|) dt.$$

Предполагая, что  $y(x)$  имеет производную порядка  $2k + 3$ , мы можем записать  $\tilde{R}_{n,k}$  в виде

$$R_{n,k} = \frac{h^{2k+3}}{(2k+1)!} \int_{-1}^1 t (t^2 - 1^2) \dots \\ \dots (t^2 - k^2) (1 - |t|) y^{(2k+3)}(\xi) dt, \quad (11.7) \\ x_{n-k} < \xi < x_{n+k}.$$

В формуле (11.6) отбросим остаточный член, заменим  $y''(x_i)$  приближенно на  $y''_i = f(x_i, y_i)$  и воспользуемся обозначением (9.16)

$$\eta_i = h^2 y''_i = h^2 f(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Получим формулу метода Коуэлла:

$$\Delta^2 y_{n-1} = \eta_n + \frac{1}{12} \Delta^2 \eta_{n-1} - \frac{1}{240} \Delta^4 \eta_{n-2} + \frac{31}{60480} \Delta^6 \eta_{n-3} - \dots + \tilde{\alpha}_{2k} \Delta^{2k} \eta_{n-k}. \quad (11.8)$$

Все слагаемые в правой части (11.8), кроме  $\eta_n$ , неизвестны, они зависят от неизвестных величин  $y_{n+1}$ ,  $y_{n+2}$ ,  $\dots$ ,  $y_{n+k}$ . Формула (11.8) представляет собой уравнение с  $k$  неизвестными.

Вычисления по формуле (11.8) аналогичны вычислениям по формуле (7.7) метода типа Коуэлла. Считаем, что известны значения

$$y_0, y_1, \dots, y_{2k}.$$

Составляем таблицу ( $k = 2$ ):

$x$	$y$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\eta = h^2 f(x, y)$	$\Delta \eta$	$\Delta^2 \eta$	$\Delta^3 \eta$	$\Delta^4 \eta$
$x_0$	$y_0$	$\Delta y_0$		$\eta_0$	$\Delta \eta_0$			
$x_1$	$y_1$	$\Delta y_1$	$\Delta^2 y_0$	$\eta_1$	$\Delta \eta_1$	$\Delta^2 \eta_0$	$\Delta^3 \eta_0$	
$x_2$	$y_2$	$\Delta y_2$	$\Delta^2 y_1$	$\eta_2$	$\Delta \eta_2$	$\Delta^2 \eta_1$	$\Delta^3 \eta_1$	$\Delta^4 \eta_0$
$x_3$	$y_3$	$\Delta y_3$	$\Delta^2 y_2$	$\eta_3$	$\Delta \eta_3$	$\Delta^2 \eta_2$	$\Delta^3 \eta_2$	$\Delta^4 \eta_1$
$x_4$	$y_4$			$\eta_4$	$\Delta \eta_4$	$\Delta^2 \eta_3$		$\Delta^4 \eta_2$
$x_5$				$\eta_5$				

Нужно найти  $\Delta^2 y_3$ . Полагаем в (11.8)  $k = 2$  и  $n = 4$ :

$$\Delta^2 y_3 = \eta_4 + \frac{1}{12} \Delta^2 \eta_3 - \frac{1}{240} \Delta^4 \eta_2. \quad (11.9)$$

Входящие в эту формулу разности расположены в той горизонтальной строке таблицы, в которую следует записывать  $\Delta^2 y_3$ . Разности  $\Delta^2 \eta_3$  и  $\Delta^4 \eta_2$  неизвестны, они находятся





в двух нижних косых строках, расположенных ниже жирной ступенчатой линии.

Укажем начальные значения  $\Delta^4\eta_1^{(0)}$  и  $\Delta^4\eta_2^{(0)}$  для старших разностей неизвестных косых строк. Это позволяет найти  $\Delta^2\eta_3^{(0)}$  и воспользоваться формулой (11.9).

Мы получим  $\Delta^2y_3^{(1)}$  и можем найти  $y_5^{(1)}$ . Из дифференциального уравнения находим

$$\eta_5^{(1)} = h^2 f(x_5, y_5^{(1)}).$$

Если  $\eta_5^{(1)} = \eta_5^{(0)}$ , то считаем  $y_5 = y_5^{(1)}$ . Если  $\eta_5^{(1)} \neq \eta_5^{(0)}$ , то перевычисляем разности косой строки, содержащей  $\eta_5^{(1)}$ , и по новому значению  $\Delta^4\eta_1^{(1)}$  указываем новое значение  $\Delta^4\eta_2^{(1)}$ . С помощью (11.9) находим  $\Delta^2y_3^{(2)}$ . Если  $\Delta^2y_3^{(2)} = \Delta^2y_3^{(1)}$ , то считаем  $y_5 = y_5^{(2)} = y_5^{(1)}$ . В противном случае находим

$$\eta_5^{(2)} = h^2 f(x_5, y_5^{(2)}),$$

перевычисляем разности косой строки, содержащей  $\eta_5^{(2)}$ , указываем новое значение  $\Delta^4\eta_2^{(2)}$ , находим  $\Delta^2y_3^{(3)}$  и т. д. Шаг должен быть таким, чтобы  $y_j^{(1)}$  или  $y_j^{(2)}$  уже не требовали исправления.

Отметим еще, что коэффициенты формулы (11.8) быстро убывают, поэтому влияние разностей неизвестных косых строк, не контролируемых дифференциальным уравнением, незначительно.

**Пример.** Рассмотрим задачу Коши (9.18)

$$y'' = y \cos x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Используя начало таблицы, построенное в § 9 на стр. 314 ( $h = 0,2$ ), вычислим методом Коуэлла  $y_4$ ,  $y_5$  и  $y_6$ . Результаты вычислений приведены в табл. 41. Вычисления велись по формуле (11.8) для  $k = 3$ :

$$\Delta^2 y_{n-1} = \eta_n + \frac{1}{12} \Delta^2 \eta_{n-1} - \frac{1}{240} \Delta^4 \eta_{n-2} + \frac{31}{60 \cdot 480} \Delta^6 \eta_{n-3}. \quad (11.10)$$

Чтобы вычислить  $y_4$  (или  $\Delta^2 y_2$ ), мы должны знать разности, расположенные в той же горизонтальной строке,

в которой находится  $\Delta^2 y_2$ . Для этого необходимо указать начальные приближения разностей

$$\Delta^6 \eta_{-2}^{(0)}, \Delta^6 \eta_{-1}^{(0)} \text{ и } \Delta^6 \eta_0^{(0)}.$$

Имея в виду вычислить все три значения  $y_4$ ,  $y_5$ ,  $y_6$ , мы укажем также  $\Delta^6 \eta_{-1}^{(0)}$  и  $\Delta^6 \eta_2^{(0)}$ , именно, положим

$$\Delta^6 \eta_{-2}^{(0)} = \Delta^6 \eta_{-1}^{(0)} = \dots = \Delta^6 \eta_2^{(0)} = 34.$$

Это позволяет найти начальные значения разностей, расположенных в нижних косых строках, содержащих  $\Delta^6 \eta_{-2}^{(0)}$ ,  $\Delta^6 \eta_{-1}^{(0)}$ ,  $\dots$ ,  $\Delta^6 \eta_2^{(0)}$ . Далее, по формуле (11.10) вычисляем  $\Delta^2 y_j^{(1)}$ ,  $j = 2, 3, 4$ . Находим  $y_j^{(1)}$  и

$$f(x_j, y_j^{(1)}) = y_j^{(1)} \cos x_j, \quad j = 4, 5, 6.$$

Все величины, о которых мы только что говорили, записаны в таблице обычным шрифтом. Вычислив  $\eta_j^{(1)}$ , мы видим, что  $\eta_j^{(1)} \neq \eta_j^{(0)}$ ,  $j = 4, 5, 6$ . По величинам  $\eta_j^{(1)}$ ,  $j = 4, 5, 6$ , перевычисляем разности соответствующих трех нижних косых строк, полагаем  $\Delta^6 \eta_1^{(1)} = \Delta^6 \eta_2^{(1)} = \Delta^6 \eta_0^{(1)} = 51$  и вычисляем  $\Delta^5 \eta_2^{(1)}$ ,  $\Delta^4 \eta_3^{(1)}$ . Новые разности, полученные при помощи первого приближения, записаны жирным шрифтом над соответствующими разностями начального приближения.

Вычисляем по формуле (11.10)  $\Delta^2 y_j^{(2)}$ ,  $j = 2, 3, 4$ . При этом оказывается, что  $\Delta^2 y_j^{(2)} = \Delta^2 y_j^{(1)}$  для  $j = 2, 3$ , поэтому считаем значения  $y_j^{(1)}$ ,  $j = 4, 5$ , окончательными. Так как  $\Delta^2 y_4^{(2)} \neq \Delta^2 y_4^{(1)}$ , то находим  $y_6^{(2)}$  и вычисляем  $\eta_6^{(2)}$  и разности  $\Delta^i \eta_{6-i}^{(2)}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, 6$  (в таблице эти разности записаны курсивом). Вычисляя  $\Delta^2 y_4^{(3)}$ , убеждаемся, что  $\Delta^2 y_4^{(3)} = \Delta^2 y_4^{(2)}$  и, следовательно, можно считать  $y_6 = y_6^{(2)}$ .

## § 12. Об оценке ошибки метода Адамса

Рассмотрим вопрос об оценке ошибки, возникающей при численном решении задачи Коши

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (12.1)$$

экстраполяционным и интерполяционным методами Адамса.

Пусть нас интересует численное решение задачи (12.1) на конечном промежутке  $[x_0, X]$ ,  $X > x_0$ . Предполагаем, что решение  $y(x)$  задачи (12.1) на  $[x_0, X]$  существует. Считаем, что в некоторой замкнутой области  $D$ , выпуклой по  $y$  и содержащей криволинейную полосу  $D_\rho$ , определяемую неравенствами

$$x_0 \leq x \leq X, \quad -\rho \leq y(x) - y \leq \rho \quad (\rho > 0), \quad (12.2)$$

$f(x, y)$  непрерывна и имеет непрерывные частные производные до порядка  $r+1$  включительно,  $r \geq 0$ .

Как всегда обозначаем

$$x_j = x_0 + jh, \quad j = 0, 1, 2, \dots, N,$$

где

$$x_0 + Nh \leq X < x_0 + (N+1)h. \quad (12.3)$$

Формулу (3.26) экстраполяционного метода Адамса и формулу (3.32) интерполяционного метода Адамса будем записывать с помощью одной формулы

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{j=-1}^k \beta_j f(x_{n-j}, y_{n-j}). \quad (12.4)$$

В случае экстраполяционного метода Адамса

$$\beta_{-1} = 0, \quad \beta_j = b_{kj}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, k,$$

в случае интерполяционного —

$$\beta_j = b_{kj}^*, \quad j = -1, 0, 1, 2, \dots, k.$$

Для упрощения записи не отмечаем зависимость коэффициентов  $\beta$  от  $k$ .

В силу (3.23), (3.30) и (3.31) имеем

$$\beta_{-1} \geq 0, \quad \beta_0 > 0. \quad (12.5)$$

Метод Адамса можно рассматривать как метод построения решения  $y_n$  разностного уравнения (12.4), принимающего при  $n = 0, 1, 2, \dots, k$  заданные начальные значения

$$y_0, y_1, \dots, y_k. \quad (12.6)$$

Именно, полагая в (12.4)  $n = k$  и подставляя известные значения (12.6), находим  $y_{k+1}$ . При этом, если  $\beta_{-1} = 0$ , то  $y_{k+1}$  вычисляется непосредственно, если  $\beta_{-1} > 0$ , то  $y_{k+1}$  нужно вычислять как корень уравнения вида

$$y_{k+1} = h\beta_{-1} f(x_{k+1}, y_{k+1}) + F(y_0, y_1, \dots, y_k).$$

Аналогично, полагая в (12.4)  $n = k+1$  и подставляя известные значения  $y_1, y_2, \dots, y_k$  и уже найденное  $y_{k+1}$ , находим  $y_{k+2}$  и т. д. Через  $y_n$ ,  $n = k+1, k+2, \dots, N$ , обозначено точное решение разностного уравнения (12.4).

При фактических вычислениях по указанной схеме счет ведется с округлениями, поэтому вместо точных значений

$$y_{k+1}, y_{k+2}, \dots, y_N$$

мы получаем приближенные значения

$$\tilde{y}_{k+1}, \tilde{y}_{k+2}, \dots, \tilde{y}_N.$$

Начальные значения (12.6) будем обозначать также через  $\tilde{y}_n$ :

$$\tilde{y}_n = y_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, k. \quad (12.7)$$

Предполагаем, что

$$(x_n, \tilde{y}_n) \in D, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (12.8)$$

Таким образом,  $\tilde{y}_n$  не удовлетворяет точно разностному уравнению (12.4) и мы имеем

$$\tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + h \sum_{j=-1}^k \beta_j f(x_{n-j}, \tilde{y}_{n-j}) + \Gamma_n. \quad (12.9)$$

Величину  $\Gamma_n$  будем называть *ошибкой округления*.

На основании (3.20) и (3.27) справедливо равенство

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h \sum_{j=-1}^k \beta_j f(x_{n-j}, y(x_{n-j})) + R_n, \quad (12.10)$$

где  $R_n$  — остаточный член или *ошибка метода Адамса* (12.4). Для  $R_n$  в случае экстраполяционного метода Адамса было указано представление (3.22), в случае интерполяционного — представление (3.29). Запишем эти представления одной формулой

$$R_n = ah^{r+2}y^{(r+2)}(\xi), \quad x_{n-k} \leq \xi \leq x_{n+1}, \quad (12.11)$$

где

$$r = k + \text{sign } \beta_{-1} \geq 0.$$

Коэффициент  $a$  в случае экстраполяционного метода Адамса равен  $a_{k+1}$ , где  $a_{k+1}$  определяется формулой (4.5), и в случае интерполяционного метода Адамса  $a = a_{k+2}^*$ , где  $a_{k+2}^*$  определено формулой (6.6).

Равенства (12.10) и (12.11) показывают, что  $y(x_n)$ , вообще говоря, не удовлетворяет уравнению (12.4);  $y(x_n)$  удовлетворяет уравнению (12.4), если  $y(x)$  — многочлен степени не выше  $r+1$ . Так как  $r \geq 0$ , то уравнению (12.4) всегда удовлетворяет  $y(x_n)$ , где  $y(x) = x - x_0$ . В этом случае  $f(x, y(x)) = y'(x) = 1$ ,  $y(x_n) = nh$  и уравнение (12.4) запишется так:

$$(n+1)h = nh + h \sum_{j=-1}^k \beta_j$$

или

$$\sum_{j=-1}^k \beta_j = 1. \quad (12.12)$$

Обозначим через  $\varepsilon_n$  ошибку значения  $\tilde{y}_n$  как приближения к решению  $y(x)$  задачи (12.1):

$$\varepsilon_n = y(x_n) - \tilde{y}_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (12.13)$$

Вычтем равенство (12.9) почленно из равенства (12.10) и примем во внимание обозначение (12.13). Получим разностное уравнение

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + h \sum_{j=-1}^k \beta_j [f(x_{n-j}, y(x_{n-j})) - f(x_{n-j}, \tilde{y}_{n-j})] + R_n - \Gamma_n, \quad (12.14)$$

которому удовлетворяет ошибка  $\varepsilon_n$ .

Отметим, что  $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ , ввиду (12.7), представляют собой ошибки начальных значений (12.6). Верхняя граница абсолютных величин этих ошибок обычно известна. Обозначим ее через  $\varepsilon$ :

$$|\varepsilon_j| \leq \varepsilon, \quad j = 0, 1, 2, \dots, k. \quad (12.15)$$

Будем предполагать также, что известны верхние границы для абсолютной величины ошибки метода

$$|R_n| \leq R \quad (12.16)$$

и для абсолютной величины ошибки округления

$$|\Gamma_n| \leq \Gamma \quad (12.17)$$

при  $n = k, k+1, k+2, \dots, N-1$ .

Верхнюю границу для  $R_n$  можно указать, если воспользоваться представлением (12.11):

$$|R_n| \leq |a| h^{r+2} \max_{x_0 \leq x \leq X} |y^{(r+2)}(x)|. \quad (12.18)$$

Отметим, что определение верхней границы для  $\max |y^{(r+2)}(x)|$ , не сильно превышающей этот максимум, представляет значительные трудности.

Соблюдения неравенства (12.17) можно добиться, если вести вычисления с достаточной точностью.

Наша задача состоит в том, чтобы указать оценку для  $|\varepsilon_n|$  при  $n = k+1, k+2, \dots, N$ . В силу выпуклости  $D$  и условия (12.8) можем воспользоваться формулой конечных приращений

$$f(x_i, y(x_i)) - f(x_i, \tilde{y}_i) = \frac{\partial f(x_i, \xi_i)}{\partial y} [y(x_i) - \tilde{y}_i] = \varepsilon_i \frac{\partial f(x_i, \xi_i)}{\partial y}.$$

Точка  $(x_i, \xi_i)$  принадлежит области  $D$ .

Пользуясь этим равенством, перепишем уравнение (12.14) в виде

$$\begin{aligned} \left[ 1 - h\beta_{-1} \frac{\partial f(x_{n+1}, \xi_{n+1})}{\partial y} \right] \epsilon_{n+1} = \\ = \epsilon_n + h \sum_{j=0}^k \beta_j \frac{\partial f(x_{n-j}, \xi_{n-j})}{\partial y} \epsilon_{n-j} + R_n - \Gamma_n. \end{aligned} \quad (12.19)$$

Обозначим через  $K$  постоянную, удовлетворяющую неравенству

$$\left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| \leq K \quad (12.20)$$

при  $(x, y)$  из области  $D$ . Если  $\beta_{-1} > 0$ , будем считать  $h$  столь малым, что выполнено неравенство

$$h\beta_{-1}K < 1. \quad (12.21)$$

Из (12.19) с помощью (12.20) и (12.21) получаем

$$(1 - h\beta_{-1}K) |\epsilon_{n+1}| \leq |\epsilon_n| + hK \sum_{j=0}^k |\beta_j| |\epsilon_{n-j}| + |R_n| + |\Gamma_n|. \quad (12.22)$$

Рассмотрим уравнение в конечных разностях

$$(1 - h\beta_{-1}K) E_{n+1} = E_n + hK \sum_{j=0}^k |\beta_j| E_{n-j} + R + \Gamma. \quad (12.23)$$

Если

$$|\epsilon_n| \leq E_n, \quad |\epsilon_{n-1}| \leq E_{n-1}, \quad \dots, \quad |\epsilon_{n-k}| \leq E_{n-k},$$

то из неравенства (12.22) получаем

$$(1 - h\beta_{-1}K) |\epsilon_{n+1}| \leq E_n + hK \sum_{j=0}^k |\beta_j| E_{n-j} + |R_n| + |\Gamma_n|.$$

Так как в силу (12.16) и (12.17)

$$|R_n| + |\Gamma_n| \leq R + \Gamma,$$

то правую часть последнего неравенства можно заменить левой частью равенства (12.23), и мы получим

$$(1 - h\beta_{-1}K) |\epsilon_{n+1}| \leq (1 - h\beta_{-1}K) E_{n+1}$$

или по (12.21)

$$|\epsilon_{n+1}| \leq E_{n+1}.$$

Таким образом, если  $E_n$  — решение разностного уравнения (12.23), удовлетворяющее неравенствам

$$|\epsilon_n| \leq E_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, k, \quad (12.24)$$

то неравенства (12.24) будут справедливы также при  $n = k + 1, k + 2, \dots, N$ .

Перейдем к построению решения разностного уравнения (12.23), удовлетворяющего неравенствам (12.24). Так как по (12.15)

$$|\varepsilon_j| \leq \varepsilon, \quad j = 0, 1, 2, \dots, k,$$

то достаточно построить решение  $E_n$  уравнения (12.23), удовлетворяющее неравенствам

$$\varepsilon \leq E_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, k. \quad (12.25)$$

Уравнение (12.23) неоднородное, с правой частью, равной постоянной  $R + \Gamma$ . Будем разыскивать частное решение этого уравнения, равное постоянной  $A$ . Подставляя  $E_n = A$  в (12.23), получим

$$A = -\frac{R + \Gamma}{hK\sigma}, \quad (12.26)$$

где обозначено

$$\sigma = \sum_{j=-1}^k |\beta_j|. \quad (12.27)$$

Отметим, что на основании (12.12)  $\sigma \geq 1$ .

Так как  $A < 0$ , то найденное частное решение не удовлетворяет условиям (12.25). Найдем решение однородного уравнения

$$(1 - h\beta_{-1}K) E_{n+1} = E_n + hK \sum_{j=0}^k |\beta_j| E_{n-j}. \quad (12.28)$$

Запишем характеристическое уравнение для (12.28)

$$\begin{aligned} \chi(z) \equiv (1 - h\beta_{-1}K) z^{k+1} - (1 + h\beta_0K) z^k - \\ - hK \sum_{j=1}^k |\beta_j| z^{k-j} = 0. \end{aligned} \quad (12.29)$$

Имеем

$$\chi(1) = -hK \sum_{j=-1}^k |\beta_j| = -hK\sigma < 0$$

и  $\chi(+\infty) = +\infty$ , поэтому уравнение (12.29) имеет вещественный корень  $z_1$  и  $z_1 > 1$ . Отметим, что при выполнении (12.21) других положительных корней уравнение (12.29) не имеет.  $E_n = z_1^n$  является решением однородного уравнения (12.28). Так как постоянная  $A$ , определяемая равенством (12.26), удовлетворяет неоднородному уравнению (12.23), то

$$E_n = Bz_1^n - \frac{R + \Gamma}{hK\sigma} \quad (12.30)$$

удовлетворяет уравнению (12.23) при любой постоянной  $B$ . Подберем постоянную  $B$  таким образом, чтобы решение (12.30) удо-

влетворяло неравенствам (12.25). Достаточно потребовать, чтобы  $E_0 = \varepsilon$ . Это приводит к следующему значению для  $B$ :

$$B = \varepsilon + \frac{R + \Gamma}{hK\sigma}, \quad (12.31)$$

и решение (12.30) записывается в виде

$$E_n = \varepsilon z_1^n + \frac{R + \Gamma}{hK\sigma} (z_1^n - 1). \quad (12.32)$$

Так как  $z_1 > 1$ , решение (12.32) удовлетворяет условиям (12.25) и, следовательно, неравенство

$$|\varepsilon_n| \leq \varepsilon z_1^n + \frac{R + \Gamma}{hK\sigma} (z_1^n - 1) \quad (12.33)$$

выполнено при всех  $n = k + 1, k + 2, \dots, N$ . Неравенство (12.33) и представляет собой ту оценку, которую мы хотели получить.

Корень  $z_1$  характеристического уравнения (12.29) является функцией от  $h$ :  $z_1 = z_1(h)$ . Полагая в (12.29)  $h = 0$ , получим  $z_1(0) = 1$ . Вычислим производную по  $h$  от левой части (12.29):

$$\begin{aligned} -\beta_{-1}Kz^{k+1} + (1-h\beta_{-1}K)(k+1)z^k z' - \beta_0Kz^k - (1+h\beta_0K)kz^{k-1}z' - \\ - K \sum_{j=1}^k |\beta_j| z^{k-j} - hK \sum_{j=1}^k |\beta_j| (k-j)z^{k-j-1}z' = 0. \end{aligned}$$

Положим здесь  $h = 0$  и примем во внимание, что  $z_1(0) = 1$ . Получим

$$-\beta_{-1}K + (k+1)z_1'(0) - \beta_0K - kz_1'(0) - K \sum_{j=1}^k |\beta_j| = 0$$

или

$$z_1'(0) = K\sigma.$$

Таким образом, разложение  $z_1$  по степеням  $h$  имеет вид

$$z_1 = 1 + K\sigma h + \dots \quad (12.34)$$

Из (12.34) следует, что правая часть неравенства (12.33) возрастает с ростом  $n$  по показательному закону. В самом деле,

$$z_1^n = (1 + K\sigma h + \dots)^{\frac{x_n - x_0}{h}} \approx e^{K\sigma(x_n - x_0)}.$$

Оценка (12.33) оказывается, как правило, сильно завышенной. Это объясняется тем, что она пригодна для широкого класса задач (12.1). Отметим, что оценка (12.33) является апостериорной, так как мы предполагали, что  $(x_i, \tilde{y}_i) \in D$ .

Покажем, что при достаточном малых  $h$ ,  $0 < h \leq h_0$ , и при всех  $n = 0, 1, 2, \dots, N$  выполнено неравенство

$$z_1^n \leq C, \quad (12.35)$$

где постоянная  $C$  зависит от задачи (12.1) и метода (12.4) и не зависит от  $h$ . На основании (12.3) и (12.34) имеем

$$z_1^n \leq z_1^N \leq z_1^N \leq z_1^N \frac{X-x_0}{h} = (1 + K\sigma h + \dots) \frac{X-x_0}{h}.$$

Так как последний член этой цепочки неравенств при  $h \rightarrow 0$  стремится к

$$e^{K\sigma(X-x_0)},$$

то неравенство (12.35) установлено. Из неравенства (12.33) с помощью (12.35) получаем

$$\max_{0 < n < N} |\varepsilon_n| \leq \varepsilon C + \frac{R + \Gamma}{hK\sigma} (C - 1) \quad (12.36)$$

при всех  $0 < h \leq h_0$ .

Будем считать, что

$$\varepsilon = ah^p, \quad \Gamma = ah^{p+1},$$

где  $a$  и  $p$  — некоторые положительные постоянные. Из неравенства (12.18) следует, что в качестве  $R$  можно взять

$$R = \gamma h^{r+2}, \quad \gamma > 0.$$

Подставляя эти значения  $\varepsilon$ ,  $\Gamma$  и  $R$  в (12.36), получим

$$\max_{0 < n < N} |\varepsilon_n| \leq Cah^p + \frac{C-1}{K\sigma} (\gamma h^{r+1} + ah^p).$$

Так как  $p > 0$  и  $r \geq 0$ , то правая часть этого неравенства стремится к нулю, когда  $h \rightarrow 0$ . Отсюда следует равномерная сходимость при  $h \rightarrow 0$  численного решения  $\tilde{y}_n$  к  $y(x)$  на промежутке  $[x_0, X]$ :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{0 < n < N} |\varepsilon_n| = 0 \quad (12.37)$$

при любых ошибках  $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$  начальных значений и при любых ошибках округления  $\Gamma_n$ , удовлетворяющих неравенствам

$$|\varepsilon_j| \leq ah^p, \quad j = 0, 1, 2, \dots, k, \\ |\Gamma_n| \leq ah^{p+1}, \quad n = k, k+1, \dots, N-1.$$

Область  $D$  содержит полосу  $D_p$ , определяемую неравенствами (12.2), поэтому при всех достаточно малых  $h$  точки  $(x_n, \tilde{y}_n)$  принадлежат области  $D$ .

Предположим теперь, что правая часть дифференциального уравнения (12.1) в области  $D$  имеет отрицательную производную по  $y$  и выполнены неравенства

$$q \leq -\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \leq K, \quad (12.38)$$

где  $q$  и  $K$  — положительные постоянные. В этом случае для  $|\varepsilon_n|$  можно указать более точную оценку, чем оценка (12.33).

Запишем равенство (12.19) в виде

$$\begin{aligned} \left[1 - h\beta_{-1} \frac{\partial f(x_{n+1}, \xi_{n+1})}{\partial y}\right] \varepsilon_{n+1} = & \left[1 + h\beta_0 \frac{\partial f(x_n, \xi_n)}{\partial y}\right] \varepsilon_n + \\ & + h \sum_{j=1}^k \beta_j \frac{\partial f(x_{n-j}, \xi_{n-j})}{\partial y} \varepsilon_{n-j} + R_n - \Gamma_n. \end{aligned} \quad (12.39)$$

Предположим, что

$$h\beta_0 q < 1. \quad (12.40)$$

В силу (12.38) и (12.40) из (12.39) получаем неравенство

$$\begin{aligned} (1 + h\beta_{-1}q) |\varepsilon_{n+1}| \leq & (1 - h\beta_0q) |\varepsilon_n| + \\ & + hK \sum_{j=1}^k |\beta_j| |\varepsilon_{n-j}| + |R_n| + |\Gamma_n|. \end{aligned} \quad (12.41)$$

Считаем, как выше, что  $(x_n, \tilde{y}_n) \in D$  при  $n = 0, 1, 2, \dots, N$ .

Рассмотрим разностное уравнение

$$(1 + h\beta_{-1}q) E_{n+1} = (1 - h\beta_0q) E_n + hK \sum_{j=1}^k |\beta_j| E_{n-j} + R + \Gamma. \quad (12.42)$$

Нетрудно проверить, пользуясь неравенством (12.41), что если  $E_n$  — решение разностного уравнения (12.42), удовлетворяющее неравенствам (12.24)

$$|\varepsilon_n| \leq E_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, k,$$

то неравенство (12.24) будет выполняться и при  $n = k+1, k+2, \dots, N$ . В силу (12.15) достаточно построить решение  $E_n$  уравнения (12.42), удовлетворяющее неравенствам

$$\varepsilon \leq E_n \quad \text{при } n = 0, 1, 2, \dots, k. \quad (12.43)$$

Частное решение уравнения (12.42), равное постоянной  $A$ , есть

$$A = \frac{R + \Gamma}{h\delta}, \quad (12.44)$$

где

$$\delta = q(\beta_{-1} + \beta_0) - K \sum_{j=1}^k |\beta_j|. \quad (12.45)$$

Будем предполагать, что

$$\delta > 0. \quad (12.46)$$

Рассмотрим характеристическое уравнение для разностного уравнения (12.42)

$$\kappa(z) = (1 + h\beta_{-1}q)z^{k+1} - (1 - h\beta_0q)z^k - hK \sum_{j=1}^k |\beta_j| z^{k-j} = 0. \quad (12.47)$$

При условии (12.40) уравнение (12.47) имеет единственный положительный корень. Обозначим его  $z_1$ . Так как

$$\kappa(0) = -hK|\beta_k| < 0,$$

$$\kappa(1) = h\delta > 0,$$

то

$$0 < z_1 < 1. \quad (12.48)$$

Нетрудно указать первые два члена разложения  $z_1$  по степеням  $h$ :

$$z_1 = 1 - \delta h + \dots$$

Таким образом,

$$E_n = A + Bz_1^n, \quad (12.49)$$

где  $A$  определено формулой (12.44) и  $B$  — произвольная постоянная, является решением разностного уравнения (12.42). Постоянную  $B$  выберем так, чтобы было выполнено условие (12.43). Здесь следует различать два случая:  $\epsilon < A$  и  $\epsilon > A$ .

В случае  $\epsilon < A$  будет выполнено неравенство

$$|\epsilon_n| \leq A \quad (12.50)$$

при всех  $n = 0, 1, 2, \dots, N$ . Но оценку (12.50) можно уточнить, выбирая в качестве  $B$  отрицательное число такое, что

$$\epsilon \leq A + Bz_1^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, k. \quad (12.51)$$

Очевидно, что если взять  $B = \epsilon - A$ , то на основании (12.48) неравенства (12.51) будут выполнены и, следовательно,

$$|\epsilon_n| \leq A + (\epsilon - A)z_1^n$$

или, в силу (12.44),

$$|\epsilon_n| \leq \epsilon z_1^n + \frac{R + \Gamma}{h\delta} (1 - z_1^n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (12.52)$$

Это и есть требуемая оценка для случая  $\epsilon < A$ .

Пусть теперь  $\epsilon > A$ . Чтобы были выполнены неравенства (12.51), достаточно определить  $B$  из равенства

$$\epsilon = A + Bz_1^k.$$

Получим

$$B = (\epsilon - A)z_1^{-k}.$$

Таким образом,

$$|\epsilon_n| \leq A + (\epsilon - A)z_1^{n-k},$$

и оценка для случая  $\varepsilon > A$  имеет вид

$$|\varepsilon_n| \leq \varepsilon z_1^{n-k} + \frac{R+\Gamma}{h\delta} (1 - z_1^{n-k}), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (12.53)$$

При  $\varepsilon = A$  неравенства (12.52) и (12.53) переходят в неравенство (12.50).

Отметим частный случай:  $k = 0$ , когда формула (12.4) имеет вид

$$y_{n+1} = y_n + h\beta_{-1}f(x_{n+1}, y_{n+1}) + h\beta_0f(x_n, y_n).$$

В этом случае величина  $\delta$ , определяемая равенством (12.45), упрощается:

$$\delta = q(\beta_{-1} + \beta_0),$$

и условие (12.46)  $\delta > 0$  в силу (12.5) выполнено. Легко видеть что при  $k = 0$

$$z_1 = \frac{1 - h\beta_0q}{1 + h\beta_{-1}q}.$$

Если учесть, что  $\varepsilon_0 = y(x_0) - y_0 = 0$  и, следовательно, можно положить  $\varepsilon = 0$ , то оценку (12.52) можно переписать так:

$$|\varepsilon_n| \leq \frac{R+\Gamma}{hq(\beta_{-1} + \beta_0)} \left[ 1 - \left( \frac{1 - h\beta_0q}{1 + h\beta_{-1}q} \right)^n \right]. \quad (12.54)$$

В частности, при  $\beta_{-1} = 0, \beta_0 = 1$  (12.54) представляет собой оценку ошибки метода Эйлера.

Правые части неравенств (12.52) и (12.53) не превосходят

$$\varepsilon + \frac{R+\Gamma}{h\delta}.$$

Если шаг  $h$  выбрать так, что

$$\varepsilon + \frac{R+\Gamma}{h\delta} \leq \rho,$$

то  $(x_n, \tilde{y}_n) \in D_\rho \subset D$  и оценками (12.52) и (12.53) можно пользоваться как априорными.

Рассмотрим метод численного решения задачи Коши (12.1), определяемый формулой

$$y_{n+1} = \sum_{j=0}^k \alpha_{j+1} y_{n-j} + h \sum_{j=-1}^k \beta_j f(x_{n-j}, y_{n-j}). \quad (12.55)$$

Коэффициенты  $\alpha_j$  и  $\beta_j$  предполагаются вещественными. Формула (12.55) содержит в себе как частный случай формулу (12.4) метода Адамса ( $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_{k+1} = 0$ ).

Имеются и другие методы численного интегрирования задачи (12.1), определяемые формулами вида (12.55). Например,

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3} [f(x_{n+1}, y_{n+1}) + 4f(x_n, y_n) + f(x_{n-1}, y_{n-1})]. \quad (12.56)$$

Эту формулу можно получить, если в равенстве

$$y(x_{n+1}) = y(x_{n-1}) + \int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} y'(x) dx$$

интеграл заменить квадратурной суммой формулы Симпсона.

Отметим еще метод, определяемый формулой

$$y_{n+1} = -4y_n + 5y_{n-1} + h [4f(x_n, y_n) + 2f(x_{n-1}, y_{n-1})]. \quad (12.57)$$

Эту формулу можно получить следующим образом. Представим функцию  $y(x)$  ее интерполяционным многочленом Эрмита  $P_3(x)$ , построенным по значениям  $y(x)$  и  $y'(x)$  в узлах  $x_{n-1}$  и  $x_n$ :

$$y(x) = P_3(x) + \frac{1}{4!} (x - x_{n-1})^2 (x - x_n)^2 y^{(IV)}(\xi). \quad (12.58)$$

$P_3(x)$  записывается по формуле (10.23) и остаточный член интерполирования — по (10.24) из гл. II. Если положить в (12.58)  $x = x_{n+1}$ , получим

$$y(x_{n+1}) = -4y(x_n) + 5y(x_{n-1}) + h [4y'(x_n) + 2y'(x_{n-1})] + \frac{h^4}{6} y^{(IV)}(\xi), \quad x_{n-1} \leq \xi \leq x_{n+1}. \quad (12.59)$$

Заменяя здесь  $y(x_j)$  на  $y_j$ ,  $y'(x_j)$  — на  $f(x_j, y_j)$  и отбрасывая остаточный член, получим формулу (12.57).

Пусть  $y(x)$  — решение задачи (12.1). Величину  $R_n$ , определяемую равенством

$$y(x_{n+1}) = \sum_{j=0}^k \alpha_{j+1} y(x_{n-j}) + h \sum_{j=-1}^k \beta_j f(x_{n-j}, y(x_{n-j})) + R_n, \quad (12.60)$$

будем называть ошибкой метода (12.55). Предполагаем, что для  $R_n$  имеет место представление

$$R_n = ah^{r+2} y^{(r+2)}(\xi), \quad x_{n-k} \leq \xi \leq x_{n+1}, \quad (12.61)$$

где  $r$  — неотрицательное целое число и  $a$  — постоянная. Считаем, что  $f(x, y)$  имеет непрерывные частные производные до порядка  $r+1$ .

Нетрудно проверить, пользуясь представлением остаточного члена формулы Симпсона (2.25) из гл. III, что в случае метода (12.56)  $r=3$  и  $a = -\frac{1}{90}$ . Из формулы (12.59) видно, что для метода (12.57)

$$r=2 \text{ и } a = \frac{1}{6}.$$

Из формул (12.60) и (12.61) следует, что  $y(x_n)$  удовлетворяет разностному уравнению (12.55), если  $y(x)$  — любой многочлен сте-

пени  $r + 1$ . Так как  $r \geq 0$ , то разностному уравнению (12.55) удовлетворяют  $y(x_n) = 1$  и  $y(x_n) = nh$ . Это приводит к следующим ограничениям на коэффициенты  $\alpha_j$  и  $\beta_j$ :

$$\sum_{j=0}^k \alpha_{j+1} = 1, \quad n+1 = \sum_{j=0}^k \alpha_{j+1} (n-j) + \sum_{j=-1}^k \beta_j.$$

Введем многочлен

$$\Lambda(z) = z^{k+1} - \alpha_1 z^k - \alpha_2 z^{k-1} - \dots - \alpha_k z - \alpha_{k+1}. \quad (12.62)$$

Первое равенство означает, что единица является корнем многочлена  $\Lambda(z)$ , второе равенство можно записать в виде

$$\Lambda'(1) = \sum_{j=-1}^k \beta_j.$$

Будем обозначать через  $\tilde{y}_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots, N$ , приближенное решение разностного уравнения (12.55). Начальные значения  $\tilde{y}_n = y_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots, k$ , предполагаются заданными. Дальнейшие значения  $\tilde{y}_{k+1}$ ,  $\tilde{y}_{k+2}$ ,  $\dots$ ,  $\tilde{y}_N$  вычисляются последовательно с помощью (12.55). Ввиду того, что вычисления ведутся с округлениями,  $\tilde{y}_n$  не удовлетворяет точно разностному уравнению (12.55), и мы имеем

$$\tilde{y}_{n+1} = \sum_{j=0}^k \alpha_{j+1} \tilde{y}_{n-j} + h \sum_{j=-1}^k \beta_j f(x_{n-j}, \tilde{y}_{n-j}) + \Gamma_n, \quad (12.63)$$

где  $\Gamma_n$  — ошибка округления.

Ошибка  $\epsilon_n = y(x_n) - \tilde{y}_n$  удовлетворяет разностному уравнению

$$\begin{aligned} \epsilon_{n+1} &= \sum_{j=0}^k \alpha_{j+1} \epsilon_{n-j} + \\ &+ h \sum_{j=-1}^k \beta_j [f(x_{n-j}, y(x_{n-j})) - f(x_{n-j}, \tilde{y}_{n-j})] + R_n - \Gamma_n = 0. \end{aligned} \quad (12.64)$$

Пусть выполнены неравенства

$$\begin{aligned} |\epsilon_n| &\leq ah^p, & n = 0, 1, 2, \dots, k, \\ |\Gamma_n| &\leq ah^{p+1}, & n = k, k+1, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (12.65)$$

где  $a > 0$  и  $p > 0$ . Из (12.61) получаем

$$|R_n| \leq \gamma h^{r+2}, \quad \gamma > 0. \quad (12.66)$$

В случае метода Адамса (12.4) неравенства (12.65) и (12.66) обеспечивают равномерную сходимость при  $h \rightarrow 0$  численного решения  $\tilde{y}_n$  к  $y(x)$  на  $[x_0, X]$ . Для общего метода (12.55) это утверждение без дополнительных предположений не имеет места.

Нетрудно указать условия, необходимые для того, чтобы имело место предельное соотношение

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{0 \leq n \leq N} |\varepsilon_n| = 0 \quad (12.67)$$

при соблюдении неравенств (12.65) и (12.66). Предельное соотношение (12.67) должно иметь место, в частности, для задачи Коши

$$y' = 0, \quad y(x_0) = y_0.$$

В силу (12.61)  $R_n = 0$ . Вычисление  $f(x, y) = 0$  производится без округлений, так что  $\Gamma_n = 0$ . Уравнение (12.64) запишется так:

$$\varepsilon_{n+1} = \sum_{j=0}^k \alpha_{j+1} \varepsilon_{n-j}$$

Решения этого разностного уравнения должны быть ограниченными при любых начальных значениях  $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ , когда  $n \rightarrow \infty$ . Как известно из теории уравнений в конечных разностях, для этого необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения  $\Lambda(z) = 0$ , где  $\Lambda(z)$  определяется формулой (12.62), были расположены в единичном круге  $|z| \leq 1$  плоскости комплексной переменной  $z$ , при этом корни на единичной окружности  $|z| = 1$  должны быть простыми. Если корни уравнения  $\Lambda(z) = 0$  обладают указанными свойствами, то метод численного интегрирования (12.55) называется *устойчивым*.

Метод Адамса (12.4) устойчив, так как многочлен (12.62)  $\Lambda(z) = z^{k+1} - z^k$  имеет простой корень 1 и  $k$ -кратный корень 0. Метод (12.56) также устойчив, так как в этом случае  $\Lambda(z) = z^2 - 1$  имеет два простых корня: 1 и  $-1$ . Метод (12.57) неустойчив, так как квадратный трехчлен  $\Lambda(z) = z^2 + 4z - 5$  имеет корни 1 и 5.

Оказывается, что устойчивость метода (12.55) является и достаточным условием для того, чтобы при выполнении неравенств (12.65) и (12.66) имело место соотношение (12.67). Доказательство этого утверждения приводить не будем. Его можно найти в [3] (см. также [1], т. II).

Вопрос об оценке ошибки методов типа Адамса численного решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений рассмотрен в работе [19]. Сходимость и устойчивость численных методов решения задачи Коши для дифференциальных уравнений второго порядка специального вида

$$y'' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0.$$

рассматривается в работе [15].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Березин И. С. и Жидков Н. П., Методы вычислений, т. I и II, Физматгиз, 1959.
2. Гельфонд А. О., Исчисление конечных разностей, Гостехиздат, 1952.
3. Дальквист (Dahlquist G.), Convergence and stability in the numerical integration of ordinary differential equations, *Mathematica Scandinavica*, 4, № 1, 33—53, 1956.
4. Еругин Н. П. и Соболев С. Л., Приближенное интегрирование некоторых колеблющихся функций, *Прикладная математика и механика*, 14, в. 2, 193—196, 1950.
5. Загускин В. Л., Справочник по численным методам решения уравнений, Физматгиз, 1960.
6. Канторович Л. В., О методе Ньютона, *Труды математического института им. В. А. Стеклова*, 28, 104—144, 1949.
7. Канторович Л. В., Принцип мажорант и метод Ньютона, *ДАН СССР*, 76, № 1, 17—20, 1951.
8. Канторович Л. В., Некоторые дальнейшие применения метода Ньютона для функциональных уравнений, *Вестник ЛГУ*, № 7, сер. матем., мех. и астр., в. 2, 68—103, 1957.
9. Канторович Л. В. и Акилов Г. П., Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, 1959.
10. Канторович Л. В. и Крылов В. И., Приближенные методы высшего анализа, Гостехиздат, 1949.
11. Кармазина Л. Н. и Курочкина Л. В., Таблицы интерполяционных коэффициентов, Изд. АН СССР, 1956.
12. Коллатц Л., Численные методы решения дифференциальных уравнений, ИЛ, 1953.
13. Крылов А. Н., Лекции о приближенных вычислениях, Гостехиздат, 1950.
14. Крылов В. И., Приближенное вычисление интегралов, Физматгиз, 1959.
15. Крылов В. И., Сходимость и устойчивость численного решения дифференциального уравнения второго порядка, *ДАН БССР*, 4, № 5, 187—189, 1960.
16. Крылов В. И., Приближенное вычисление интегралов от функций, содержащих быстро колеблющиеся множители, *ДАН СССР*, 108, № 6, 1014—1017, 1956.
17. Лин Ши-нге (Lin Shih-nge), A method of successive approximations of evaluating the real and complex roots of cubic and higher — order equations, *Journal of Mathematics and Physics*, 20, 231—242, 1941.

18. Лин Ши-нге (Lin Shih-nge), A method for finding roots of algebraic equations, *Journal of Mathematics and Physics*, 22, 60—77, 1943.
  19. Лозинский С. М., Оценка погрешности численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений I, *Изв. вузов, математика*, 5 (6), 52—90, 1958.
  20. Марков А. А., *Исчисление конечных разностей*, Одесса, 1910.
  21. Милн В. Э., *Численный анализ*, ИЛ, 1951.
  22. Милн В. Э., *Численное решение дифференциальных уравнений*, ИЛ, 1955.
  23. Натансон И. П., *Конструктивная теория функций*, Гостехиздат, 1949.
  24. Николаева М. В., О приближенном вычислении осциллирующих интегралов, *Труды математического института им. В. А. Стеклова*, 28, 26—32, 1949.
  25. Островский (Ostrowski A. M.), Über die Konvergenz und die Abrundungsfestigkeit des Newtonschen Verfahrens, *Матем. сборник*, 2, в. 6, 1073—1095, 1937.
  26. Сегал Б. И. и Семендяев К. А., *Пятизначные математические таблицы*, Изд. АН СССР, 1950.
  27. Солзер (Salzer H. E.), Tables for facilitating the use of Chebyshev's quadrature formula, *Journal of Mathematics and Physics*, 26, № 3, 191—194, 1947.
  28. Солзер, Цукер и Капуано (Salzer H. E., Zucker R. and Capuano R.), Table of the zeros and weight factors of the first twenty Hermite polynomials, *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 48, № 2, 111—116, 1952.
  29. Субботин М. Ф., *Курс небесной механики*, т. 2, ОНТИ, 1937.
  30. Фаддеева В. Н., *Вычислительные методы линейной алгебры*, Гостехиздат, 1950.
  31. Хаусхолдер А. С., *Основы численного анализа*, ИЛ, 1956.
  32. Хилдебранд (Hildebrand F. B.), *Introduction to numerical analysis*, New-York — Toronto — London, 1956.
  33. Эйткин А., О разложении многочленов на множители итерационными методами, *УМН*, 8, в. 6 (58), 71—86, 1953.
-

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
„ФИЗМАТГИЗ“

Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

---

ВЫШЛИ ИЗ ПЕЧАТИ:

Демидович Б. П. и др., Численные методы анализа  
(приближение функций, дифференциальные уравнения),  
368 стр., 71 коп.

Кошляков Н. С. и др., Основные дифференциальные  
уравнения математической физики, 768 стр., 1 р. 38 к.

Мелентьев П. В., Приближенные вычисления, 392 стр.,  
1 р. 68 к.

Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные урав-  
нения (граничные задачи теории функций и некоторые  
приложения к математической физике), 600 стр., 2 р. 06 к.

ЩигOLEв Б. М., Математическая обработка наблюдений,  
344 стр., 82 коп.

---

Книги продаются в книжных магазинах и высылаются  
почтой наложенным платежом без задатка всеми республи-  
канскими, краевыми и областными отделениями „Книга —  
почтой“.

*Мысовских Иван, Петрович.*

Лекции по методам вычислений

М., Физматгиз, 1962 г., 344 стр. с илл.

Редактор *Г. П. Акилов.*

Техн. редактор *А. А. Лукьянов.*

Корректор *Л. А. Любович.*

---

Сдано в набор 3/1 1962 г. Подписано к печати 1/II 1962 г. Бумага 84×108/32. Физ. печ. л. 10,75. Усл. печ. л. 17,63. Уч.-изд. л. 16,65. Тираж 25 000 экз. Т-00964. Цена книги 60 к. Заказ № 78.

---

Государственное издательство  
физико-математической литературы.  
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

---

Типография № 2 им. Евг. Соколовой  
УПП Ленсовнархоза  
Ленинград, Измайловский пр., 29.

Цена 60 к.