П. ДЕРУССО, Р. РОЙ, Ч. КЛОУЗ

ПРОСТРАНСТВО СОСТОЯНИЙ В ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

П. ДЕРУССО
Р. РОЙ
Ч. КЛОУЗ

ПРОСТРАНСТВО СОСТОЯНИЙ В ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

П. ДЕРУССО
Р. РОЙ
Ч. КЛОУЗ

ПРОСТРАНСТВО СОСТОЯНИЙ В ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ

Перевод с английского
Р. Т. ЯНУШЕВСКОГО

под редакцией
М. В. МЕЕРОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1970

Scan AAW

6 ф 0.1
Д 36
УДК 62-50

STATE VARIABLES FOR ENGINEERS

PAUL M. DERUSSO
ROB J. ROY
CHARLES M. CLOSE

Department of Electrical Engineering
Rensselaer Polytechnic Institute

JOHN WILEY & SONS, INC.
NEW YORK – LONDON – SYDNEY

Пространство состояний в теории управления (для инженеров), Деруссо П., Рой Р., Клоуз Ч. перев. с англ., Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», М., 1970, 620 стр.

Монография затрагивает широкий круг вопросов теории управления динамическими системами (в основном детерминированными). Гл. 1, 2 посвящены изложению временных методов изучения линейных систем. В гл. 3 используется комплексное переменное; рассматриваются преобразования Фурье, Лапласа, z-преобразование. Гл. 4 посвящена матричному исчислению. В гл. 5, 6 рассматриваются линейные модели системы управления — стационарные и нестационарные, непрерывные и дискретные. В гл. 7 описываются основные задачи теории устойчивости нелинейных систем В гл. 8 затрагиваются задачи оптимизации. Книга содержит «тестовые» примеры для проверки различных методов и много задач для самостоятельной проработки.

П. Деруссо, Р. Рой, Ч. Клоуз

Пространство состояний в теории управления (для инженеров)

М., 1970 г., 620 стр. с илл.

Редактор *А. А. Могилевский*

Техн. редактор *К. Ф. Брудно* Корректоры *Е. А. Белицкая, Г. С. Смоликова*

Сдано в набор 5/XI 1969 г. Подписано к печати 13/IV 1970 г.
Бумага 60×90/16. Физ. печ. л. 38,75. Условн. печ. л. 38,75. Уч.-изд. л. 36,26. Тираж 8400 экз.
Цена книги 2 р. 81 к. Заказ № 372.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР. Измайловский проспект, 29.

3-3-14
160-70

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к переводу 7
Предисловие 10

Глава 1

Временные методы 11

§ 1.1. Введение 11
§ 1.2. Классификация систем 13
§ 1.3. Разложение сигналов в ряды по элементарным функциям 19
§ 1.4. Специальные функции 22
§ 1.5. Разложение непрерывного сигнала по специальным функциям . . 31
§ 1.6. Интеграл свертывания для стационарных систем 36
§ 1.7. Интегралы совмещения для нестационарных систем 44
§ 1.8. Разложение дискретных сигналов в ряды по элементарным функциям 47
§ 1.9. Суммы совмещения для дискретных систем 50
Задачи 57
Цитированная литература 59

Глава 2

Классические методы 60

§ 2.1. Введение 60
§ 2.2. Представление непрерывных систем в виде дифференциальных уравнений 60
§ 2.3. Преобразование системы дифференциальных уравнений 62
§ 2.4. Основные свойства линейных дифференциальных уравнений . . . 65
§ 2.5. Решение дифференциальных уравнений первого порядка 66
§ 2.6. Решение дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами 67
§ 2.7. Решение дифференциальных уравнений с изменяющимися во времени коэффициентами 81
§ 2.8. Получение импульсной характеристики на основе дифференциального уравнения 84
§ 2.9. Прямой и обратный разностные операторы 89
§ 2.10. Представление дискретных систем в виде разностных уравнений . 94
§ 2.11. Основные свойства линейных разностных уравнений 96
§ 2.12. Решение разностных уравнений с постоянными коэффициентами . 98
§ 2.13. Решение линейных разностных уравнений с изменяющимися во времени коэффициентами 109
Задачи 111
Цитированная литература 113

Глава 3

Методы преобразования 114

§ 3.1. Введение 114
§ 3.2. Ряд и интеграл Фурье 114
§ 3.3. Преобразование Лапласа 122
§ 3.4. Свойства преобразования Лапласа 125
§ 3.5. Применение преобразования Лапласа для стационарных систем 133
§ 3.6. Обзор теории комплексного переменного 139
§ 3.7. Интеграл обратного преобразования 148
§ 3.8. Значение нулей и полюсов 156
§ 3.9. Применение преобразования Лапласа для нестационарных систем 159
§ 3.10. Разложение сигналов в ряды по элементарным функциям . . . 167
§ 3.11. z-преобразование 172
§ 3.12. Свойства z-преобразования 176
§ 3.13. Применение z-преобразования для дискретных систем 190
§ 3.14. Модифицированное z-преобразование 196
Задачи 200
Цитированная литература 204

Глава 4

Матрицы и линейные пространства 206

§ 4.1. Введение 206
§ 4.2. Основные понятия 207
§ 4.3. Определители 216
§ 4.4. Присоединенная и обратная матрицы 225
§ 4.5. Векторы и линейные векторные пространства 228
§ 4.6. Решение линейных уравнений 237
§ 4.7. Характеристические числа и характеристические векторы 246
§ 4.8. Матричные преобразования 259
§ 4.9. Билинейная и квадратичная формы 278
§ 4.10. Матричные многочлены. Бесконечные ряды и функции от матриц 286
§ 4.11. Дополнительные сведения о матрицах 302
§ 4.12. Функциональное пространство 306
Задачи 312
Цитированная литература 326

Глава 5

Переменные состояния и линейные непрерывные системы 328

§ 5.1. Введение 328
§ 5.2. Схемы моделирования 329
§ 5.3. Передаточные матричные функции 337
§ 5.4. Понятие состояния 340
§ 5.5. Представление линейных уравнений состояния при помощи матриц 343
§ 5.6. Частотная интерпретация. Геометрический смысл 357
§ 5.7. Управляемость и наблюдаемость 363

§ 5.8. Линейные стационарные системы. Переходная матрица состояния . . . 370
§ 5.9. Линейные нестационарные системы. Переходная матрица состояния . . . 377
§ 5.10. Линейные нестационарные системы. Общее решение . . . 390
§ 5.11. Импульсные матричные характеристики . . . 396
§ 5.12. Модифицированные сопряженные системы . . . 403
Задачи . . . 409
Цитированная литература . . . 420

Глава 6

Переменные состояния и линейные дискретные системы . . . 421

§ 6.1. Введение . . . 421
§ 6.2. Схемы моделирования . . . 421
§ 6.3. Передаточные матричные функции . . . 424
§ 6.4. Понятие состояния . . . 427
§ 6.5. Представление линейных уравнений состояния при помощи матриц . . . 429
§ 6.6. Частотная интерпретация . . . 442
§ 6.7. Управляемость и наблюдаемость . . . 446
§ 6.8. Переходная матрица состояния . . . 447
§ 6.9. Общее решение . . . 456
§ 6.10. Импульсная матричная характеристика . . . 464
§ 6.11. Метод наименьших квадратов . . . 472
Задачи . . . 477
Цитированная литература . . . 483

Глава 7

Введение в теорию устойчивости и второй метод Ляпунова . . . 484

§ 7.1. Введение . . . 484
§ 7.2. Понятия фазовой плоскости . . . 484
§ 7.3. Особые точки линейных систем второго порядка . . . 487
§ 7.4. Вариационные уравнения . . . 496
§ 7.5. Предельные циклы . . . 502
§ 7.6. Понятие скорости изменения энергии. Введение ко второму методу Ляпунова . . . 511
§ 7.7. Устойчивость и асимптотическая устойчивость . . . 514
§ 7.8. Второй метод Ляпунова для автономных непрерывных систем. Локальное рассмотрение . . . 517
§ 7.9. Асимптотическая устойчивость в большом . . . 524
§ 7.10. Первая каноническая форма Лурье. Абсолютная устойчивость . 526
§ 7.11. Устойчивость при возмущениях. Практическая устойчивость . . 531
§ 7.12. Оценка переходного процесса . . . 533
§ 7.13. Релейные регуляторы для линейных динамических объектов . . 534
§ 7.14. Определение функций Ляпунова. Метод неопределенного градиента . . . 537
§ 7.15. Неавтономные системы . . . 541
§ 7.16. Условная устойчивость . . . 543
§ 7.17. Дискретные системы . . . 545
§ 7.18. Применение к системам с широтно-импульсной модуляцией . . . 546
Задачи . . . 549
Цитированная литература . . . 556

Глава 8

Введение в теорию оптимизации 559

§ 8.1. Введение 559
§ 8.2. Требования к системам и показатели качества 561
§ 8.3. Необходимые условия экстремума. Вариационное исчисление . . 565
§ 8.4. Оптимальные линейные задачи 570
§ 8.5. Выбор постоянных весовых коэффициентов 585
§ 8.6. Штрафные функции 589
§ 8.7. Итерация граничных условий 590
§ 8.8. Динамическое программирование 592
§ 8.9. Итерация управляющих воздействий 595
§ 8.10. Итерация закона управления 598
§ 8.11. Пример проектирования 600
§ 8.12. Особые системы управления 606
Задачи 614
Цитированная литература 615

Дополнительная литература 617

Предметный указатель 618

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРЕВОДУ

Монография П. М. Деруссо, Р. Дж. Роя, Ч. М. Клоуза «Пространство состояний в теории управления» затрагивает широкий круг вопросов теории управления динамическими системами. Потребность в подобной книге, по мнению авторов, вызвана необходимостью ознакомить инженеров — специалистов по теории автоматического управления, владеющих ставшим уже классическим математическим аппаратом теории обратной связи, с аппаратом, характерным для современной теории управления, основанном на понятиях пространства состояний (фазового пространства). Изучение работ по современной теории управления, в частности, по теории оптимизации, требует знания специальных математических курсов, не входящих, как правило, в учебные программы студентов нематематических специальностей. Поэтому очевидна актуальность книги, в которой доступным языком (имеется в виду возможность чтения книги инженерами, студентами нематематических специальностей) излагаются довольно тонкие математические задачи. Не стремясь «охватить необъятное», авторы ограничиваются рассмотрением разделов математики, составляющих основу детерминированных задач современной теории управления, устанавливают связь с классическим методом исследования линейных систем управления.

Книга состоит из восьми глав. Первые две главы посвящены изложению временных методов изучения динамических систем (стационарных и нестационарных). Описываются методы решения дифференциальных уравнений, нахождение импульсной характеристики системы. При этом рассматриваются как непрерывные, так и дискретные системы. В третьей главе изучение динамических систем проводится в плоскости комплексного переменного, рассматриваются преобразования Фурье, Лапласа, z-преобразование. Несколько обособленно выглядит материал четвертой главы, посвященной рассмотрению матриц и линейных пространств; для целостности изложения ее, по-видимому, целесообразно было объединить со второй главой. По характеру изложения, широте охвата материала — это одна из лучших глав книги. Занимая сравнительно небольшое место, она содержит обширный материал по матрицам и матричным преобразованиям.

В первых четырех главах собраны материалы из теории дифференциальных уравнений, теории матриц, линейных пространств, теории функций комплексного переменного и т. д., необходимые для изучения динамических систем. Их рассмотрению непосредственно посвящены остальные главы книги. Пятая и шестая главы связаны с рассмотрением линейных систем управления — стационарных и нестационарных, непрерывных и дискретных. Исследуются различные математические модели линейных систем, их управляемость и наблюдаемость, методы моделирования с целью нахождения импульсных характеристик и т. д. Теории нелинейных систем посвящена седьмая глава. В сжатой форме авторы превосходно описывают основные задачи теории устойчивости нелинейных систем, методы их решения. К сожалению, в материал данной главы не вошли результаты румынского ученого В. М. Попова, а также ряда советских ученых по частотным методам исследования устойчивости нелинейных систем; последнее отвечало бы направленности книги — изложению временны́х методов исследования систем и методов преобразований. Наиболее неудачной, на наш взгляд, является последняя глава, посвященная теории оптимальных систем. Авторы используют в основном материалы Мэрриама по линейным оптимальным задачам. Изложение же задач оптимизации при различных ограничениях, по сути дела, не дается на том уровне, который характерен для остального материала книги.

С рядом утверждений авторов нельзя согласиться. В связи с этим в соответствующих (правда, далеко не во всех) местах изложения приведены пояснения, в конце главы дан список дополнительной литературы. Заранее оговоримся, что список литературы по оптимальным системам столь обширен, что вряд ли целесообразно было его включать в данную монографию, учитывая, что изложение теории оптимальных систем не служит предметом данной книги. Поэтому приводимая дополнительная литература дана лишь для аргументации ряда пояснений к тексту.

Отмечая недостатки книги, нельзя не указать на обилие вводимых без необходимости терминов, что создало определенные трудности при работе над переводом монографии. Особо следует остановиться на материале книги, посвященном многосвязным системам. Вряд ли можно согласиться с трактовкой авторами многосвязных систем, основанной на формальной замене скаляров векторами. Специфические свойства многосвязных систем в данной монографии не рассматриваются.

Характеризуя книгу в целом, нельзя не отметить высокий уровень и хорошее изложение, глубокое знание и понимание

сути излагаемых проблем, широкий охват материала, обилие приводимых примеров. Последнее в значительной степени повышает ценность книги, способствует лучшему пониманию излагаемого материала. Особенно полезны приводимые «тестовые» примеры, фигурирующие в ряде разделов, на которых проверяются различные методы. Наконец, существенно, что каждая глава снабжена большим количеством задач для самостоятельной проработки. Несомненно, книга приобретет широкий круг читателей, интересующихся современной теорией управления.

М. В. Мееров
Р. Т. Янушевский

ПРЕДИСЛОВИЕ

Бурное развитие теории управления с обратной связью обязано работам по теории устойчивости Ляпунова, современной теории оптимизации, развитой Беллманом и Понтрягиным, работам Калмана, Ла-Салля, Мэрриама и других. В основе работ лежит подход с позиций «переменных состояний». Очевидно, что подобный подход и должен составлять современное изложение теории управления. Его следует изучать инженерам — специалистам в области автоматического управления, так как формулировки в терминах пространства состояний характерны для существующих технических журналов. Отказ от этого лишь увеличил бы существующий разрыв между теорией и практикой.

Освоение этой области знаний представляет значительные трудности, так как бóльшая часть материала данной монографии содержится в книгах, посвященных специальным курсам математики. Большинство студентов инженерных специальностей, а также инженеров не обладают необходимым математическим уровнем для освоения этих курсов. Цель настоящей книги — снабдить этот круг лиц необходимыми знаниями. Предполагается следовать традиционному курсу систем с обратной связью, предусматривая также необходимый материал для современного изложения нелинейной теории, теории адаптивных систем, теории импульсных систем и теории оптимизации. Более того, делается попытка объединить подход на основе переменных состояния с более знакомыми понятиями передаточных функций, чтобы читатель мог связать новый материал с уже известным. Исходя из этих соображений, громоздкие сложные доказательства опускаются, уступая место многочисленным примерам. Мы не стремились включить в книгу все возможные темы, — скорее стремились изложить основные идеи, с тем, чтобы читатель мог впоследствии изучить литературу самостоятельно. Поэтому подача материала зачастую дается не на столь высоком уровне, как можно найти в соответствующей литературе. После чтения данной книги читателям, желающим более глубоко разобраться в подходе, основанном на рассмотрении переменных состояния, в теории Ляпунова или теории оптимизации, следует изучить соответственно литературу [1] из пятой главы, [26] и [28] — из седьмой и [25] — из восьмой главы, а также последние технические журналы по данным разделам.

Нью-Йорк
Июль, 1965.

Поль М. Деруссо
Роб Дж. Рой
Чарльз М. Клоуз

ГЛАВА 1

ВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ

§ 1.1 Введение

Физические системы обычно представляют в виде моделей, состоящих из отдельных идеализированных звеньев, которые могут быть точно математически описаны. Выбор соответствующей модели, воплощающей все свойства физической системы, зачастую встречает значительные трудности.

Результаты, полученные при использовании очень упрощенной модели физической системы, не будут достаточно точно характеризовать ее поведение. В свою очередь, без необходимости усложненная модель может оказаться непомерно сложной или даже вообще не поддающейся исследованию. Выбор модели предполагает, что ее свойства строго математически описаны. В некоторых случаях систему можно непосредственно охарактеризовать, не прибегая к какой-либо особой модели. Множество различных способов использования математических характеристик или моделей и обсуждается в этой книге. Подобно большинству учебников данная книга содержит очень мало материала о выборе модели или о том, каким образом характеризовать каждую отдельную систему. Вместо этого ее цель — показать применение математических методов после того как математическая модель системы уже получена.

Основой анализа системы служит рассмотрение зависимости между определенными входами (или источниками) и выходами (или реакциями). Это могут быть электрические, гидравлические, механические, тепловые и других видов величины, обычно являющиеся действительными функциями времени. На рис. 1.1 выходные величины обозначены $v_1(t)$, $v_2(t)$, ..., $v_m(t)$, а выходные — $y_1(t)$, $y_2(t)$, ..., $y_n(t)$. Наиболее удобно знать причинно-следственную связь, позволяющую по известным входным величинам определить результирующие выходные величины. Однако систему часто характеризуют в неявном виде, не прибегая непосредственно к взаимосвязи причины и следствия.

Материал первых трех глав в основном ограничен системами с одной входной и выходной величинами.

Системы с несколькими входами и выходами удобно представлять в матричной форме, рассматриваемой в четвертой главе. Результаты первых трех глав легко могут быть распространены на многомерные системы, как это сделано в главах пятой и шестой.

В первых трех главах в основном рассматриваются линейные детерминированные системы при нулевых начальных условиях.

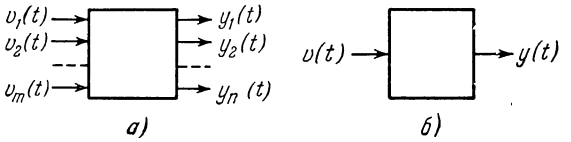


Рис. 1.1.1.

Как показано в § 1.4, произвольные начальные условия координат системы (запасенная в системе энергия до момента приложения входного сигнала) могут быть представлены в виде дополнительных входных сигналов.

Нелинейные системы рассматриваются в последних двух главах.

Каждая из первых трех глав связана с одним из общеизвестных методов описания линейных динамических систем: первая — на основе рассмотрения реакции системы на специальные функции; вторая, исходя из дифференциальных или разностных уравнений; и третья — на основе передаточных функций при использовании преобразований Фурье, Лапласа или z-преобразования. При этом рассматриваются стационарные и нестационарные системы, а также непрерывные и дискретные. Основное стремление направлено на установление связи между этими тремя методами описания систем.

Операции над матрицами излагаются в четвертой главе. Таким образом, в ней полностью завершается описание математического аппарата, составляющего основу подхода к системам с позиций пространства состояний и используемого в остальных главах. В пятой главе методы пространства состояний трактуются «с позиций инженера» применительно к линейным непрерывным системам. Подобным образом линейные дискретные системы рассматриваются в шестой главе. Теория устойчивости Ляпунова для нелинейных систем излагается в седьмой главе. В восьмой главе затрагиваются вопросы проектирования систем и их оптимизации.

В сущности, материал книги можно разделить на три части. Первая, занимающая четыре главы, содержит основной математический аппарат, используемый в дальнейшем. Главы пятая и

шестая составляют вторую часть книги и содержат основные понятия теории состояния, а также некоторые ее приложения. Дальнейшее их рассмотрение содержится в седьмой и восьмой главах, составляющих третью часть книги.

§ 1.2. Классификация систем

Системы можно классифицировать различным образом. Рассмотрим систему, представленную на рис. 1.1.1, *б*, с одной входной $v(t)$ и выходной $y(t)$ величинами. Предположим, что система не содержит каких-либо независимых источников энергии и предварительно (до подачи входного сигнала) не возбуждена, т. е. находится при нулевых начальных условиях. Соотношение между входом и выходом часто обозначают как

$$y(t)=Lv(t), \tag{1.2.1}$$

где L — оператор, характеризующий систему. Он может быть функцией v, y и t, может включать операции дифференцирования и интегрирования, может задаваться в вероятностной форме. Уравнение (1.2.1) — это не более чем лаконичное утверждение о существовании причинно-следственной связи между v и y.

Система называется *детерминированной*, если каждому входному сигналу $v(t)$ отвечает единственный выходной сигнал $y(t)$ *). В недетерминированных, или стохастических системах данному входному сигналу могут соответствовать несколько возможных выходных сигналов, каждый из которых имеет определенную вероятность появления. Входные воздействия могут также быть как известными, так и случайными функциями. Случайные функции, такие как шум, описываются только в статистическом или вероятностном смысле. Если такой сигнал поступает на вход детерминированной системы, то выходной сигнал также будет случайным.

Система называется *системой без упреждения*, если текущее значение ее выходного сигнала не зависит от будущих значений входного сигнала. В этом случае $y(t_0)$ полностью определяется свойствами системы и значениями $v(t)$ при $t \leqslant t_0$. В частности, если $v(t) \equiv 0$ при $t<t_0$, то $y(t) \equiv 0$ при $t<t_0$. Системы с упреждением, в отличие от указанных, нарушали бы причинно-следственную связь.

Система называется *реализуемой*, если она без упреждения и если $y(t)$ — действительная функция времени при всех действительных функциях $v(t)$. Данное определение не накладывает никаких ограничений на связи между отдельными элементами, образующими реализуемую систему.

---

*) См. § 5.4.

Предположим, что реакция на два различных входных воздействия $v_1(t)$ и $v_2(t)$ — соответственно $y_1(t)$ и $y_2(t)$. Система называется *линейной*, если входному сигналу $v(t)=c_1v_1(t)+c_2v_2(t)$ отвечает $y(t)=c_1y_1(t)+c_2y_2(t)$ для всех значений v_1, v_2, c_1 и c_2, где c_1, c_2 — постоянные величины. Символически данное определение записывается в виде

$$L[c_1v_1(t)+c_2v_2(t)]=c_1L[v_1(t)]+c_2L[v_2(t)]. \qquad (1.2.2)$$

Выражение (1.2.2) известно так же как *принцип суперпозиции*. Если оно справедливо для определенного класса входных сигналов, то только для этого класса система считается линейной. Если не утверждается обратное, то для линейной системы по определению выражение (1.2.2) должно быть справедливо для всех входных сигналов. Система называется *стационарной*, если взаимосвязь между входом и выходом не зависит от времени. Если $v(t)$ вызывает $y(t)$, то $v(t-\lambda)$ соответствует $y(t-\lambda)$. В стационарной системе величина и вид выходного сигнала не зависят от момента приложения входного воздействия.

Это обозначается

$$L[v(t-\lambda)]=y(t-\lambda). \qquad (1.2.3)$$

Приведенные определения поясняются ниже на нескольких примерах.

Пример 1.2.1. Дифференциатор характерезуется соотношением

$$y(t)=\frac{d}{dt}v(t).$$

Система линейная, так как

$$\frac{d}{dt}[c_1v_1(t)+c_2v_2(t)]=c_1\frac{d}{dt}v_1(t)+c_2\frac{d}{dt}v_2(t).$$

Система также реализуемая и стационарная.

Пример 1.2.2.

Квадратор характеризуется соотношением

$$y(t)=v^2(t).$$

Система нелинейная, так как

$$[c_1v_1(t)+c_2v_2(t)]^2\neq c_1v_1^2(t)+c_2v_2^2(t).$$

Она реализуемая и стационарная.

Пример 1.2.3. Система характеризуется соотношением

$$y(t)=t\frac{d}{dt}v(t).$$

Система линейная, так как

$$t\frac{d}{dt}[c_1v_1(t)+c_2v_2(t)]=c_1t\frac{d}{dt}v_1(t)+c_2t\frac{d}{dt}v_2(t).$$

Она реализуемая, но не стационарная, так как

$$t\frac{d}{dt}v(t-\lambda)\neq(t-\lambda)\frac{dv(t-\lambda)}{d(t-\lambda)}.$$

Пример 1.2.4. Система характеризуется соотношением

$$y(t)=v(t)\frac{d}{dt}v(t).$$

Она нелинейная, так как

$$[c_1v_1(t)+c_2v_2(t)]\frac{d}{dt}[c_1v_1(t)+c_2v_2(t)]\neq c_1v_1(t)\frac{d}{dt}v_1(t)+c_2v_2(t)\frac{d}{dt}v_2(t).$$

Система реализуемая и стационарная.

Пример 1.2.5 Докажем или опровергнем следующее утверждение. Если в линейной системе $v(t)$ вызывает $y(t)$, то $\mathrm{Re}[v(t)]$ вызывает $\mathrm{Re}[y(t)]$ Символ Re следует читать как «действительная часть».

$$\mathrm{Re}\,[v]=\frac{v_1+v_1^*}{2},$$

где символ (*) обозначает комплексно сопряженную величину. Если $y(t)=$ $=L[v(t)]$, то реакция на $\mathrm{Re}\,[v(t)]$ имеет вид

$$L\left[\frac{v_1+v_1^*}{2}\right]=\frac{1}{2}L[v_1]+\frac{1}{2}L\left[v_1^*\right].$$

Она равна $\mathrm{Re}\,[y(t)]$ лишь в том случае, если

$$L\left[v_1^*\right]=\{L[v_1]\}^*.$$

Несмотря на то, что последнее соотношение выполняется не всегда, оно справедливо, если L — действительный оператор, т. е. если действительным входным величинам соответствуют действительные выходные величины. Сформулированное утверждение справедливо, следовательно, для всех реализуемых линейных систем. Доказательство остается в силе, если выражение «действительная часть» заменить выражением «мнимая часть».

Пример 1.2.6. Докажем или опровергнем следующее утверждение. Если в линейной системе $v(t)$ вызывает $y(t)$, то $(d/dt)v(t)$ соответствует $(d/dt)y(t)$

Если $y(t)=L[v(t)]$, то реакция на dv/dt равна

$$L\left[\frac{dv}{dt}\right]=\frac{d}{dt}L[v],$$

L не является функцией t. Для стационарной системы L не является функцией времени (хотя может включать операции дифференцирования или интегрирования относительно времени), и утверждение доказано. Сформулированное утверждение, следовательно, справедливо для линейных стационарных систем Доказательство сохраняется при замене операции дифференцирования интегрированием.

Для нестационарных систем приведенное утверждение несправедливо. Характерным числовым примером служит система в примере 1.2.3. На вопрос, коммутативны ли два линейных оператора, следует отвечать: в общем случае— нет.

Пример 1.2.7. Докажем или опровергнем следующее утверждение. Система, образованная последовательным соединением двух линейных систем,

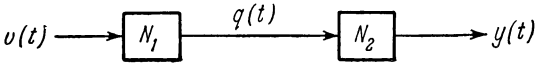


Рис. 1.2.1.

как показано на рис. 1.2.1, линейная. Пусть $q(t)$ — выход N_1 при входном сигнале $v(t)$, $y(t)$ — выход N_2 при входном сигнале $q(t)$.

$$q(t) = L_1[v(t)],$$
$$y(t) = L_2[q(t)] = L_2\{L_1[v(t)]\}.$$

Так как отдельные составляющие — линейные системы, то реакция на сигнал $v(t) = c_1v_1(t) + c_2v_2(t)$ запишется в виде

$$q(t) = L_1[c_1v_1(t) + c_2v_2(t)] = c_1L_1[v_1(t)] + c_2L_1[v_2(t)],$$
$$y(t) = L_2\{c_1L_1[v_1(t)] + c_2L_1[v_2(t)]\} =$$
$$= c_1L_2\{L_1[v_1(t)]\} + c_2L_2\{L_1[v_2(t)]\}.$$

Из последних соотношений следует, что последовательное соединение N_1 и N_2 образует линейную систему. Справедливо также, что любая система, состоящая только из линейных звеньев, является линейной.

Системы можно также классифицировать по виду протекающих сигналов. *Непрерывным* называется сигнал, являющийся функцией непрерывно изменяющейся независимой переменной t. Сигнал должен быть однозначно определен для всех значений t на заданном интервале за исключением, возможно, счетного множества точек *). Определение непрерывного сигнала шире, чем математическое определение непрерывной функции. Например, функция, изображенная на рис. 1.2.2, *а*, не является непрерывной при $a<t<b$ и терпит разрыв при $t=t_0$, хотя и описывает согласно приведенному выше определению непрерывный сигнал на интервале $a<t<b$.

Дискретным называется сигнал, определенный только для последовательности дискретных значений независимой переменной t. Во многих случаях при отличных от указанной последовательности значениях t сигнал равен нулю, что, однако, не существенно с точки зрения приведенного определения. Во многих практически интересных случаях моменты времени, в которые определяется сигнал, равноотстоят друг от друга и обозначаются $t_0 = t_0 + kT$, где T — промежуток времени между последовательными моментами, а k принимает целые значения. В этом случае сигнал зависит от дискретной независимой переменной k.

*) Множество точек называется счетным, если для них можно установить соответствие с натуральным рядом чисел.

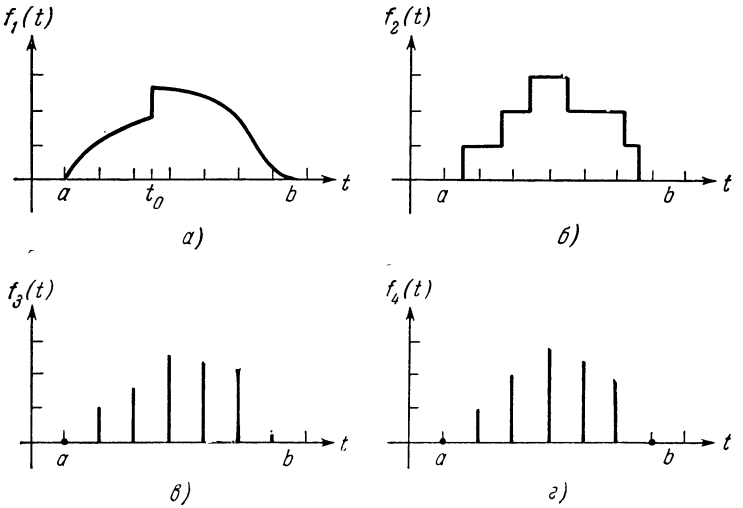


Рис. 1.2.2.

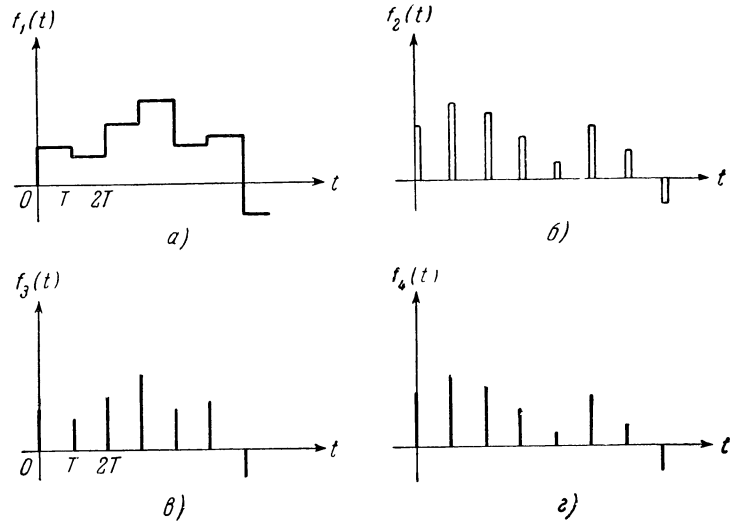


Рис. 1.2.3.

Квантованным по уровню сигналом называется сигнал, который может принимать только определенное число различных значений. Квантование можно упрощенно трактовать как округление до ближайшего подходящего значения подобно округлению числа до ближайшего целого. Квантованные по уровню сигналы могут быть как непрерывными, так и дискретными.

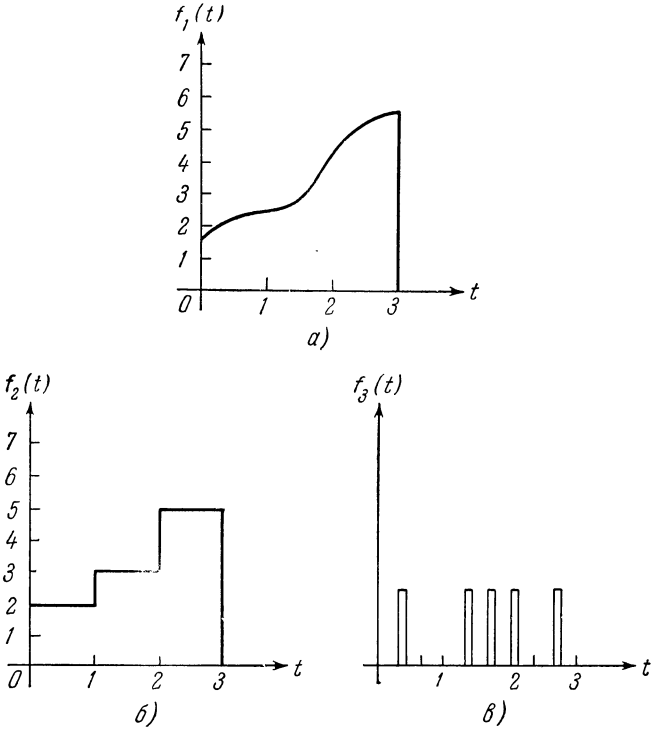


Рис. 1.2.4.

Пример 1.2.8. Функция $f_1(t)$ на рис. 1.2.2, *а* описывает непрерывный сигнал. На координатных осях выделены семь фиксированных моментов времени и четыре дискретных уровня сигнала. Заменяя сигнал ближайшими дискретными уровнями, получаем непрерывный квантованный по уровню сигнал $f_2(t)$. Квантование $f_1(t)$ определяет для семи моментов времени дискретный сигнал $f_3(t)$, а квантование по времени $f_2(t)$ позволяет получить дискретный квантованный по уровню сигнал $f_4(t)$.

Пример 1.2.9. Непрерывные сигналы, изменяющиеся лишь в фиксированные моменты времени, могут быть полностью описаны эквивалентными дискретными сигналами. На рис. 1.2.3, *а* изображена ступенчатая функция, значения которой изменяются лишь в моменты $t=kT$ ($k=0, 1, 2, \ldots$), а на рис. 1.2.3, *б* приведена последовательность импульсов известной ширины. Ука-

занные непрерывные сигналы эквивалентны дискретным сигналам соответственно на рис. 1.2.3, *в* и 1.2.3, *г* в том смысле, что их можно идеально воспроизвести по дискретным.

Рассмотрии дискретный сигнал с периодом повторения T секунд, полученный квантованием по времени *произвольного* непрерывного сигнала с ограниченным спектром. Согласно известной «импульсной» теореме Шеннона *) дискретный сигнал эквивалентен непрерывному при условии, что частота составляющих спектра непрерывного сигнала меньше, чем $1/2T$ периода в секунду [1]. В свете сказанного первоначальный непрерывный сигнал теоретически может быть воспроизведен по дискретному сигналу. В действительности же абсолютно точное его воспроизведение невозможно.

Пример 1.2.10. Выходом цифровой вычислительной машины служит дискретный квантованный по уровню сигнал.

Пример 1.2.11. При кодо-импульсной модуляции в фиксированные моменты времени происходит квантование приращения сигнала по уровню; чаще всего его заменяют ближайшим из восьми уровней, включая нулевой. Затем квантованные приращения сигнала представляются в виде трех импульсов в двоичной системе счисления. Таким образом, сигнал на рис. 1.2.4, *а* квантуется и кодируется, как показано соответственно на рис. 1.2.4, *б*, 1.2.4, *в*.

§ 1.3. Разложение сигналов в ряды по элементарным функциям

В следующей главе рассматривается классический метод определения выходного сигнала $y(t)$ по заданному входному $v(t)$. В зависимости от свойств как самой системы, так и входного сигнала, использование классических методов порой встречает значительные трудности. Естественно предположить, что для входных сигналов определенного вида реакцию системы определить проще, чем при произвольном входном сигнале. Таким образом, для линейных систем имеет смысл попытаться выразить данный произвольный входной сигнал в виде суммы элементарных функций. Если для каждой элементарной функции реакция системы известна или может быть легко определена, то выходной сигнал может быть определен при произвольном входном на основе принципа суперпозиции в соответствии с уравнением (1.2.2).

Несмотря на то, что данная схема пригодна как для стационарных, так и нестационарных линейных систем, ее невозможно распространить на нелинейные системы. Последнее следует из того, что соотношение (1.2.2), на котором основан описываемый

*) Первоначально этот факт установлен В. А. Котельниковым в работе «О пропускной способности эфира и проволоки в электросвязи», 1933. (*Прим. перев.*)

метод, для нелинейных систем несправедливо. В настоящем параграфе дается описание метода в общем виде, а в последующих нескольких параграфах настоящей главы, а также частично во второй и третьей главах, рассматриваются отдельные важные случаи. При необходимости читатель может вернуться к данному параграфу позднее.

Удобство вычислений — не единственное преимущество предлагаемого метода. Свойства системы могут быть выражены различными способами, а именно: при помощи дифференциальных уравнений или путем определения реакции системы на определенные элементарные функции. Как правило, можно перейти от одного метода к другому, но этот переход не всегда легко осуществить. Более того, различные методы описания систем позволяют различным образом подходить к их анализу, в связи с чем оказывается, что определенные задачи удобнее решать на основе «нестандартного» подхода. Одна из таких задач разбирается ниже.

Предположим, что рассматриваемые входные сигналы можно представить в виде ряда элементарных функций k_i ($i=0, 1, 2, \ldots$), т. е.

$$v(t)=\sum_{i=1}^{\infty} a_i k_i(t).$$

Каждая из составляющих ряда $\{k_i\}$ является функцией времени t. Чтобы выделить отдельные элементарные функции, введем параметр λ. Тогда k_i может рассматриваться как непрерывная функция t и дискретная функция λ и запишется в виде $k(t, \lambda)$. Коэффициенты ряда $\{a_i\}$ — постоянные величины, указывающие на удельный вес элементарных функций, образующих $v(t)$, и, конечно, различны для различных элементарных функций. Так как a_i есть дискретные функции времени, то запишем их в виде $a(\lambda)$. Тогда выходной сигнал представится так:

$$v(t)=\sum_{\lambda} a(\lambda) k(t, \lambda). \tag{1.3.1}$$

Функцию $k(t, \lambda)$ называют составляющей или элементарной функцией, а $a(\lambda)$ известна как спектральная функция сигнала $v(t)$ по отношению к $k(t, \lambda)$. Реакция системы на элементарную функцию будет иной функцией t и λ, которую обозначим $K(t, \lambda)$. На основе суперпозиции реакция линейной системы на сигнал $v(t)$ равна

$$y(t)=\sum_{\lambda} a(\lambda) K(t, \lambda). \tag{1.3.2}$$

Как показано в третьей главе, разложение периодических функций в ряд Фурье имеет вид уравнения (1.3.1). Однако для непе-

риодических функций нельзя представить $v(t)$ в виде счетного множества элементарных функций. В этом случае требуется континуальное множество элементарных функций; $k(t, \lambda)$ и $a(\lambda)$ становятся непрерывными функциями параметра λ, и вместо уравнения (1.3.1) имеем

$$v(t) = \int a(\lambda) k(t, \lambda) d\lambda. \tag{1.3.3}$$

Функции $k(t, \lambda)$ и $a(\lambda)$ по-прежнему называются соответственно элементарной и спектральной функциями. Если реакцию линейной системы на $k(t, \lambda)$, как и ранее, обозначить через $K(t, \lambda)$, то реакция на $v(t)$ равна

$$y(t) = \int a(\lambda) K(t, \lambda) d\lambda. \tag{1.3.4}$$

Параметр λ в общем случае может быть комплексной переменной. Тогда интегрирование выражений (1.3.3) и (1.3.4) следует производить в плоскости комплексного переменного; последнее обсуждается в третьей главе. Пределы суммирования и интегрирования в уравнениях (1.3.1)—(1.3.4) зависят от используемого класса элементарных функций; но в общем случае интегрирование должно производиться по всей области параметра λ. Для действительно λ пределы в общем случае берутся от $-\infty$ до $+\infty$. Наконец, используя импульсную функцию, рассматриваемую в следующем параграфе, уравнения (1.3.1) и (1.3.2) можно представить как частный случай уравнений (1.3.3) и (1.3.4).

Описанный метод, подытоженный уравнениями (1.3.3), (1.3.4), практически эффективен при соблюдении следующих условий.

а) Существует метод, позволяющий легко определять коэффициенты $a(\lambda)$ для произвольной функции времени.

б) Существует метод, позволяющий легко находить реакцию произвольной линейной системы на элементарную функцию.

С учетом указанных условий следует выбирать и класс элементарных функций $k(t, \lambda)$. Одними из таких функций являются единичная ступенчатая и единичная импульсная функции. Рассмотрению их посвящен следующий параграф. Все функции данного класса должны совпадать по виду, если их начертить как функцию t безотносительно к значениям λ. Единственное отличие разных функций одного класса в том, что они «действуют» в различное время. В связи с этим $K(t, \lambda)$ являются различными функциями времени при различных значениях параметра λ. Так как время t непосредственно присутствует на всех этапах решения, использование ступенчатой и импульсной функций приводит к «временно́му анализу».

В третьей главе в качестве $k(t, \lambda)$ рассматриваются экспоненциальные функции вида $e^{\lambda t}$, где λ — комплексный параметр, $-\infty<t<\infty$ или $0<t<\infty$. Две функции, соответствующие двум различным значениям λ, в этом случае, однако, не совпадают по виду. Для стационарных систем $K(t, \lambda)$ не зависит от t, так что t не присутствует непосредственно на всех этапах решения.

Использование экспоненциальных функций приводит к «частотному анализу в комплексной области», включающему в себя преобразования Фурье и Лапласа. Обратные преобразования Фурье и Лапласа представляют собой частный случай уравнения (1.3.4).

Дальнейшее обсуждение различных способов представления функций в виде рядов элементарных функций целесообразно отложить до детального рассмотрения временнóго и частотного анализа. Дополнительные сведения приводятся в параграфе 3.10. Оставшаяся часть настоящей главы связана с разложением сигналов в ряды специальных функций.

§ 1.4. Специальные функции

Специальными функциями называется класс функций, составляющий основу временнóго анализа систем. Каждая специальная функция и ее производные являются непрерывными

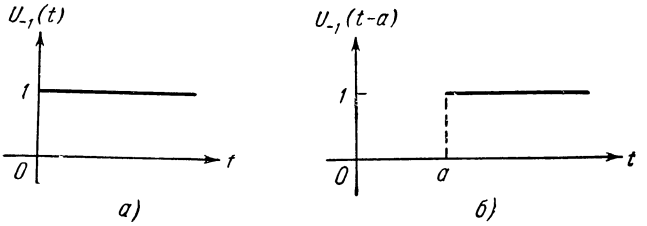


Рис. 1.4.1.

функциями времени при всех, кроме одного, действительных значениях t. Далее, специальные функции могут быть получены одна из другой последовательным дифференцированием или интегрированием. Наиболее распространена единичная ступенчатая функция U_{-1}, показанная на рис. 1.4.1. Легко заметить, что

$$U_{-1}(t)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad t<0, \\ 1 & \text{при} \quad t>0. \end{cases} \tag{1.4.1}$$

Хотя значение этой функции в точке разрыва считают иногда равным 1/2 или 1, более распространено считать функцию неопределенной в этой точке.

Для произвольной функции времени $f(t-a)$ представляет собой $f(t)$, смещенную вправо на a единиц. Поэтому вполне логично обозначить единичную ступенчатую функцию с разрывом в точке $t=a$ в виде

$$U_{-1}(t-a)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad t<a, \\ 1 & \text{при} \quad t>a. \end{cases} \tag{1.4.2}$$

Специально отметим, что разрыв функции соответствует равенству нулю величины в скобках. Единичная ступенчатая функция равняется нулю или единице, если ее аргумент (величина в скобках) соответственно отрицательный или положительный.

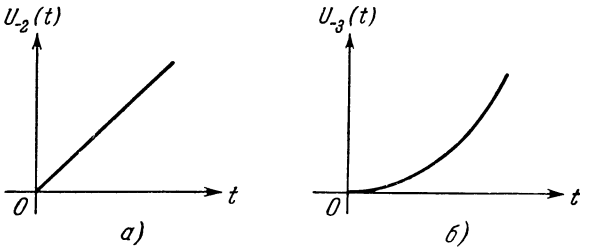


Рис. 1.4.2.

Интегрируя единичную ступенчатую функцию, получим другие специальные функции: единичную линейную возрастающую функцию (рис. 1.4.2, *а*)

$$U_{-2}(t)=\int_{-\infty}^{t} U_{-1}(t)\,dt=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad t<0, \\ t & \text{при} \quad t>0; \end{cases} \tag{1.4.3}$$

функцию U_{-3} (рис. 1.4.2, *б*):

$$U_{-3}(t)=\int_{-\infty}^{t} U_{-2}(t)\,dt=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad t<0, \\ \dfrac{t^2}{2} & \text{при} \quad t>0. \end{cases} \tag{1.4.4}$$

В дальнейшем предлагаются употребляемые в математике обозначения для следующих выражений:

$$f^{-1}(t)=\int f(t)\,dt, \qquad f^{-2}(t)=\int f^{-1}(t)\,dt.$$

Как станет очевидно из материала третьей главы, числовой индекс указывает на степень s в преобразовании Лапласа от данных специальных функций.

Импульсная функция. Последовательное интегрирование типа (1.4.3), (1.4.4) позволяет получить бесчисленное множество специальных функций. Вполне логично попытаться сформировать специальные функции посредством последовательного дифференцирования единичной ступенчатой функции. Однако производная от $U_{-1}(t)$ равна нулю при $t \neq 0$ и не существует при

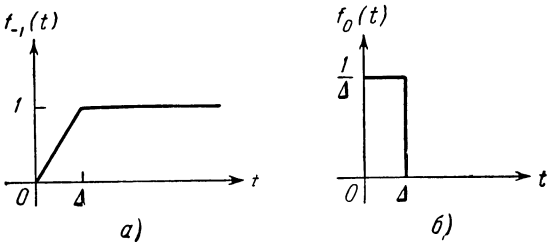


Рис. 1.4.3.

$t=0$. С целью более детального изучения рассмотрим функцию вида $f_{-1}(t)$ на рис. 1.4.3, *а*, аппроксимирующую единичную ступенчатую функцию. Производная от $f_{-1}(t)$ равна $f_0(t)$ и представлена на рис. 1.4.3, *б*:

$$f_0(t) = \frac{d}{dt} f_{-1}(t),$$
$$f_{-1}(t) = \int_{-\infty}^{t} f_0(t)\,dt. \qquad (1.4.5)$$

Чем меньше величина Δ, тем точнее $f_{-1}(t)$ аппроксимирует единичный скачок. При этом $f_0(t)$ становится более узким и высоким импульсом, сохраняя ограниченную площадь равной единице. Очевидно, что

$$\lim_{\Delta \to 0} f_{-1}(t) = U_{-1}(t),$$

за исключением, возможно, $t=0$. Предел $f_0(t)$ обозначим

$$U_0(t) = \lim_{\Delta \to 0} f_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t \neq 0, \\ \infty & \text{при} \quad t = 0. \end{cases}$$

$U_0(t)$ называется единичной импульсной функцией; ее свойства иллюстрируются на рис. 1.4.4. Число 1 рядом со стрелкой обозначает, что общая площадь, ограниченная «кривой», равна

единице. В пределе уравнение (1.4.5) стремится к

$$U_0(t) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{d}{dt} f_{-1}(t),$$

$$U_{-1}(t) = \lim_{\Delta \to 0} \int_{-\infty}^{t} f_0(t)\,dt.$$

Может показаться, что данные выражения в свою очередь преобразуются к виду

$$U_0(t) = \frac{d}{dt} U_{-1}(t),$$

$$U_{-1}(t) = \int_{-\infty}^{t} U_0(t)\,dt. \tag{1.4.6}$$

Последнее, однако, не строго с точки зрения математики. Дифференцирование и интегрирование — операции, сами по себе

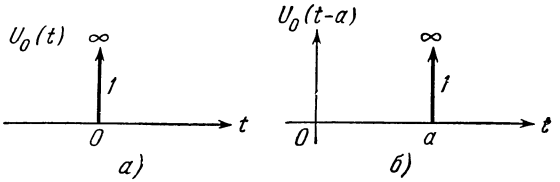


Рис. 1.4.4.

связанные с предельным переходом; и уравнение (1.4.6) справедливо лишь в том случае, если дифференцирование и интегрирование коммутативны с операцией предельного перехода при стремлении Δ к нулю. То, что перестановка местами пределов не всегда справедлива, иллюстрируется на следующем примере:

$$\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \neq \lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Математические трудности, связанные с понятием импульсной функции, как бы приводят к выводу, что не существует функции как таковой в обычном смысле этого слова. Известно, что f является функцией t, если каждому значению t из области D соответствует единственное значение f. Вне зависимости от способа задания функции (в виде уравнения, таблицы, графика), ее значения строго определяются значениями t из области D. Функциональная зависимость представляет собой зависимость «от точки к точке»; моделью ее может служить «черный ящик»

с входным и выходным отверстиями, как это показано на рис. 1.4.5. Если t_k из области D бросить во входное отверстие, определенное f_k выпадает из выходного отверстия. Как правило, D — область действительных чисел. Приведенное выше определение предполагает понятия функции и однозначной функции тождественными. Многозначная функция может быть представлена в виде двух или более однозначных функций.

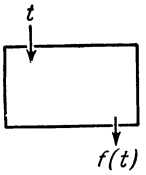


Рис. 1.4.5.

Единичная ступенчатая функция полностью соответствует приведенному математическому определению функции. Вполне приемлемо определить единичную импульсную функцию в виде

$$U_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq 0, \\ \text{не существует} & \text{при } t = 0. \end{cases}$$

Но определение единичной импульсной функции на основе предельного перехода от $f_0(t)$ (см. рис. 1.4.3, *б*) должно учитывать тот факт, что площадь, ограничиваемая кривой, равна единице. Последнее можно показать посредством

$$\int_{-\infty}^{t} U_0(t)\,dt = U_{-1}(t)$$

или эквивалентным соотношением

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} U_0(t)\,dt = 1 \quad \text{для всех } \varepsilon > 0.$$

Но ни одно из двух последних выражений не отвечает сформулированному выше математическому определению функции.

Математическое обоснование результатов анализа систем на базе импульсных функций может быть проведено путем привлечения современного математического аппарата, в частности, использования интегралов Стильтьеса и Лебега вместо интеграла Римана, а также детального рассмотрения возможности изменения пределов при предельных переходах.

Сейчас принято относить импульсную функцию к «обобщенным функциям» *). Обыкновенные математические функции составляют лишь отдельный класс в современной теории обобщенных функций. Можно построить обобщенную функцию, обладающую свойствами единичного мгновенного импульса. Эти

*) Образцовый труд по данному вопросу — [2]. Более простое, доступное изложение дается в [3].

свойства сводятся к следующему:

$$U_0(t-\tau)=0 \quad \text{при} \quad t\neq\tau,$$

$$\int_{-\infty}^{t} U_0(t-\tau)\,dt = U_{-1}(t-\tau), \tag{1.4.7}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,U_0(t-\tau)\,dt = f(\tau), \text{ если } f(t) \text{ непрерывная функция.}$$

Первые два свойства уже разбирались. Третье следует из того, что интеграл равен нулю для всех t, кроме $t=\tau$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,U_0(t-\tau)\,dt = \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} f(t)\,U_0(t-\tau)\,dt.$$

Используя теорему о среднем значении, получим

$$f(\tau)\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} U_0(t-\tau)\,dt = f(\tau).$$

Данное соотношение иногда называется стробирующим свойством.

В качестве примера рассмотрим уравнения (1.3.3) и (1.3.4). Если $k(t, \tau)$ представляет собой последовательность мгновенных импульсов, то интеграл отличен от нуля лишь в «дискретное время» и интегрирование заменяется суммированием. Это объясняет утверждение о том, что выражения (1.3.1) и (1.3.2) можно рассматривать как частный случай (1.3.3) и (1.3.4).

Представление запасенной начальной энергии посредством мгновенных импульсов. Единичный импульс, приложенный к системе с динамическими звеньями, стремится мгновенно изменить ее энергию. Так, при действии единичного импульса на находящуюся в покое материальную точку с массой M ее скорость станет равной

$$v(t) = \frac{1}{M}\int_{-\infty}^{t} U_0(t)\,dt = \frac{1}{M}U_{-1}(t).$$

Таким образом, в момент времени $t=0$ массе M мгновенно сообщена $1/2M$ единиц кинетической энергии. Единичный импульс тока, протекающий через предварительно незаряженную емкость, изменит напряжение на ней так:

$$e(t) = \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{t} U_0(t)\,dt = \frac{1}{c}U_{-1}(t) \text{ в}.$$

Следовательно, импульс тока мгновенно сообщает емкости заряд в 1 кулон, увеличивая энергию электростатического поля на $1/2C$ джоуля. Подобным образом источник напряжения $U_0(t)$ *в* в цепи, содержащей индуктивность, вызывает ток

$$i(t) = \frac{1}{L} U_0(t)\,dt = \frac{1}{L} U_{-1}(t) \text{ ампер},$$

мгновенно изменяя энергию магнитного поля на $1/2L$ джоуля.

Приведенные примеры позволяют предположить, что действие запасенной системой начальной энергии можно представить как воздействие мгновенных импульсов. Напомним, что основные определения, приведенные в § 1.2, относящиеся, в частности, к линейным стационарным системам, предполагают систему предварительно невозбужденной (не обладающей запасом начальной энергии до момента подачи внешних воздействий). Если эти определения распространить на системы, обладающие начальным запасом внутренней энергии, то действие последней необходимо учитывать путем введения дополнительных входных воздействий. При рассмотрении выходной реакции для $t > t_0$ в цепях, содержащих емкости или индуктивности, учет начальной энергии производится преобразованием данных цепей

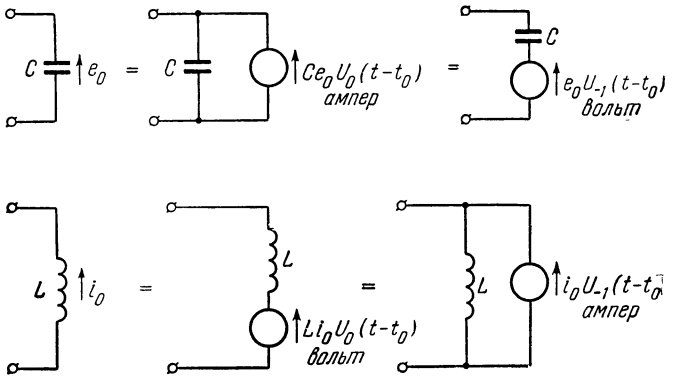


Рис. 1.4.6.

к эквивалентным в соответствии с рис. 1.4.6. (В одном из возможных вариантов замены используются ступенчатые функции.) Эквивалентность непосредственно следует из общеизвестных теорем.

Еще одно применение импульсной функции. Представление единичной импульсной функции в виде бесконечно узкого прямоугольного импульса единичной площади позволяет предпо-

ложить, что реакцию системы на прямоугольный импульс подобного вида можно приближенно определить, вычисляя реакцию системы на импульсную функцию, величина которой равна площади прямоугольного импульса. Подобная идея сама по себе весьма эффективна, так как определение реакции системы на импульсную функцию проще, чем на прямоугольный импульс. Аппроксимация справедлива в том случае, когда ширина входного импульса мала по сравнению с постоянной времени рассматриваемой системы. Так, если действие прямоугольного импульса силы на материальную точку таково, что ее состояние не изменяется значительно за время действия импульса, то прямоугольный импульс силы можно заменить импульсной функцией со значением, равным его площади. Входной импульс произвольной формы сообщает системе некоторую энергию. Если за время сообщения системе всей энергии ее выход не претерпевает сколь-нибудь заметного изменения, выходной сигнал такой системы можно приближенно представить как реакцию на импульсную функцию. Очевидно, что аппроксимация тем точнее, чем у́же входной импульс. Сказанное является предметом обсуждения в следующем параграфе.

Другие специальные функции. Рассмотрение прямоугольных импульсов бесконечно малой длительности (см. рис. 1.4.3,*б*) — лишь один из путей, приводящих к единичной функции. Вместо прямоугольного импульса можно использовать любую другую функцию, обладающую в пределе требуемыми свойствами. Две такие функции приведены на рис. 1.4.7,*а* и *б*. При $\Delta \to 0$ получаем единичную импульсную функцию. Производная от функции на рис. 1.4.7,*б* приведена на рис. 1.4.7,*в*. При $\Delta \to 0$ $f_0(t)$ превращается в единичную импульсную функцию, а $f_1(t)$ становится единичным диполем (рис. 1.4.7,*г*). Единичный диполь обладает следующими свойствами:

$$U_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t \neq 0, \\ -\infty \quad \text{и} \quad \infty & \text{при} \quad t = 0, \end{cases}$$
$$U_0(t) = \int_{-\infty}^{t} U_1(t)\,dt. \tag{1.4.8}$$

Трудности, встречающиеся при операциях с единичным мгновенным импульсом, характерны и для единичного диполя.

Последовательное дифференцирование единичного диполя приводит к неограниченному количеству других специальных функций. Итак, все специальные функции полностью характеризуются описанием какой-либо одной из них с последующим

использованием соотношений

$$U_{n+1}(t-a)=\frac{d}{dt}U_n(t-a),$$
$$U_{n-1}(t-a)=\int_{-\infty}^{t}U_n(t-a)\,dt. \qquad (1.4.9)$$

Из специальных функций в качестве элементарных наибольшее распространение получили единичные ступенчатые и импульсная функции.

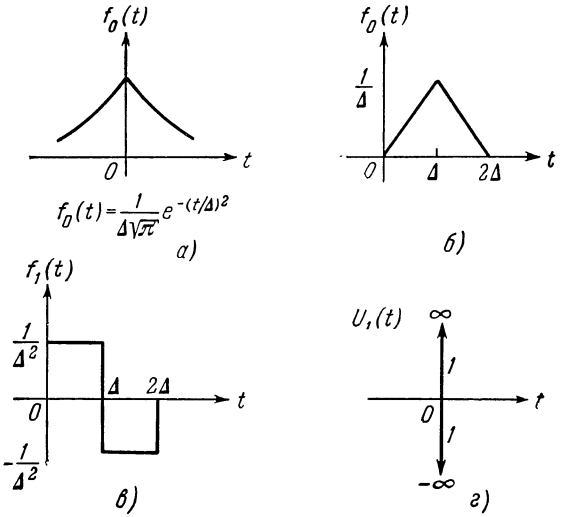


Рис. 1.4.7.

Определение импульсной и временнóй характеристик. В последующих параграфах данной главы показывается, как определять реакцию линейной системы на произвольный входной сигнал, если известны ее реакции на единичный ступенчатый сигнал или единичную импульсную функцию. Термины импульсная и временнáя характеристики следует понимать как реакцию предварительно невозбужденной системы на единичные ступенчатую и импульсную специальные функции.

Пример 1.4.1. Если входом схемы на рис. 1.4.8 служит сигнал $i_1(t)=U_0(t)$, то она ведет себя как разомкнутая цепь, за исключением момента $t=0$, когда цепи мгновенно сообщается некоторая энергия. Из-за индуктивности цепи мгновенный импульс тока протекает через правое сопротивление, вызывая мгновенный импульс напряжения в реакции $e_0(t)$. Так как ток через цепочку RL ограничен, на индуктивности появится импульс напряжения, со-

здающий ток $1/2$ ампера. При $t > 0$ данную схему можно заменить эквивалентной на рис. 1.4.9, где $i(0+) = 1/2$ ампера. Постоянная времени цепи 1 секунда, так что

$$e_0(t) = -i(t) = -\left[\frac{1}{2}e^{-t}\right] \quad \text{при} \quad t > 0.$$

Окончательно импульсная переходная функция системы имеет вид

$$e_0(t) = U_0(t) - \left[\frac{1}{2}e^{-t}\right] U_{-1}(t).$$

Так как данная система стационарная, то ее временная характеристика представляет собой интеграл от импульсной характеристики, а именно:

$$1 - \int_0^t \left[\frac{1}{2}e^{-t}\right] dt = \frac{1}{2}(1 + e^{-t}) \quad \text{при} \quad t > 0.$$

Для большинства систем временная и импульсная характеристики определяются аналитически на основе описывающих систему дифференциальных уравнений. Получение импульсной

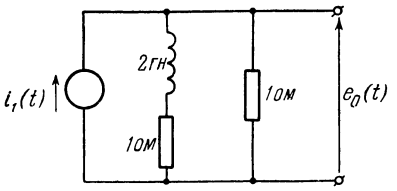


Рис. 1.4.8

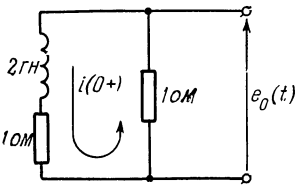


Рис. 1.4.9.

характеристики по известному дифференциальному уравнению системы детально обсуждается во второй главе. Связь импульсной характеристики с передаточной функцией системы разбирается в третьей главе. В ряде случаев временна́я и импульсная характеристики могут быть заданы заранее или определены приближенно из эксперимента.

§ 1.5. Разложение непрерывного сигнала по специальным функциям

Рассмотрим функцию $v(t)$, выделенную на рис. 1.5.1, *а* жирной линией. Ее можно грубо аппроксимировать кусочно-постоянной функцией, изображенной на рис. 1.5.1, *а* штриховой линией. Кусочно-постоянная функция состоит из пяти ступенчатых функций (рис. 1.5.1, *б*)

$$v(t) \doteq U_{-1}(t) + 2U_{-1}(t-1) + U_{-1}(t-2) - 3U_{-1}(t-3) - \\ - U_{-1}(t-4),$$

где $\doteq$ означает «приблизительно равна». Аппроксимация тем точнее, чем больше ступеней у выбираемой кусочно-постоянной функции и чем меньше их временные интервалы.

Площадь, ограниченная $v(t)$, разбита на рис. 1.5.1, *в* на четыре участка, а на рис. 1.5.1, *г* каждый из участков аппроксимируется мгновенным импульсом со значением, равным площади этого участка. Тогда

$$U(t) \doteq 2U_0(t) + 3{,}5U_0(t-1) + 3U_0(t-2) + 0{,}5\,U_0(t-3).$$

Данное выражение, несомненно, нельзя считать хорошей аппроксимацией $v(t)$, так как рис. 1.5.1, *в* и *г* имеют мало общего.

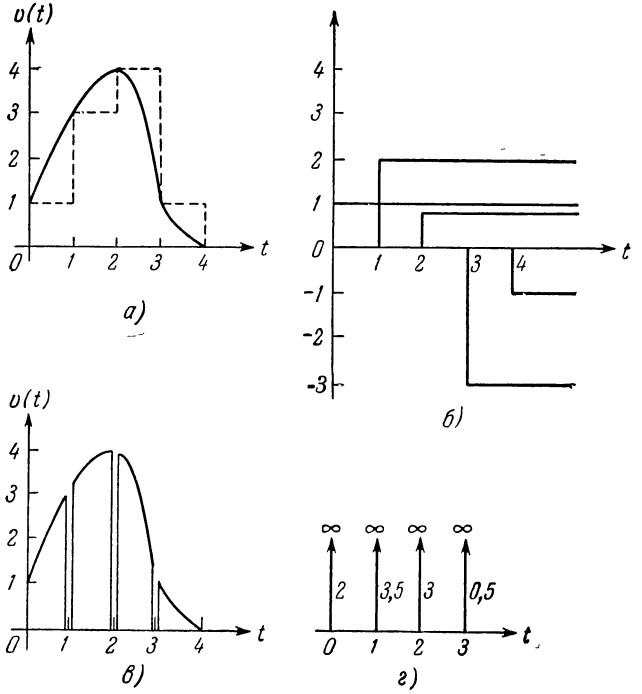


Рис. 1.5.1.

Аппроксимация ограниченной функции $v(t)$ посредством функций, принимающих только значения нуль и бесконечность, не может быть удовлетворительной. Однако если задача состоит в определении реакции линейной системы на сигнал $v(t)$, то описанная процедура может оказаться удовлетворительной. Как указывалось в предыдущем параграфе, выбираемые при аппроксимации интервалы времени должны быть меньше постоянных времени системы.

Аппроксимация, иллюстрируемая на рис. 1.5.1, станет точной при стремлении интервалов аппроксимации к нулю. Рассмотрим произвольную функцию $v(\lambda)$, изображенную на рис. 1.5.2, *а*. Ее можно аппроксимировать в виде последовательности ступенчатых или импульсных функций. Фиктивная переменная λ введена, чтобы отличать текущее время t от переменной, обозначающей расстояние от начала координат вдоль оси абсцисс. Используя ступенчатые функции, запишем

$$v(t) = \sum_{k=-\infty} \Delta v(k\Delta\lambda)\, U_{-1}(t - k\Delta\lambda),$$

где $\Delta v(k\Delta\lambda)$ обозначает скачок функции в точке $k\Delta\lambda$ при кусочно-постоянной аппроксимации (рис. 1.5.2, *б*). Так как

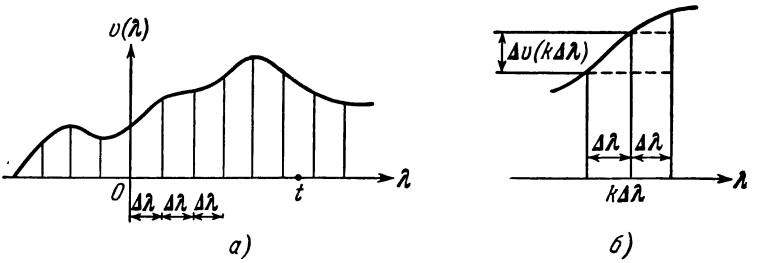


Рис. 1.5.2.

множитель $U_{-1}(t - k\Delta\lambda) = 0$ при $t < k\Delta\lambda$, то скачок аппроксимирующей функции не зависит от значения $v(\lambda)$ в точке t и происходит справа от нее. Заметим также, что

$$\Delta v(k\Delta\lambda) = \left[\frac{dv(\lambda)}{d\lambda}\right]_{k\Delta\lambda} \Delta\lambda.$$

Таким образом,

$$v(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{dv(\lambda)}{d\lambda}\right]_{k\Delta\lambda} U_{-1}(t - k\Delta\lambda)\,\Delta\lambda. \qquad (1.5.1)$$

Приведенные выше выражения становятся точными при стремлении $\Delta\lambda$ к нулю. В пределе $\Delta\lambda$ стремится к $d\lambda$, $k\Delta\lambda$ становится непрерывной переменной λ, суммирование заменяется интегрированием:

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv(\lambda)}{d\lambda}\, U_{-1}(t - \lambda)\, d\lambda.$$

Так как $U_{-1}(t-\lambda)=0$ при $\lambda>t$, то непосредственно следует

$$v(t)=\int_{-\infty}^{t}\frac{dv(\lambda)}{d\lambda}\,d\lambda. \tag{1.5.2}$$

Используя импульсные функции, представим $v(t)$ в виде

$$v(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}[v(k\Delta\lambda)]\,U_0(t-k\Delta\lambda)\Delta\lambda, \tag{1.5.3}$$

где величина $[v(k\Delta\lambda)]\Delta\lambda$ равна площади прямоугольного импульса с началом в точке $k\Delta\lambda$ (см. рис. 1.5.2, *б*). Аппроксимация становится точной при стремлении $\Delta\lambda$ к нулю. В пределе имеем

$$v(t)=\int_{-\infty}^{\infty}v(\lambda)\,U_0(t-\lambda)\,d\lambda. \tag{1.5.4}$$

Полученный результат представляет собой не что иное, как уже отмеченное в уравнении (1.4.7) стробирующее свойство единичной импульсной функции. Как указывалось выше, выражение (1.5.3) при отличном от нуля $\Delta\lambda$ не служит хорошей аппроксимацией функции $v(t)$. Точное воспроизведение получается при стремлении $\Delta\lambda$ к нулю; при этом площадь импульсов и расстояние между ними также стремится к нулю.

Несмотря на то, что выражения (1.5.2) и (1.5.4) сами по себе довольно тривиальные, на базе их выводятся чрезвычайно важные соотношения для реакции линейной системы. Пусть входной сигнал линейной системы аппроксимируется выражением (1.5.1). Обозначим реакцию системы на единичный ступенчатый сигнал, приложенный в момент $t=\beta$, символом $r(t,\ \beta)$. Таким образом, $y(t)=r(t,\ \beta)$ при $v(t)=U_{-1}(t-\beta)$. Тогда на основе принципа суперпозиции реакция системы на произвольный входной сигнал приближенно запишется в виде

$$y(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\frac{dv(\lambda)}{d\lambda}\right]_{k\Delta\lambda}r(t,\ k\Delta\lambda)\Delta\lambda.$$

Точное выражение для выходного сигнала получается при предельном переходе $\Delta\lambda\to 0$:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dv(\lambda)}{d\lambda}\,r(t,\ \lambda)\,d\lambda. \tag{1.5.5}$$

Для систем без упреждения $r(t, \lambda)=0$ при $t<\lambda$, так что

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} \frac{dv(\lambda)}{d\lambda} r(t, \lambda)\, d\lambda. \qquad (1.5.6)$$

Предположим теперь, что входной сигнал аппроксимируется выражением (1.5.3). Обозначим реакцию системы на единичный мгновенный импульс, приложенный в момент времени $t=\beta$, через $h(t, \beta)$. На основе суперпозиции реакция системы на произвольный входный сигнал приближенно запишется в виде

$$y(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} v(k\Delta\lambda)\, h(t, k\Delta\lambda)\, \Delta\lambda.$$

Точное выражение для выходного сигнала получается при предельном переходе $\Delta\lambda \to 0$:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} v(\lambda)\, h(t, \lambda)\, dt. \qquad (1.5.7)$$

Так как для систем без упреждения $h(t, \lambda)=0$ при $t<\lambda$,

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} v(\lambda)\, h(t, \lambda)\, d\lambda. \qquad (1.5.8)$$

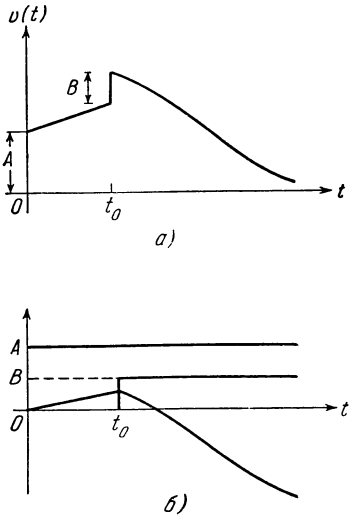


Рис. 1.5.3.

Во многих задачах входной сигнал равен нулю при $t<0$. При этом нижний предел интегрирования в уравнениях (1.5.5)—(1.5.8) следует положить равным нулю.

Существуют два случая, которые вызывают определенную трудность при использовании приведенных уравнений. Если входной сигнал терпит разрывы, его производная, фигурирующая в уравнении (1.5.6), будет содержать мгновенные импульсы. При определении величины интеграла полезно использовать стробирующее свойство, выражаемое уравнениями (1.4.7) и (1.5.4). Производная входного сигнала, изображенного на рис. 1.5.3, *а*, содержит мгновенные импульсы величины A и B, соответственно в моменты времени $t=0$ и t_0. Таким образом, уравнение (1.5.6) преобразуется к виду

$$y(t)=Ar(t, 0)+Br(t, t_0)+\int_{0}^{t} \frac{dv_1(\lambda)}{d\lambda} r(t, \lambda)\, d\lambda, \qquad (1.5.9)$$

где $dv_1/d\lambda$ соответствует $dv/d\lambda$, если исключить из рассмотрения мгновенные импульсы, соответствующие точкам разрыва $v(t)$, действие которых учитывается дополнительными членами. Последнее уравнение непосредственно следует из стробирующего свойства мгновенных импульсов или из представления функции на рис. 1.5.3, *а* в виде трех составляющих, показанных на рис. 1.5.3, *б*.

Импульсная характеристика системы иногда сама содержит мгновенный импульс (тогда и подынтегральное выражение уравнения (1.5.8) содержит мгновенный импульс) и может быть представлена в виде суммы двух слагаемых

$$h(t, \lambda) = kU_0(t-\lambda) + h_1(t, \lambda),$$

где h_1 не содержит мгновенного импульса. Тогда реакция на произвольный входной сигнал $v(t)$ имеет вид

$$y(t) = kv(t) + \int_{-\infty}^{t} v(\lambda)\, h_1(t, \lambda)\, d\lambda. \tag{1.5.10}$$

§ 1.6. Интеграл свертывания для стационарных систем

Приведенные выше выражения справедливы для всех линейных систем. Для стационарных систем их можно упростить. $h(t)$ и $r(t)$ обычно используются для обозначения реакции системы соответственно на единичный импульс и на единичный ступенчатый сигнал, приложенные при $t=0$:

$$h(t) = h(t, 0) \text{ и } r(t) = r(t, 0).$$

Из определения стационарной системы согласно уравнению (1.2.3)

$$\begin{aligned} h(t, \lambda) &= h(t-\lambda, 0) = h(t-\lambda), \\ r(t, \lambda) &= r(t-\lambda, 0) = r(t-\lambda). \end{aligned} \tag{1.6.1}$$

Тогда уравнения (1.5.5)—(1.5.8) сводятся к уравнениям (1.6.2) и (1.6.3) в таблице 1.6.1. Уравнения (1.6.4) и (1.6.5) в данной таблице легко получить из первых двух путем замены переменных $\tau = t - \lambda$. Для систем без упреждения с $v=0$ при $t<0$ пределы всех интегралов равны 0 и t. Однако и в этом случае использование более широких пределов не является ошибкой и иногда сохраняется с целью упрощения доказательства некоторых теорем.

Уравнения (1.6.4) и (1.6.5) приводят к другой интерпретации временнóго анализа. Рассмотрим уравнение (1.6.4) для

Таблица 1.6.1

Общее уравнение	Упрощение для системы без упреждения	Упрощение, если входной сигнал равен нулю при $t < 0$	Номер уравнения
$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} v(\lambda)\, h(t-\lambda)\, d\lambda$	Верхний предел равен t	Нижний предел равен нулю	(1.6.2)
$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv(\lambda)}{d\lambda}\, z(t-\lambda)\, d\lambda$			(1.6.3)
$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t-\tau)\, h(\tau)\, d\tau$	Нижний предел равен нулю	Верхний предел равен t	(1.6.4)
$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv(t-\tau)}{d(t-\tau)}\, r(\tau)\, d\tau$			(1.6.5)

системы без упреждения и входном сигнале, равном нулю при $t<0$:

$$y(t) = \int_0^t v(t-\tau)\, h(\tau)\, d\tau,$$

$y(t)$ и $v(t)$ — соответственно выходной и входной сигналы в момент времени t. Так как $v(t-\tau)$ представляет собой входной сигнал, сдвинутый на τ секунд по отношению к этому моменту, переменную τ называют иногда «возрастной» переменной. С ростом $\tau v(t-\tau)$ определяется входной сигнал для все более ранних моментов в прошлом. При $\tau = 0$ и $\tau = t$ $v(t-\tau)$ определяет входной сигнал в моменты времени соответственно t и 0. Из приведенного выше уравнения следует, что значение выходного сигнала в момент времени t определяется всей предысторией входного сигнала. Входной сигнал входит, однако, с весовым коэффициентом $h(\tau)$, который иногда называют весовой функцией системы вместо употребляемого термина импульсная характеристика. Подобная трактовка с использованием термина «весовая функция», возможно, станет яснее в дальнейшем, — при рассмотрении графической интерпретации приведенного уравнения. Если система устойчива, то $h(\tau)$ стремится к нулю

при стремлении τ к бесконечности. Для подобных систем влияние ближайших по времени значений (их вес) входного сигнала на выходной значительнее, чем более отдаленных.

Уравнения (1.6.2) и (1.6.4) можно также записать в иной форме, используя тот факт, что для стационарных линейных систем

$$h(\tau)=\frac{dr(\tau)}{d\tau} \quad \text{и} \quad h(t-\lambda)=\frac{dr(t-\lambda)}{d(t-\lambda)}.$$

В случае стационарных систем для входных сигналов, равных нулю при $t<0$, все формулы можно обобщить в следующем виде:

$$y(t)=\frac{dv(t)}{dt}*r(t)=v(t)*\frac{dr(t)}{d}=v(t)*h(t). \qquad (1.6.6)$$

Символ (*) означает свертывание функций, стоящих по одну из сторон от него. Математически свертывание определяется выражениями

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(t-\lambda)f_2(\lambda)\,d\lambda=\int_0^t f_1(\lambda)f_2(t-\lambda)\,d\lambda. \qquad (1.6.7)$$

При рассмотрении более общих пределов интегрирования от $-\infty$ до $+\infty$ термин свертывание и обозначение $f_1(t)*f_2(t)$ все еще употребляются в литературе.

Пример 1.6.1. Определить ток $i(t)$ в цепи, содержащей источник напряжения и показанной на рис. 1.6.1. Предполагается, что в цепи не содержится запасенной при $t<0$ энергии

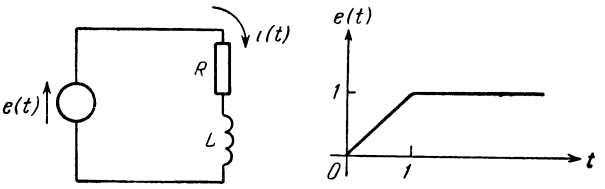


Рис. 1.6.1.

Согласно введенным обозначениям $v(t)=e(t)$ и $y(t)=i(t)$. При скачке напряжения ток изменится в соответствии с

$$r(t)=\frac{1}{R}\left[1-e^{-(R/L)t}\right] \quad \text{при} \quad t>0.$$

Используем уравнение

$$i(t)=\int_0^t \frac{de(\lambda)}{d\lambda}\,r(t-\lambda)\,d\lambda.$$

Так как вид входного сигнала различен для моментов времени $0 < t < 1$ и $1 < t$, решение должно состоять из двух частей.

При $0 < t < 1$

$$i(t) = \int_0^t (1)\frac{1}{R}\left[1 - e^{-(R/L)(t-\lambda)}\right] = \frac{1}{R}\left[t - \frac{L}{R}\left(1 - e^{-(R/L)t}\right)\right].$$

При $1 < t$

$$i(t) = \int_0^1 (1)\frac{1}{R}\left[1 - e^{-(R/L)(t-\lambda)}\right] d\lambda + \int_1^t 0\, d\lambda = \frac{1}{R}\left[1 - \frac{L}{R}\left(e^{R/L} - 1\right) e^{-(R/L)t}\right].$$

Отметим, что, как и следовало ожидать, оба решения совпадают при $t=1$. Заметим также, что второе решение не тождественно первому, если t заменить 1.

Пример 1.6.2. На рис. 1.6.2 показано последовательное соединение двух идентичных контуров. Предполагая, что импульсная характеристика каждого

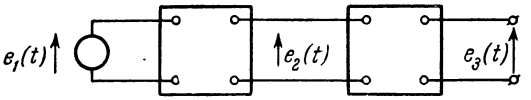


Рис. 1.6.2.

из контуров в отдельности равна $h(t) = te^{-t}$ при $t \geqslant 0$, а также, что второй контур не оказывает воздействия на первый, определить импульсную характеристику системы в целом.

Если

$$e_1(t) = U_0(t),$$

то

$$e_2(t) = te^{-t} \quad \text{при} \quad t \geqslant 0$$

и

$$e_3(t) = \int_0^t e_2(\lambda)\, h(t-\lambda)\, d\lambda =$$

$$= \int_0^t (\lambda e^{-\lambda})\left[(t-\lambda)\, e^{-(t-\lambda)}\right] d\lambda = \frac{t^3 e^{-t}}{6} \quad \text{при} \quad t \geqslant 0.$$

Последнее выражение определяет импульсную характеристику всей системы.

Пример 1.6.3. Предположим, что отдельные контуры на рис. 1.6.2 являются усилителями, причем временна́я характеристика каждого из них равна $r(t) = -Ae^{-t/RC}$ при $t \geqslant 0$. Определить временну́ю характеристику последовательного соединения двух каскадов усиления, предполагая, что второй из них не воздействует на первый. Распространить результат на случай n каскадов.

Если

$$e_1(t) = U_1(t),$$

то

$$e_2(t) = Ae^{-t/RC} \quad \text{при} \quad t \geqslant 0$$

и

$$e_3(t) = \int_0^t \frac{de_2(\lambda)}{d\lambda} r(t-\lambda)\, d\lambda = e_2(0)\, r(t) + \int_0^t \frac{de_2(\lambda)}{d\lambda} r(t-\lambda)\, d\lambda.$$

В последнем выражении содержится дополнительно слагаемое, обусловленное разрывом $e_2(t)$ в момент $t=0$. Данное уравнение подобно уравнению (1.5.9):

$$e_3(t) = (-A)(-Ae^{-t/RC}) + \int_0^t \left[\frac{A}{RC} e^{-\lambda/RC}\right]\left[-Ae^{[-(t-\lambda)/RC]}\right] d\lambda =$$

$$= A^2 e^{-t/RC}\left[1 - \frac{t}{RC}\right] \quad \text{при} \quad t \geqslant 0.$$

Последнее выражение определяет временну́ю характеристику двухкаскадного усилителя. Для трех каскадов усиления временна́я характеристика равна

$$A^2(-Ae^{-t/RC}) + \int_0^t A^2 \frac{d}{d\lambda}\left[e^{-\lambda/RC}\left(1 - \frac{\lambda}{RC}\right)\right]\left[-Ae^{-(t-\lambda/RC}\right] d\lambda =$$

$$= A^3 e^{-t/RC}\left[1 - 2\left(\frac{t}{RC}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{RC}\right)^2\right] \quad \text{при} \quad t \geqslant 0.$$

В случае n каскадов усиления временна́я характеристика имеет вид

$$(-A)^n e^{-t/RC}\left[1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-1)!\,(-t/RC)^k}{(n-k-1)!\,(k!)^2}\right] \quad \text{при} \quad t \geqslant 0.$$

Последнее выражение, как показано в третьей главе, гораздо проще получить при помощи преобразования Лапласа. В [4] на основе этого выражения приведены графики для различных значений n.

Графическая интерпретация интегралов свертывания. Графическое определение значений

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\lambda) f_2(t-\lambda)\, d\lambda \tag{1.6.8}$$

основано на том факте, что определенный интеграл от функции численно равен площади, ограничиваемой графиком этой функции. Конкретно, пусть

$$f_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad 0 < t < 1, \\ 0 & \text{при} \quad \text{остальных } t, \end{cases}$$

$$f_2(t) = \frac{1}{R}\left[1 - e^{-(R/L)t}\right] \quad \text{при} \quad t \geqslant 0.$$

Как показано на рис. 1.6.3, $f_2(t-\lambda)$ по отношению к $(\lambda-t)$ является зеркальным отображением функции $f_2(t)$ относительно вертикальной оси. При замене аргумента на λ она сдвигается на t единиц вправо. Умножение $f_1(\lambda)$ на $f_2(t-\lambda)$ приводит к последней кривой на рис. 1.6.3. Заштрихованная площадь равна значению интеграла в уравнении (1.6.8) для данного значения t.

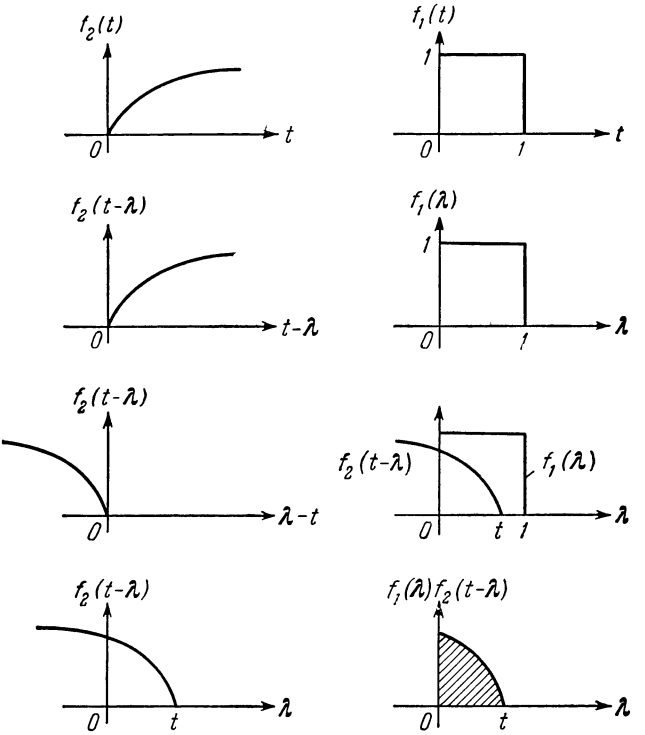


Рис. 1.6.3.

Таким образом, для нахождения $f_1(t)*f_2(t)$ следует «перегнуть» график одной из функций относительно вертикальной оси, «вдвинуть» его на величину t в график другой функции и определить площадь, ограниченную результирующей кривой.

Графическое вычисление этой площади для различных значений t приведет к графику $f_1(t)*f_2(t)$ относительно t. В приведенном выше примере как аналитический, так и графический подход указывают на то, что реакция на воздействия монотонно возрастает от нуля при $t=0$ до $1/R$ при $t\to\infty$, в то время как

скорость ее нарастания внезапно уменьшается при $t=1$. Отметим, что при замене пределов интегрирования на $-\infty$ и ∞ результат остается прежним. Интеграл отличен от нуля лишь на интервале $0<\lambda<t$, так как $f_1(\lambda)=0$ при $\lambda<0$ и $f_2(t-\tau)=0$ при $\lambda>t$. Для систем без упреждения при входных сигналах в $t<0$ пределами следует считать $-\infty$ и $+\infty$.

Вычисление интеграла свертывания графическим методом практически целесообразно в тех случаях, когда аналитическая процедура оказывается громоздкой или когда входной сигнал или импульсная характеристика заданы не аналитически, а графически. Указанное подтверждает правомерность трактовки импульсной характеристики как весовой функции.

Рассмотрим формулу

$$y(t)=\int_0^t v(\lambda)\,h(t-\lambda)\,d\lambda=\int_0^t v(t-\tau)\,h(\tau)\,d\tau.$$

Так как $v(t-\tau)$ умножается на $h(\tau)$, то прошлые значения входного сигнала входят в произведение с некоторым весом, определяемым импульсной характеристикой.

Полезное свойство интегралов свертывания. Интеграл свертывания двух интегрируемых функций имеет вид

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\lambda)\,f_2(\lambda)\,d\lambda=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda)\,f_2(t-\lambda)\,d\lambda, \qquad (1.6.9)$$

где для большей общности взяты пределы $-\infty$ и $+\infty$. Дифференцируя обе части выражения по t, получим $f_1(t)*f_2'(t)=$ $=f_1'(t)*f_2(t)$, где штрих означает дифференцирование. В общем случае

$$\begin{aligned} f_1(t)*f_2^{(k)}(t)&=f_1^{(k)}(t)*f_2(t),\\ f_1(t)*f_2^{(-k)}(t)&=f_1^{(-k)}(t)*f_2(t), \end{aligned} \qquad (1.6.10)$$

где индексы (k) и $(-k)$ означают соответственно производную и интеграл [5]. Ниже дается подробная запись первого из этих двух выражений:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda)\,f_2^{(k)}(t-\lambda)\,d\lambda=\int_{-\infty}^{\infty} f_1^{(k)}(\lambda)\,f_2(t-\lambda)\,d\lambda, \qquad (1.6.11)$$

где

$$f_1^{(k)}(\lambda)=\frac{d^k}{d\lambda^k}f_1(\lambda),$$

$$f_2^{(k)}(t-\lambda)=\frac{d^k}{d\,(t-\lambda)^k}f_2(t-\lambda).$$

На основе уравнения (1.6.11) при $k=1$, а также учитывая, что $h(t)=dr/dt$, можно получить уравнения (1.6.3) и (1.6.5) соответственно из (1.6.2) и (1.6.4). Уравнение (1.6.11) может оказаться полезным при непосредственном вычислении интегралов свертывания как аналитически, так и графически или с использованием вычислительной техники [5]. Его можно использовать также для обобщения стробирующего свойства мгновенных импульсов (1.5.4) на специальные функции высоких порядков. Считая $f_2(t)=U_0(t)$, на основе (1.6.11) и (1.5.4) получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda)\, U_k(t-\lambda)\, d\lambda = \frac{d^k f_1(t)}{dt^k} \quad \text{при} \quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \qquad (1.6.12)$$

Модификация уравнения (1.6.11) используется в § 2.8 при рассмотрении связи дифференциального уравнения системы с ее импульсной характеристикой. Отметим, что

$$\frac{d}{d\lambda}[f_2(t-\lambda)] = \frac{df_2(t-\lambda)}{d(t-\lambda)}\,\frac{d(t-\lambda)}{d\lambda} = (-1)\,\frac{df_2(t-\lambda)}{d(t-\lambda)}.$$

Функции v и h приведены на рис. 1.6.4. $v(t-\tau)$ означает входной сигнал, отстающий на τ секунд от текущего времени t.

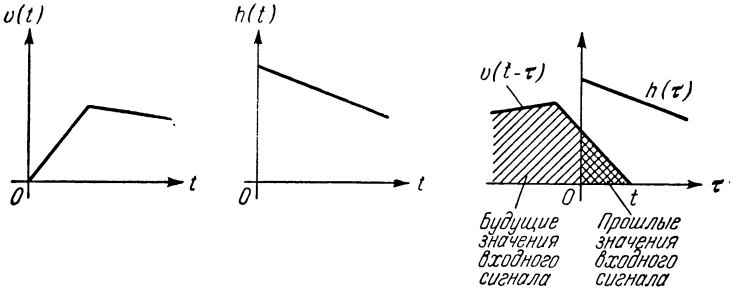


Рис. 1.6.4.

Поэтому, как показано на рисунке, $\tau=0$ соответствует «настоящему», $\tau>0$ «прошедшему», а $\tau<0$ — «будущему» времени.

В общем случае

$$\frac{d^k}{d\lambda^k}[f_2(t-\lambda)] = (-1)^k\,\frac{d^k f_2(t-\lambda)}{d(t-\lambda)^k}.$$

Тогда уравнение (1.6.11) можно записать в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda)\left[\frac{d^k}{d\lambda^k} f_2(t-\lambda)\right] d\lambda = (-1)^k \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{d^k}{d\lambda^k} f_1(\lambda)\right][f_2(t-\lambda)]\, d\lambda. \qquad (1.6.13)$$

В частном случае при $f_2(t) = U_0(t)$ оно сводится к

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda)\left[\frac{d^k}{d\lambda^k} U_0(t-\lambda)\right] d\lambda = (-1)^k \frac{d^k f_1(t)}{dt^k}. \qquad (1.6.14)$$

§ 1.7. Интегралы совмещения для нестационарных систем

Формулы § 1.5 справедливы для всех линейных систем как стационарных, так и нестационарных. Формулы § 1.6 основаны на выражении (1.6.1), которое справедливо только для стационарных систем. Получим аналогичные результаты и для нестационарных систем.

Из уравнения (1.6.1) следует, что для стационарных систем импульсная и временная характеристики зависят только от τ, т. е. времени, прошедшего с момента приложения мгновенного импульса или скачка. Для нестационарных систем указанные функции зависят от двух переменных, в качестве которых можно выбрать текущее время t и момент приложения специальной функции λ или текущее время t и «прошедшее» время τ.

Необходимо четко уяснить, какая пара переменных используется. Таким образом, $h(t, \beta)$ можно трактовать как реакцию в момент времени t на импульс, приложенный в момент β или в момент $t-\beta$.

В связи с тем, что в литературе встречаются обе трактовки это приводит к некоторой путанице. В данной книге $h(t, \beta)$ всегда употребляется в соответствии с первой трактовкой. При необходимости рассмотрения второй интерпретации используется символ $h_*(t, \beta)$*). В частности

$$\left.\begin{array}{l} h(t, \lambda) \text{ — реакция в момент времени } t \text{ на единичный импульс, приложенный в момент времени } \lambda; \\ h_*(t, \tau) = h(t, t, t-\tau) \text{ — реакция в момент времени } t \text{ на единичный импульс, приложенный на } \tau \text{ секунд раньше (в момент } t-\tau); \\ r(t, \lambda) \text{ — реакция в момент времени } t \text{ на единичный скачок, приложенный в момент времени } \lambda; \\ r_*(t, \lambda) = r(t, t-\tau) \text{ — реакция в момент времени } t \text{ на единичный скачок, приложенный на } \tau \text{ секунд раньше (в момент } t-\tau). \end{array}\right\} \qquad (1.7.1)$$

*) Приведенная символика не является общепринятой. В литературе, как правило, надлежащая интерпретация должна определяться из контекста, содержащего данный символ.

Первую часть таблицы 1.7.1 занимают выражения, полученные на основе уравнений (1.5.5)—(1.5.8). Вторая ее часть образована путем введения переменной $\tau = t - \lambda$. Функции $h(t, \lambda)$ и

Таблица 1.7.1

Основное уравнение	Упрощение для системы без упреждения	Упрощение в случае $v = 0$ при $t < 0$	Номер уравнения
$y(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} v(\lambda)\, h(t, \lambda)\, d\lambda$	Верхний предел равен t	Нижний предел равен нулю	(1.7.2)
$y(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} v(\lambda)\, h_*(t, t-\lambda)\, d\lambda$			
$y(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dv(\lambda)}{d\lambda}\, r(t, \lambda)\, d\lambda$			(1.7.3)
$y(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dv(\lambda)}{d\lambda}\, r_*(t, t-\lambda)\, d\lambda$			
$y(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} v(t-\tau)\, h(t, t-\tau)\, d\tau$	Верхний предел равен t	Нижний предел равен нулю	(1.7.4)
$y(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} v(t-\tau)\, h_*(t, \tau)\, d\tau$			
$y(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dv(t-\tau)}{d(t-\tau)}\, r(t, t-\tau)\, d\tau$			(1.7.5)
$y(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dv(t-\tau)}{d(t-\tau)}\, r_*(t, \tau)\, d\tau$			

$r(t, \lambda)$ наиболее часто употребляются в уравнениях (1.7.2) и (1.7.3), тогда как использование $h_*(t, \tau)$, $r_*(t, \tau)$ в уравнениях (1.7.4) и (1.7.5) приводит к более компактным выражениям. Так как понятие интеграл свертывания применим к формулам

типа приведенных в таблице 1.6.1, уравнения в таблице 1.7.1 обычно называются интегралами совмещения.

Таблица 1.6.1 для стационарных систем может, естественно, рассматриваться как частный случай таблицы 1.7.1. Для стационарных систем $h(t, \lambda)$ сводится к $h(t-\lambda)$, а $h_*(t, \tau)$ к $h(\tau)$.

$h_*(t, \tau)$ может трактоваться как весовая функция для нестационарных систем, в точности соответствуя весовой функции $h(\tau)$ для стационарных систем. Графическая интерпретация интегралов свертывания может быть также распространена в общем случае на интегралы совмещения. Рассмотрение, связанное с рис. 1.6.4, применимо для систем с переменными параметрами, если $h(\tau)$ заменить $h_*(t, \tau)$. Чтобы определить

$$y(t) = \int_0^t v(t-\tau)\, h_*(t, \tau)\, d\tau,$$

нужно «перегнуть» график $v(t)$ относительно вертикальной оси, сместить ее на расстояние t, чтобы образовать $v(t-\tau)$ как функцию τ. Далее следует умножить результирующую кривую на $h_*(t, \tau)$ и вычислить площадь, ограниченную полученной кривой. Единственное отличие от процедуры вычислений для систем с постоянными параметрами состоит в том, что, поскольку $h_*(t, \tau)$ является функцией времени, то для каждого рассматриваемого значения t необходимо использовать различные кривые $h_*(t, \tau)$. При рассмотрении $h_*(t, \tau)$ как функции τ и фиксированном t полезным оказывается описываемый в пятой главе аппарат сопряженных функций.

Уравнения (1.6.9) и (1.6.11) являются тождествами и могут использоваться, если подынтегральные выражения приведены к стандартной форме, а именно: одна из функций должна быть явной функцией λ, а другая — явной функцией $t-\lambda$, где t рассматривается как параметр.

Начнем с уравнения (1.7.5):

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv(t-\tau)}{d(t-\tau)}\, r_*(t, \tau)\, d\tau.$$

Из уравнения (1.6.11) следует

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t-\tau) \frac{d}{d\tau} [r_*(t, \tau)]\, d\tau.$$

Сравнение данного выражения с уравнением (1.7.4) позволяет заключить, что

$$h_*(t, \tau) = \frac{d}{d\tau}[r_*(t, \tau)],$$
$$r_*(t, \tau) = \int_{-\infty}^{\tau} h_*(t, \sigma)\, d\sigma, \tag{1.7.6}$$

где для систем без упреждения нижний предел равен нулю. Соответственно

$$h(t, \lambda) = -\frac{d}{d\lambda}[r(t, \lambda)],$$
$$r(t, \lambda) = \int_{\lambda}^{\infty} h(t, \sigma)\, d\sigma, \tag{1.7.7}$$

где для систем без упреждения верхний предел равен t. Уравнение (1.7.7) соответствует уравнениям (1.7.2) и (1.7.3). Читателю необходимо, однако, напомнить, что из замены входного сигнала нестационарной системы $v(t)$ сигналом $dv(t)/dt$ не следует равенства выходного сигнала величине $dy(t)/dt$. (См. примеры 1.2.3 и 1.2.6.)

Пример 1.7.1. При импульсной характеристике, равной $h(t, \lambda) = \frac{t-\lambda}{t^2}$, $\lambda \leqslant t$, определить реакцию линейной системы на воздействие $v(t) = (te^{-t})U_1(t)$.

На основе уравнения (1.7.2)

$$y(t) = \int_0^t (\lambda e^{-\lambda})\left(\frac{t-\lambda}{t^2}\right) d\lambda = \frac{1}{t}\left[\left(1 - \frac{2}{t}\right) + \left(1 + \frac{2}{t}\right)e^{-t}\right].$$

Нахождение импульсной характеристики нестационарной системы может встретить определенные трудности. В § 2.8 показано, что данная импульсная характеристика соответствует дифференциальному уравнению

$$t^2 \frac{d^2y}{dt^2} + 4t\frac{dy}{dt} + 2y = v(t).$$

Эта же задача решается в примере 3.9.3 на основе преобразования Лапласа.

§ 1.8. Разложение дискретных сигналов в ряды по элементарным функциям

В настоящей книге расматриваются лишь дискретные сигналы, определенные в равноотстоящие моменты времени, обозначаемые через $t = t_0 + kT$.

В данной главе k — коэффициент, принимающий только целые значения, T — промежуток времени между последовательными моментами. Так как t_0 принимает произвольные значения,

за начало отсчета времени можно выбрать (и это делается на протяжении всей книги) $t_0 = 0$. Можно также выбрать масштаб времени таким образом, чтобы $T = 1$. Последнее характерно для

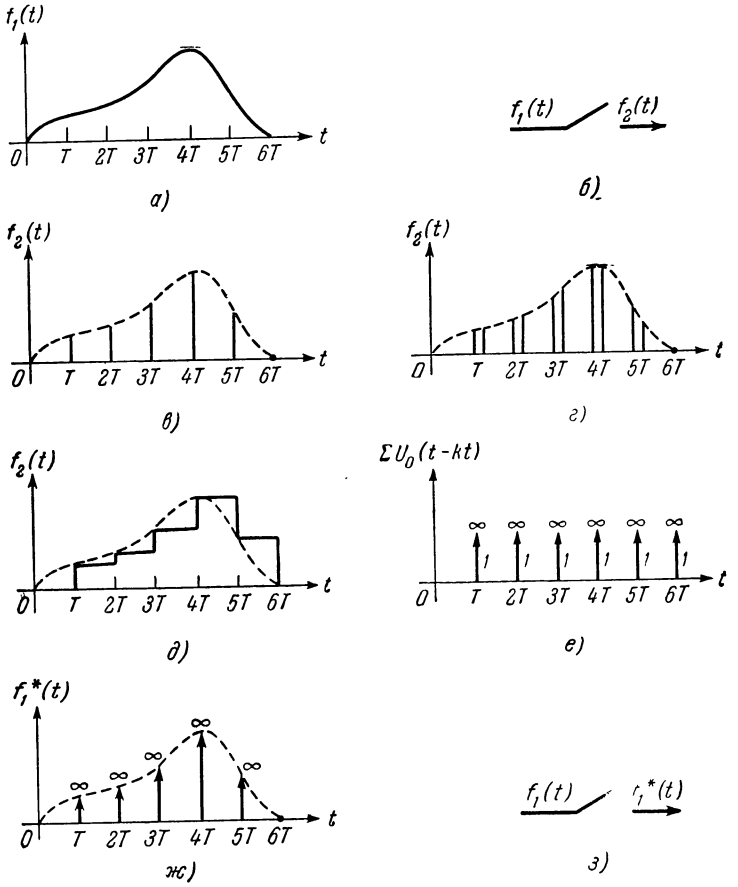


Рис. 1.8.1.

§§ 2.9—2.12; однако в настоящей главе мы к этому не прибегаем.

Дискретный сигнал, состоящий из конечной последовательности, может «существовать естественно», например, в цифровой вычислительной машине или возникать в результате квантования по времени непрерывной функции, как показано на рис. 1.2.2, *в* и 1.8.1, *в*. Если предположить, что идеальный ключ на рис. 1.8.1, *б* коммутируется периодически каждые T секунд

в течение бесконечно малого промежутка времени, то $f_2(t)$ отлична от нуля лишь в моменты квантования. Используя единичную дельта-функцию

$$\delta(t-kT)=\begin{cases}1 & \text{при} \quad t=kT,\\ 0 & \text{при} \quad t\neq kT,\end{cases} \tag{1.8.1}$$

можно представить сигнал $f_2(t)$, изображенный на рис. 1.8.1, *в*, в виде

$$f_2(t)=f_1(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f_1(kT)\,\delta(t-kT). \tag{1.8.2}$$

Рассмотрим реальный случай, когда «идеальный» ключ на рис. 1.8.1, *б* остается включенным ΔT секунд. Сигнал $f_2(t)$ на рис. 1.8.1 является непрерывным и его можно аппроксимировать дискретным сигналом. Как показано в §§ 1.4, 1.5, узкий прямоугольный импульс аппроксимируется мгновенным импульсом равной площади, при условии, что постоянные времени системы, на которую воздействует импульс, гораздо больше ширины поступающего импульса. Сигнал на рис. 1.8.1, *г* можно приближенно представить в виде

$$f_2(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}[f_1(kT)\,\Delta t]\,U_0(t-kT). \tag{1.8.3}$$

Заметим, что при $\Delta T=T$ уравнение (1.8.3) описывает кусочно-постоянную функцию, показанную на рис. 1.8.1, *д*. На практике такую функцию можно сформировать при помощи последовательного включения импульсного элемента и фиксирующего устройства нулевого порядка. Указанный способ может использоваться для приближенного представления первоначального сигнала по заданному дискретному сигналу. Уравнение (1.8.3) тогда по сути дела идентично уравнению (1.5.3).

Масштаб времени в уравнении (1.8.3) можно выбрать так, чтобы $\Delta T=1$, или же постоянный множитель при ΔT можно было отнести к коэффициенту усиления системы, на которую сигнал воздействует. В любом случае ΔT исчезает из уравнения (1.8.3), и сигнал на рис. 1.8.1, *г* можно приближенно заменить сигналом на рис. 1.8.1, *ж*, который в свою очередь имеет вид

$$f_2(t)=f_1^*(t)=f_1(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}U_0(t-kT)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f_1(kT)\,U_0(t-kT), \tag{1.8.4}$$

где $\sum_{k=-\infty}^{\infty}U_0(t-kT)$ означает последовательность мгновенных импульсов, показанную на рис. 1.8.1, *е*.

Уравнение (1.8.4) описывает идеальный импульсный ключ, изображенный на рис. 1.8.1, *з*.) Подобный элемент модулирует входной сигнал последовательностью единичных мгновенных импульсов, формируя дискретный выходной сигнал, состоящий из мгновенных импульсов переменной площади. Описанное импульсное устройство встречается во всех книгах по импульсным системам автоматического управления и используется в последующих главах данной книги. Оценку точности аппроксимации на рис. 1.8.1, *г* — 1,8.1, *ж* лучше всего проводить на основе методов преобразований (Лапласа, z-преобразования и т. д.), как это сделано в [6].

Следует отметить, что все рассматриваемые в этом параграфе идеальные ключи являются линейными нестационарными звеньями.

§ 1.9. Суммы совмещения для дискретных систем

Если на вход предварительно невозбужденной линейной системы поступает дискретный сигнал, представленный уравнениями (1.8.2) или (1.8.4), то выходной сигнал можно определить на основе суперпозиции. В настоящем параграфе предполагается, что импульсный элемент, формирующий дискретный входной сигнал, не является частью рассматриваемой системы, вся информация о которой ограничивается знанием ее реакции на единичную дельта-функцию или импульсную функцию.

Стационарные системы. Реакция стационарной системы зависит только от времени, прошедшего с момента приложения входного сигнала. Пусть $h(t)$ и $d(t)$ означают соответственно реакции на единичный мгновенный импульс и дельта-функцию, приложенные в момент $t=0$. Тогда реакции на $U_0(t-kT)$ или $\delta(t-kT)$ равны соответственно $h(t-kT)$ или $d(t-kT)$.

Для *непрерывных* систем реакция на дельта-функцию $d(t)$ тождественно равна нулю, за исключением тривиальных случаев. Произвольный входной сигнал, для которого $\int_{-\infty}^{\infty} |v(t)|\,dt=0$, не вносит в систему дополнительной энергии и, следовательно, не может вызвать изменение ее выходной величины. В *дискретных* системах, к примеру, в цифровом вычислительном устройстве, ограниченный дискретный входной сигнал преобразуется в ограниченный дискретный выходной сигнал. При этом $d(t)$ определяется только в моменты времени $t=t_0+nT$, где n — целое число. Величина t_0 учитывает возможное запаздывание выходной последовательности относительно входной. Так как основное внимание в данной главе уделяется форме выходного

Таблица 1.9.1

Вход	Выход	Упрощение для системы без упреждения	Упрощение, если входной сигнал равен нулю при $t < 0$	Номер уравнения
$v(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(kT)\,\delta(t-kT)$	$y(nT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(kT)\,d(nT-kT)$	Верхний предел равен $k=n$	Нижний предел равен нулю	(1.9.1)
	$y(nT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(nT-kT)\,d(kT)$	Нижний предел равен нулю	Верхний предел равен $k=n$	(1.9.2)
$v^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(kT)\,U_0(t-kT)$	$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(kT)\,h(t-kT)$	Верхний предел равен $kT=t$	Нижний предел равен нулю	(1.9.3)
	Такое же как (1.9.3)	Такое же, как (1.9.3)		(1.9.4)
$v^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(kT)\,U_0(t-kT)$	$y(nT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(kT)\,h(nT-kT)$	Верхний предел равен $k=n$	Нижний предел равен нулю	(1.9.5)
	$y(nT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(nT-kT)\,h(kT)$	Нижний предел равен нулю	Верхний предел равен $k=n$	(1.9.6)

сигнала, то в дальнейшем t_0 не учитываем, а реакцию на дельта-функцию записываем как $d(nT)$. Для системы без упреждения $d(nT)=0$ при $n<0$. На основе суперпозиции реакция дискретной системы на сигнал, заданный уравнением (1.8.2), описывается уравнением (1.9.1) в таблице 1.9.1. Уравнение (1.9.2) получается заменой фиктивной переменной k на $n-k$. Отметим, что эти уравнения описывают выходной сигнал в дискретные моменты времени. Для систем без упреждения и $v(t)=0$ при $t<0$ пределы суммирования в уравнениях становятся равными 0 и n, хотя не окажется ошибочным использование более широких пределов $-\infty$ и $+\infty$.

Рассмотрим непрерывную систему, входной сигнал которой описывается уравнением (1.8.4), а выходом служит непрерывная функция, задаваемая уравнениями (1.9.3) или (1.9.4). Упрощение «верхний предел равен $kT=t$» для систем без упреждения и входных сигналов, равных нулю при $t<0$, строго говоря, справедливо для моментов t, кратных T.

Суммирование происходит лишь по дискретным значениям k. Для момента $t=(n+\gamma)T$, где n — целое число и $0<\gamma<1$, приведенное выше выражение следует понимать как $k=n$. Уравнения (1.9.3) и (1.9.4) дают точное выражение для выходного сигнала непрерывной системы в виде последовательности «взвешенных» мгновенных импульсов. В тех случаях, когда входной сигнал приближенно описывает выход реального импульсного элемента, эти уравнения также являются приближенными. Точность аппроксимации зависит от соотношения ширины прямоугольного импульса импульсного элемента и постоянных времени системы.

Если нас интересуют значения выходной величины непрерывной системы в моменты времени t, кратные T, уравнения (1.9.3) и (1.9.4) сводятся соответственно к уравнениям (1.9.5) и (1.9.6). Последние уравнения используются, например, когда выход системы воздействует на другой импульсный элемент. Для систем с упреждением и $v(t)=0$ при $t<0$ пределы суммирования, как и ранее, равны 0 и n. Несомненно, читатель заметил сходство таблиц 1.6.1 и 1.9.1. Действительно, уравнения (1.9.3) — (1.9.6) можно трактовать как частные случаи уравнений (1.6.2) и (1.6.4).

Уравнения (1.9.1) и (1.9.2) тождественны соответственно уравнениям (1.9.5) и (1.9.6), если не учитывать различные обозначения в них. Поучительно сравнить дискретную и непрерывную системы, показанные на рис. 1.9.1. Соотношение между $y(t)$ и $v(t)$ на рис. 1.9.1, *б* в моменты времени, кратные T, точно такое же, как соотношение между $y(nT)$ и $v(kT)$ на рис. 1.9.1, *а* при условии $h(kT)=d(kT)$. Во второй главе показывается, что ди-

скретная система может быть описана разностным уравнением, а потому может иметь вид рис. 1.9.1, б, при условии, что выходной сигнал рассматривается только в моменты времени $t=nT$.

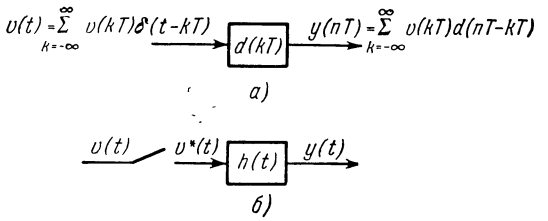


Рис. 1.9.1.

Разностные уравнения можно решать классически, как это указано во второй главе, или на основе z-преобразования, описываемого в третьей главе.

Пример 1.9.1. На рис. 1.9.1, *а* $T=1$,

$$d(k)=\begin{cases} 2^k & \text{при} \quad k\geqslant 1, \\ 0 & \text{при} \quad k\leqslant 0, \end{cases}$$

а входной сигнал равен

$$v(k)=\begin{cases} k & \text{при} \quad k\geqslant 0, \\ 0 & \text{при} \quad k<0. \end{cases}$$

Найдем выражение для дискретного выходного сигнала $y(n)$. Используя уравнение (1.9.2), имеем

$$y(n)=\sum_{k=0}^{n}(n-k)\,2^k \quad \text{при} \quad n\geqslant 1.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} &y(n)=0 \quad \text{при} \quad n\leqslant 1, \\ &y(2)=2, \\ &y(3)=8, \\ &y(4)=22, \\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

Вычисление $y(n)$ при больших n можно значительно упростить, преобразуя данное выражение (это требует определенных усилий) к виду

$$\sum_{k=1}^{n}(n-k)\,2^k=2\,[2^n-n-1].$$

Как показано в 2.12.6, реакция на дельта-функцию $d(k)$ в приведенном примере соответствует системе, описываемой разностным уравнением

$$y(k+2)-3y(k+1)+2y(k)=2v(k+1)-2v(k).$$

Один из недостатков сумм совмещения, данных в таблице 1.9.1, состоит в том, что в этом случае трудно, а порой и невозможно, получить результат в замкнутой форме. Как показано в примере 3.13.2, подобный результат легко получить, решая данную задачу при помощи z-преобразования.

Пример 1.9.2. На рис. 1.9.1, *б* $T = 1$,

$$h(t) = \begin{cases} 2^t & \text{при} \quad t \geqslant 1, \\ 0 & \text{при} \quad t \leqslant 0 \end{cases}$$

и

$$v(t) = tU_{-1}(t).$$

Тогда в моменты времени $t = n$ выходной сигнал равен

$$y(n) = 2[2^n - n - 1] \quad \text{при} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Пример 1.9.3. На рис. 1.9.2, *а* показано последовательное соединение импульсного элемента и двух идентичных систем с импульсными характеристиками

$$h(t) = te^{-t} \quad \text{при} \quad t > 0.$$

Предполагая, что вторая система не воздействует на первую, а также, что

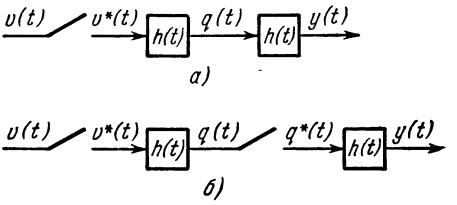


Рис. 1.9.2.

период повторения импульсного элемента равен T, определим выходной сигнал $y(t)$ при

$$v(t) = e^{-t}U_{-1}(t).$$

Из примера 1.6.2 следует, что импульсная характеристика последовательного соединения двух систем равна $t^3e^{-t}/6$. На основе уравнения (1.9.3)

$$y(t) = \sum_{k=0}^{t} e^{-k} \frac{(t-k)^3 e^{-(t-k)}}{6} = \frac{e^{-t}}{6} \sum_{k=0}^{t} (t-k)^3 \quad \text{при} \quad t > 0.$$

Тогда

$$y(t) = t^3e^{-t}/6 \qquad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$
$$y(t) = [t^3 + (t-1)^3]\, e^{-t}/6 \quad \text{при} \quad 1 \leqslant t \leqslant 2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Пример 1.9.4. Повторим предыдущий пример, включив дополнительно импульсный элемент, как показано на рис. 1 9.2, *б*

$$q(t) = \sum_{k=0}^{t} e^{-k}(t-k)\, e^{-(t-k)} = e^{-t} \sum_{k=0}^{t} (t-k),$$

$$y(t) = \sum_{m=0}^{t} \left[e^{-m} \sum_{k=0}^{m} (m-k) \right] (t-m)\, e^{-(t-m)}.$$

В данном случае затруднительно получить выражение для $y(t)$ в замкнутой форме. Ограничимся пока такой записью:

$$\begin{array}{lll} y(t) = 0 & \text{при} & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ y(t) = e^{-t}(t-1) & \text{при} & 1 \leqslant t \leqslant 2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & \end{array}$$

Следует отметить, что результаты последних двух примеров не совпадают, отличаются даже в моменты квантования $t = n$. В замкнутой форме выражение для $y(t)$ легко получается на основе модифицированного z-преобразования в примере 3.14.1.

Графическая интерпретация сумм свертывания. Уравнения таблицы 1.9.1 известны как суммы совмещения или суммы свертывания. Их графическая трактовка подобна приведенной в § 1.6 для интегралов свертывания. Графически решение уравнения (1.9.3) проводится путем «перегиба» $h(t)$ относительно вертикальной оси, перемещения на расстояние t в график дискретного сигнала $v(kT)$ и затем суммирования всех дискретных значений результирующей кривой (вместо вычисления площади, ограниченной результирующей кривой). Однако для сумм свертывания графическое решение, по сути дела, совпадает с аналитическим и поэтому применятся редко. Интерпретация же $h(t-kT)$ как весовой функции может оказаться полезной.

Нестационарные системы. Уравнения в таблице 1.9.1 справедливы лишь для линейных систем с постоянными параметрами и идеальных импульсных элементов. Распространение полученных результатов на нестационарную систему основывается на рассуждениях, приведенных в § 1.7.

Обозначим:

$d(nT, kT)$ — реакция в момент времени nT на $\delta(t-kT)$,

$d_*(nT, kT)$ — реакция в момент времени nT на единичную дельта-функцию, приложенную на kT секунд раньше (в момент $(n-k)T$),

$h(t, kT)$ — реакция в момент времени t на $U_0(t-kT)$,

$h_*(t, kT)$ — реакция в момент времени t на единичный мгновенный импульс, приложенный на kT секунд раньше (в момент $(t-kT)$).

Таблица 1.9.2

Вход	Выход	Упрощение для системы без упреждения	Упрощение, если входной сигнал равен нулю при $t < 0$	Номер уравнения
$v(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(kT)\,\delta(t-kT)$	$y(nT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(kT)\,d(nT, kT)$	Верхний предел равен $k=n$	Нижний предел равен нулю	(1.9.7)
	$y(nT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(nT-kT)\,d_*(nT, kT)$	Нижний предел равен нулю	Верхний предел равен $k=n$	(1.9.8)
$v^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(kT)\,U_0(t-kT)$	$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(kT)\,h(t, kT)$	Верхний предел равен $kT=t$	Нижний предел равен нулю	(1.9.9)
	$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(kT)\,h_*(t, t-kT)$	Такое же, как (1.9.9)		(1.9.10)
$v^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(kT)\,U_0(t-kT)$	$y(nT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(kT)\,h(nT\ \ kT)$	Верхний предел равен $k=n$	Нижний предел равен нулю	(1.9.11)
	$y(nT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(nT-kT)\,h_*(nT, kT)$	Нижний предел равен нулю	Верхний предел равен $k=n$	(1.9.12)

При введенных обозначениях уравнения таблицы 1.9.1 заменяются соответствующими системами с переменными параметрами в таблице 1.9.2. Возможна также трактовка $h_*(t, T)$ как весовой функции.

Задачи

1.1. При каких условиях дифференциальное уравнение

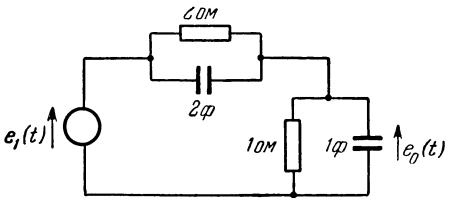
$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m v}{dt^m} + \ldots + b_1 \frac{dv}{dt} + b_0 v$$

описывает линейную систему? стационарную систему?

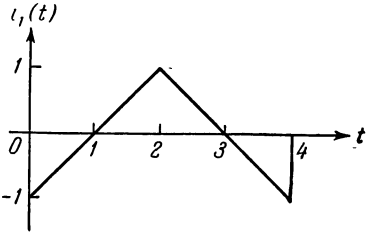
1.2. Предположим, что две различные линейные системы соединены последовательно, как это показано на рис. 1.2.1. Определить, влияет ли порядок соединения систем на взаимосвязь между $y(t)$ и $v(t)$ при условии, что системы стационарные и последующая не оказывает воздействия на предыдущую? Проделать то же для нестационарных систем. Пояснить результат.

1.3. Показать, что $\lim\limits_{\Delta \to 0} f_0(t) = U_0(t)$, где $f_0(t)$ — функция на рис. 1.4.7, *а*.

1.4. Определить временну́ю характеристику цепи на рисунке.



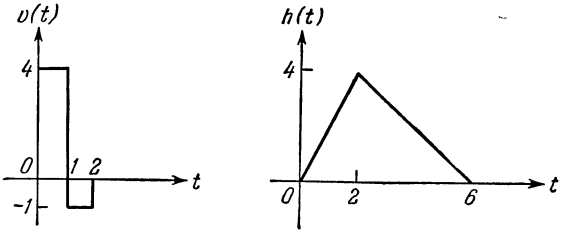
К задаче 1.4.



К задаче 1.5.

1.5. Определить реакцию для цепи на рис. 1.4.8 при «волнообразном» сигнале источника тока (см. рисунок), а также при $i_1(t) = 3e^{-t}$, $t \geqslant 0$.

1.6. Проверить результаты примера 1.6.1, представив сигнал источника напряжения в виде суммы двух специальных функций и определяя реакцию на каждую из них.



К задаче 1.7.

1.7. Определить аналитически и графически реакцию линейной стационарной предварительно невозбужденной системы (импульсная характеристика и действующий на систему входной сигнал показаны на рисунке) в момент времени $t = 4$ секунды. Построить приближенно кривую $y(t)$.

1.8. Взаимно корреляционные функции

$$\varphi_{12}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t+\tau)\, d\tau,$$

$$\varphi_{21}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\tau) f_1(t+\tau)\, d\tau$$

играют важную роль в анализе систем при непериодических входных сигналах.

Доказать: $\varphi_{21}(t) = \varphi_{12}(-t)$. Определить и построить $\varphi_{12}(t)$ при

$$f_1(t) = (t-1)\, U_{-1}(t-1) - (t-1)\, U_{-1}(t-2)$$

и

$$f_2(t) = 2e^{-t} U_{-1}(t).$$

1.9. Доказать справедливость уравнения (1.6.10).

1.10. Вывести уравнение (1.7.7), положив в уравнении (1.7.2) $v(t) = U_{-1}(t-\tau)$ и $y(t) = r(t, \tau)$. Затем получить уравнение (1.7.6), используя подстановку $\lambda = t - \tau$.

1.11. Система описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$(t+1)\frac{dy}{dt} + y = (t+1)\, v(t).$$

Учитывая, что левая часть этого уравнения равна производной от $(t+1)y$, определить $h(t, \lambda)$, $h_*(t, \tau)$, $r(t, \lambda)$ и $r_*(t, \tau)$. Вычислить реакцию на сигнал $v(t) = e^{-t} U_{-1}(t)$.

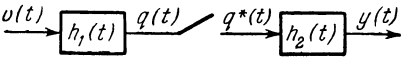
1.12. Подобное исследование провести для дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dt} + \frac{y}{t+1} = \frac{dv}{dt} + v.$$

1.13. Импульсные характеристики двух последовательно соединенных звеньев N_1 и N_2 (рис. 1.2.1) обозначены соответственно через $h_1(t, \lambda)$ и $h_2(t, \lambda)$. Получить выражения для импульсной характеристики последовательного соединения этих звеньев.

1.14. Определить импульсную и временну́ю характеристики для последовательного соединения трех линейных звеньев, предполагая, что первое из них — идеальный интегратор, третье — идеальный дифференциатор, а импульсная характеристика второго равна $h_*(t, \tau) = te^{-(\tau+t)}$ при $\tau > 0$.

1.15. На рисунке $h_1(t) = (t-1)\, e^{-t} U_{-1}(t)$ и $h_2(t) = e^{-t}\,[\cos(\pi/2)\, t - \sin(\pi/2)\, t]\, U_{-1}(t) = \sqrt{2}\, e^{-t} \cos[(\pi/2)\, t + (\pi/4)]\, U_{-1}(t)$. Период замыкания импульсного ключа $T = 1$ *сек*. Определить $y(nT)$ при $v(t) = U_{-1}(t)$.



К задаче 1.15.

1.16. Импульсный ключ включен также перед звеном $h_1(t)$ (см. рис. к задаче 1.15). Ключи работают синхронно с периодом $T = 1$ *сек*, $h_1(t) = (1/2)^t$, $h_2(t) = 2\cos(\pi/3)t$ при $t \geqslant 0$. Определить $y(nT)$ при $v(t) = U_{-2}(t)$, а также при $v(t) = \sin(\pi/3)t$.

1.17. Для задачи 1.15 определить $y(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant 3$.

1.18. В заданной системе автоматического управления входной сигнал $v(t)$ квантуется в моменты $t=nT$ $(e^{-T}={}^1/_2,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$. Реакция на $v(t)=$ $=U_{-1}(t)$ равна $y(t)=(e^{-\gamma T}/6)\,[1-e^{-nT}]$, где $t=(n+\gamma)\,T$, $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$. Определить и построить $y(t)$ для $0 \leqslant t \leqslant 2T$ при $v(t)=e^{-2t}U_{-1}(t)$.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. C. E. Shannon, Communication in the Presence of Noise, Proc. IRE, Vol. 37, January 1949, стр. 11.
2. L. Schwartz, Théorie des Distributions, Hermann et Cie., Paris, 1950—1951.
3. P. W. Ketchum and R. Aboudi, Schwartz Distributions, Second Midwest Symposium on Circuit Theory, 1956.
4. L. B. Arguimbau, Vacuum-Tube Circuits, John Wiley and Sons, New York, 1948, стр. 161.
5. R. E. Scott, Linear Circuits, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass., 1960, Section 13—5.
6. Э. Джури, Импульсные системы автоматического регулирования, Физматгиз, 1963, глава 9.

ГЛАВА 2

КЛАССИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

§ 2.1. Введение

Классическим методом описания линейной системы считается записанная при помощи дифференциального или разностного уравнения связь между ее входом и выходом. Дифференциальное уравнение применяется для описания непрерывных систем, а уравнение в конечных разностях — для дискретных систем. Так как непрерывная система в исходном виде может описываться системой дифференциальных уравнений, то в § 2.3 рассматривается сведéние системы уравнений к одному требуемому дифференциальному уравнению.

В § 2.5 описывается детально разработанный метод решения системы дифференциальных уравнений (с постоянными и изменяющимися во времени коэффициентами) первого порядка. Для уравнений более высокого порядка общий метод решения детально разработан только для стационарных систем. Этот метод излагается в § 2.6, уравнения же высокого порядка для нестационарных систем разбираются в следующем параграфе. § 2.8 связан с материалом первой и второй глав. В нем рассматриваются методы нахождения импульсной характеристики систем с постоянными и переменными параметрами на основе описывающих их дифференциальных уравнений.

Операции с разностными уравнениями излагаются в том же порядке, что и с дифференциальными уравнениями. Дополнительно включен лишь параграф о прямых и обратных разностных операторах. Материал главы ограничивается рассмотрением линейных систем. Приводятся только аналитические методы решения, хотя зачастую на практике целесообразнее использовать вычислительные методы [1].

§ 2.2. Представление непрерывных систем в виде дифференциальных уравнений

Непрерывную систему часто описывают дифференциальным уравнением *) относительно ее выхода $y(t)$ и входа $r(t)$. В общем

*) Следует уяснить, что описываемая уравнением система — без упреждения.

виде уравнение представляется так:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y =$$
$$= b_m \frac{d^m v}{dt^m} + \ldots + b_1 \frac{dv}{dt} + b_0 v. \quad (2.2.1)$$

Предполагая, что входной сигнал $v(t)$ известен, правую часть уравнения можно представить как $F(t)$, называемую часто вынуждающей функцией,

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = F(t). \quad (2.2.2)$$

Для линейных систем a_i и b_i не являются функциями v или y, но могут зависеть от времени t.

Для линейных систем с постоянными параметрами эти коэффициенты должны быть постоянными. Подтверждением сформулированных определений служат примеры типа 1.2.3 и 1.2.4.

Дифференциальное уравнение системы может быть задано или должно быть найдено на основе модели системы. В последнем случае модель дает непосредственно систему дифференциальных уравнений. Сведéние системы дифференциальных уравнений к одному уравнению, связывающему $y(t)$ и $v(t)$, разбирается на примере и обсуждается в следующем параграфе.

Оператор p, обозначающий часто операцию дифференцирования *), определяется как

$$p[v(t)] = \frac{d}{dt}[v(t)]. \quad (2.2.3)$$

Если c_1 и c_2 — постоянные величины, то

$$p^m(p^n v) = p^{m+n} v = \frac{d^{m+n} v}{dt^{m+n}},$$
$$p^m(c_1 v_1 + c_2 v_2) = c_1 p^m v_1 + c_2 p^m v_2, \quad (2.2.4)$$
$$(p + c_1)(p + c_2) v = [p^2 + (c_1 + c_2) p + c_1 c_2] v,$$

где m и n неотрицательные целые числа. Как правило, с оператором p можно оперировать как с алгебраическим числом. Существенным исключением является то, что он в общем случае некоммутативен с функциями

$$p(tv) \neq t(pv),$$
$$p(v_1 v_2) \neq v_1(pv_2).$$

*) Обычно дифференциальный оператор обозначают также через D. Однако в данной книге этот символ не встречается.

При помощи оператора p уравнения (2.2.1) и (2.2.2) приводятся к виду

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0)\, y(t) = \\ = (b_m p^m + \ldots + b_1 p + b_0)\, v(t) = F(t). \qquad (2.2.5)$$

Стоящие в скобках перед y и v элементы сами являются операторами. Для стационарных систем, коэффициенты которых постоянны, последнее выражение записывается символически как

$$A(p)\, y(t) = B(p)\, v(t) = F(t). \qquad (2.2.6)$$

Для линейных систем с переменными параметрами, коэффициенты которых являются функциями времени, A и B — зависящие от времени операторы. Это учитывается выражением

$$A(p,\ t)\, y(t) = B(p,\ t)\, v(t) = F(t). \qquad (2.2.7)$$

Формальное определение операторов A и B следует из сравнения последних трех выражений.

§ 2.3. Преобразование системы дифференциальных уравнений

Непрерывная модель может быть описана математически системой дифференциальных уравнений. Один класс уравнений служит главным образом для характеристики отдельных составляющих, а другой — для описания связей между этими составляющими. При математическом описании модели указанные два типа уравнений обычно сочетаются с экспериментальной проверкой. Полученная система уравнений может быть затем сведена к одному уравнению, связывающему вход и выход системы, хотя подобное преобразование не всегда элементарно. Решение системы уравнений с постоянными коэффициентами гораздо проще, чем системы уравнений с переменными коэффициентами, а потому рассматривается в первую очередь.

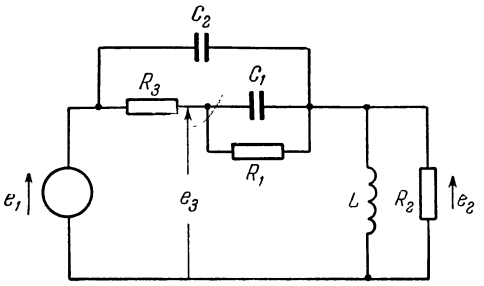


Рис. 2.3.1

Пример 2.3.1. Для цепи на рис. 2.3.1 запишем уравнение, связывающее напряжение на выходе e_2 с напряжением источника e_1.

Суммируя токи, выходящие соответственно из узлов 3 и 2, получим

$$\left[C_1 \frac{de_3}{dt} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3}\right) e_3\right] - \left[C_1 \frac{de_2}{dt} + \frac{1}{R_1} e_2\right] = \frac{1}{R_3} e_1$$

и

$$-\left[C_1\frac{de_3}{dt}+\frac{1}{R_1}e_3\right]+\left[(C_1+C_2)\frac{de_2}{dt}+\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)e_2+\frac{1}{L}\int e_2\,dt\right]=C_2\frac{de_1}{dt}.$$

Дифференцируя второе уравнение, чтобы избавиться от интеграла, и вводя оператор $p=d/dt$, приводим уравнения к виду

$$(p+2)\,e_3-(p+1)\,e_2=e_1,$$
$$-(p^2+p)\,e_3+(2p^2+2p+1)\,e_2=(p^2)\,e_1.$$

Предполагается, для простоты, что все сопротивления, емкости и индуктивности равны соответственно 1 ом, 1 фарада, 1 генри. Домножим каждый из членов первого уравнения на оператор p^2+p, а каждый из членов второго уравнения — на $p+2$ и сложим затем эти уравнения Поскольку

$$(p^2+p)\,(p+2)\,e_3=(p+2)\,(p^2+p)\,e_3,$$

то выражение, содержащее e_3, уничтожится. Тогда

$$(p+2)\,(2p^2+2p+1)\,e^2-(p^2+p)\,(p+1)\,e_2=[(p^2+p)+p^2(p+2)]e_1$$

или

$$(p^3+4p^2+4p+2)\,e_2=(p^3+3p^2+p)\,e_1,$$

что и является искомым результатом.

Процедура, используемая в данном примере, справедлива для любых двух дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Если L означает оператор, являющийся функцией только p, то уравнения можно символически записать как

$$\begin{aligned}L_{11}(p)\,y_1(t)+L_{12}(p)\,y_2(t)&=F_1(t),\\ L_{21}(p)\,y_1(t)+L_{22}(p)\,y_2(t)&=F_2(t),\end{aligned}\qquad(2.3.1)$$

Умножим первое уравнение на L_{21}, а второе на L_{11} и вычтем одно из другого. Так как $L_{21}L_{11}y_1=L_{11}L_{21}y_1$, то

$$(L_{11}L_{22}-L_{21}L_{12})\,y_2=L_{21}F_1+L_{11}F_2.\qquad(2.3.2)$$

Аналогично,

$$(L_{11}L_{22}-L_{21}L_{12})\,y_1=L_{22}F_1-L_{12}F_2.\qquad(2.3.3)$$

Каждое из последних двух уравнений содержит лишь одну независимую переменную, и его можно решить на основе методов § 2.6.

Рассмотрим теперь общий случай системы n дифференциальных уравнений. Символически

$$\begin{aligned}L_{11}y_1+L_{12}y_2+\ \ldots\ +L_{1n}y_n&=F_1(t),\\ L_{21}y_1+L_{22}y_2+\ \ldots\ +L_{2n}y_n&=F_2(t),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ L_{n1}y_1+L_{n2}y_2+\ \ldots\ +L_{nn}y_n&=F_n(t),\end{aligned}\qquad(2.3.4)$$

Так как операторы L_{ij} зависят только от p, то можно показать, что решение можно получить, используя правило Крамера *)

$$\Delta(p)\, y_i = \sum_{k=1}^{n} \Delta_{ki}(p)\, F_k(t), \tag{2.3.5}$$

где $\Delta(p)$ — дифференциальный оператор, определяемый определителем

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & \dots & L_{1n} \\ L_{21} & L_{22} & \dots & L_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ L_{n1} & L_{n2} & \dots & L_{nn} \end{vmatrix}. \tag{2.3.6}$$

$\Delta_{ik}(p)$ — оператор, определяемый ki-м алгебраическим дополнением, т. е. определителем $\Delta(p)$ с вычеркнутыми k-й строкой и i-м столбцом, умноженным на $(-1)^{k+i}$.

Изложенный материал ограничивался дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Получение дифференциального уравнения, связывающего вход и выход, для систем с переменными коэффициентами гораздо сложнее. Предположим, что система описывается уравнениями

$$t(py_1) + p(t^2 y_2) = F_1(t),$$
$$p(ty_1) + t(py_2) = F_2(t).$$

Чтобы исключить y_1 из этих уравнений, можно попытаться умножить первое из них на pt, а второе на tp и затем вычесть одно из другого. Если это выполнено, то

$$pt^2(py_1) + pt(pt^2 y_2) = ptF_1(t),$$
$$tp(pty_1) + tp(tpy_2) = tpF_2(t).$$

Однако $pt^2(py_1) = (t^2p^2 + 2tp)y_1$, а $tp(pty_1) = t(tp^2 + 2p)y_1$. Следовательно, исключить y_1 вычитанием нельзя.

Для систем с переменными параметрами уравнения (2.3.2) и (2.3.3) несправедливы, так как

$$L_{21}(p, t)\, L_{11}(p, t)\, y_1(t) \neq L_{11}(p, t)\, L_{21}(p, t)\, y_1(t).$$

Подобным образом не соблюдается и уравнение (2.3.5). Несмотря на то, что, как правило, удается получить выражение, связывающее вход и выход системы, тем не менее не существует простой применимой в общем случае формулы типа (2.3.5).

*) Желающим ознакомиться с определителями и правилом Крамера следует прочесть соответственно §§ 4.3, 4.6.

Ввиду трудности сведéния системы к одному дифференциальному уравнению часто оказываются эффективными специальные методы. Один из этих методов описывается в пятой главе.

§ 2.4. Основные свойства линейных дифференциальных уравнений

Линейное дифференциальное уравнение n-го порядка можно записать в форме (2.2.5), а именно:

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0) y(t) = F(t). \qquad (2.4.1)$$

В связи с тем, что все выражения в данном параграфе справедливы как для систем с постоянными, так и с переменными параметрами, коэффициенты a_i могут быть в общем случае функциями времени t. Если правая часть последнего уравнения равна тождественно нулю, т. е.

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0) y(t) = 0, \qquad (2.4.2)$$

то такое уравнение называют однородным. Уравнение (2.4.1) называют соответственно неоднородным дифференциальным уравнением.

Уравнение (2.4.2) может иметь не более, чем n линейно независимых решений. Понятие линейной независимости детально разбирается в четвертой главе. Вкратце, n объектов называются линейно зависимыми, если по крайней мере один из них можно выразить в виде линейной комбинации остальных. В противном случае объекты считаются независимыми. Необходимое и достаточное условие линейной независимости n решений уравнения (2.4.2) состоит в отличии от нуля определителя Вронского. Если $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — n решений уравнения, то определитель Вронского имеет вид

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ py_1 & py_2 & \ldots & py_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p^{n-1}y_1 & p^{n-1}y_2 & \ldots & p^{n-1}y_n \end{vmatrix}. \qquad (2.4.3)$$

Общее решение уравнения (2.4.2) представляется как

$$y_H = K_1 y_1 + K_2 y_2 + \ldots + K_n y_n, \qquad (2.4.4)$$

где K_i — произвольные постоянные. Индекс H указывает на то, что решение соответствует однородному уравнению.

Из последнего уравнения следует, что если известны n независимых решений, то произвольное решение этого уравнения можно представить в виде линейной комбинации n известных решений. Для систем с постоянными параметрами существует

общий метод нахождения независимых решений однородного уравнения. Для систем с переменными параметрами такого метода, к сожалению, не существует.

Общее решение неоднородного уравнения (2.4.1) имеет вид

$$y = y_H + y_P, \tag{2.4.5}$$

где y_H — решение (2.4.4) соответствующего однородного уравнения, y_P — произвольное решение (вне зависимости от того, каким образом оно получено), удовлетворяющее уравнению (2.4.1) и обычно называемое частным решением неоднородного уравнения. y_H называют вспомогательным решением *). Для нахождения y_P приемлем любой способ, даже «метод проб». Например, в электрических цепях с источником синусоидальных сигналов для этого можно использовать теорию установившихся режимов в цепях переменного тока. В следующем параграфе излагается детально разработанный общий метод определения y_P при известном y_H.

Так как y_P не содержит произвольных постоянных, то в решении y, как и в y_H, содержится n постоянных. Для их нахождения следует знать начальные или граничные условия. Это разбирается в § 2.6.

§ 2.5. Решение дифференциальных уравнений первого порядка

Линейное дифференциальное уравнение первого порядка записывается в виде

$$\frac{dy}{dt} + a(t) = F(t). \tag{2.5.1}$$

Для удобства коэффициент при dy/dt полагаем равным единице. Коэффициент a в общем случае может зависеть от времени. Данное уравнение решается путем введения интегрирующего множителя $e^{\int a(t)\,dt}$. Умножим на него обе части уравнения (2.5.1):

$$\frac{dy}{dt} e^{\int a(t)\,dt} + a(t)\, y e^{\int a(t)\,dt} = F(t)\, e^{\int a(t)\,dt}. \tag{2.5.2}$$

Левая часть этого уравнения является производной по времени от $ye^{\int a(t)\,dt}$, так что

$$ye^{\int a(t)\,dt} = \int F(t) e^{\int a(t)\,dt}\, dt + c, \qquad c = \text{const}. \tag{2.5.3}$$

---

*) Данный термин в советской литературе не употребляется. (*Прим. перев.*)

Хотя интегрирование правой части уравнения (2.5.3) порой представляет определенные трудности, изложенный метод предлагает строгую процедуру решения дифференциального уравнения вне зависимости от вида его коэффициента $a(t)$. Результат содержит обе составляющих решения.

При вычислении $\int a(t)\,dt$ нет необходимости записывать постоянную интегрирования. Читатель должен убедиться самостоятельно, что учет этой постоянной не приведет к более общей форме окончательного решения.

Пример 2.5.1. Решить уравнение $dy/dt - ty = t$. Интегрирующий множитель равен $e^{-\int t\,dt} = e^{-t^2/2}$. Умножим на него исходное уравнение. Тогда

$$\frac{d}{dt}\left(ye^{-\frac{t^2}{2}}\right) = te^{-\frac{t^2}{2}},$$

$$ye^{-\frac{t^2}{2}} = -\int e^{-\frac{t^2}{2}}(-t\,dt) + c = -e^{-\frac{t^2}{2}} + c,$$

$$y = -1 + ce^{\frac{t^2}{2}}.$$

Несмотря на то, что широко распространенный метод разделения переменных иногда оказывается проще, чем при использовании интегрирующего множителя, для всех уравнений первого порядка он непригоден. В частности, его нельзя использовать в приведенном примере.

§ 2.6. Решение дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Линейные стационарные системы описываются линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Однородное и неоднородное уравнения n-го порядка задаются соответственно уравнениями (2.4.1) и (2.4.2), где a_i — постоянные коэффициенты. Уравнение первого порядка разбиралось в § 2.5; рассматриваемые в этом параграфе методы справедливы для уравнений любого порядка.

Однородные дифференциальные уравнения. Рассмотрим уравнение n-го порядка

$$(a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0)\,y = 0. \qquad (2.6.1)$$

Предположим, что решение имеет вид $y = e^{rt}$, где r — подлежащая определению постоянная величина. Подставив предполагаемое решение в уравнение (2.6.1), получим

$$(a_n r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \ldots + a_1 r + a_0)\,e^{rt} = 0.$$

Так как это уравнение удовлетворяется при всех значениях t, то

$$a_n r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \ldots + a_1 r + a_0 = 0. \qquad (2.6.2)$$

Уравнение (2.6.2) называют вспомогательным или характеристическим. Его можно записать непосредственно из уравнения (2.6.1). В левой части (2.6.2) стоит полином n-го порядка, так что оно содержит n корней. Обозначим корни через $r_1, r_2, \ldots$ $\ldots, r_n$. Тогда соответствующие решения уравнения (2.6.1) равны

$$y_1 = e^{r_1 t}, \quad y_2 = e^{r_2 t}, \quad \ldots, \quad y_n = e^{r_n t}.$$

Если эти n решений линейно независимы, то общее решение однородного дифференциального уравнения имеет вид

$$y_H = K_1 e^{r_1 t} + K_2 e^{r_2 t} + \ldots + K_n e^{r_n t}. \tag{2.6.3}$$

Если все корни r_i разные, то из (2.4.3) следует, что определитель Вронского отличен от нуля и, таким образом, n отдельных решений независимы. Если $r_1 = r_2$, то независимы решения $y_1 = e^{r_1 t}$ и $y_2 = te^{r_1 t}$. Если, например, r_1 имеет кратность k, т. е. $r_1 = r_2 = \ldots = r_k$, то общее решение записывается в виде

$$y_H = K_1 e^{r_1 t} + K_2 t e^{r_1 t} + \ldots + K_k t^{k-1} e^{r_1 t} + K_{k+1} e^{r_{k+1} t} + \ldots + K_n e^{r_n t}. \tag{2.6.4}$$

Таким образом, для нахождения y_H требуется только вычисление корней уравнения n-го порядка. В связи с тем, что некоторые корни могут быть комплексными, решение уравнения можно записать в другой форме.

Поскольку коэффициенты уравнения (2.6.2) действительные, комплексные корни должны быть комплексно сопряженными. Так, если один из корней равен $r_1 = \alpha + j\beta$, где α и β — действительные величины, то другой из корней должен быть $r_2 = \alpha - j\beta$. Тогда

$$\begin{aligned} K_1 e^{r_1 t} + K_2 e^{r_2 t} &= e^{\alpha t}(K_1 e^{j\beta t} + K_2 e^{-j\beta t}) = \\ &= e^{\alpha t}[(K_1 + K_2)\cos\beta t + j(K_1 - K_2)\sin\beta t] = \\ &= e^{\alpha t}[A\cos\beta t + B\sin\beta t]. \end{aligned}$$

В реальной системе a_i — действительные числа, а y_H — действительная функция времени. Поэтому произвольные постоянные A и B должны быть действительными числами, что в свою очередь означает, что K_1 и K_2 должны быть комплексно сопряженными. Учитывая, что два тригонометрических выражения одинаковой частоты можно свести к одному с фазовым углом, возможна также запись

$$K_1 e^{r_1 t} + K_2 e^{r_2 t} = K e^{\alpha t}\cos(\beta t + \varphi).$$

Неоднородные дифференциальные уравнения. Метод неопределенных коэффициентов. Рассмотрим уравнение

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0) y = F(t), \qquad (2.6.5)$$

решение которого имеет вид

$$y = y_H + y_P. \qquad (2.6.6)$$

y_H определяется при $F(t) = 0$ из решения соответствующего однородного уравнения, как указано раньше. Существуют два стандартных метода нахождения частного решения y_P — метод неопределенных коэффициентов и метод вариации параметров *).

Метод неопределенных коэффициентов применяется в том случае, когда вынуждающая функция $F(t)$ имеет конечное число линейно независимых производных. $F(t)$ может быть многочленом целой положительной степени t или состоять из комбинации экспоненциальной, синусоидальной или гиперболической функций. При $F(t)$, например, равной $\ln t$ или $\sqrt{t}$, указанный метод неприменим (если не искать решение в виде бесконечного ряда). В основе метода предполагается, что y представляет собой линейную комбинацию составляющих $F(t)$ и их производных; при этом каждый элемент входит с неопределенным коэффициентом. Предполагаемое решение подставляется в уравнение (2.6.5).

Неопределенные коэффициенты выбираются таким образом, чтобы уравнение удовлетворялось при всех значениях t.

В том случае, когда член $F(t)$ в точности совпадает по виду с какой-либо составляющей решения однородного уравнения, указанная процедура видоизменяется. В физике это сходно с явлением резонанса, когда система возбуждается на одной из ее собственных частот. Например, уравнение

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = 1 + e^{-t},$$

для которого $y_H = K_1 e^{-t} + K_2 e^{-2t}$ не удовлетворяется тождественно при $y_P = A + Be^{-t}$ вне зависимости от выбора A и B. Естественно, однако, предположить, что составляющая решения, вызываемая возмущением указанного типа, должна затухать более медленно, чем при отсутствии возмущения. Поэтому логично попытаться искать решение в виде

$$y_P = A + Bte^{-t}.$$

Подставляя это решение в дифференциальное уравнение, найдем, что оно удовлетворяется тождественно при $A = 1/2$ и $B = -1$.

*) Известный в литературе так же как метод Лагранжа вариации постоянных.

Если отдельные члены $F(t)$ совпадают по форме с членами y_H, то процедура решения предполагает в общем случае умножение на t соответствующих составляющих в определяемом y_P. Подобная схема сохраняется, когда член $F(t)$ содержит дополнительно множитель t^n. Однако в том случае, если какой-либо член $F(t)$ соответствует кратному корню характеристического уравнения (например, корню m-го порядка), соответствующий член в y_P следует умножить на t^m.

Пример 2.6.1. Найти общее решение уравнения

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+y=te^{-t}.$$

Характеристическое уравнение: $r^2+2r+1=0$; отсюда $r_1=r_1=1$ и $y_H=K_1te^{-t}+K_2e^{-t}$. Хотя обычно $y_P=Ate^{-t}+Be^{-t}$, в данном примере характеристическое уравнение содержит два одинаковых корня -1; следовательно,

$$y_P=At^3e^{-t}+Bt^2e^{-t}.$$

Заметим, что хотя повторное дифференцирование At^3e^{-t} также приводит к выражениям Cte^{-t} и De^{-t}, эти выражения не входят в предполагаемое решение y_P. Это объясняется тем, что эти выражения служат решениями соответствующего однородного уравнения и потому изчезнут при подстановке в левую часть исходного дифференциального уравнения. Подставив y_P, как указано выше, получим

$$\frac{d^2y_P}{dt^2}+2\frac{dy_P}{dt}+y_P=(0)\,t^3e^{-t}+(0)\,t^2e^{-t}+6Ate^{-t}+2Be^{-t}=te^{-t}.$$

Следовательно, $A=1/6$, $B=0$, и, в конечном счете, решение имеет вид

$$y=K_1te^{-t}+K_2e^{-t}+\frac{1}{6}t^3e^{-t}.$$

Неоднородные дифференциальные уравнения. Вариация параметров. В отличие от метода неопределенных коэффициентов, метод нахождения y_P посредством вариации параметров может применяться вне зависимости от того, имеет или не имеет вынуждающая функция $F(t)$ конечное число независимых производных. В отличие от первого метода он применим также и в том случае, если коэффициенты a_i в уравнении (2.6.5) зависят от времени, хотя в настоящем параграфе это не рассматривается.

Метод вариации параметров предполагает нахождение частного решения на основе составляющих решения однородного уравнения. Ввиду того, что этот метод, возможно, незнаком читателю, рассмотрим вначале дифференциальное уравнение первого порядка

$$(a_1p+a_0)y=F(t). \tag{2.6.7}$$

Решение, удовлетворяющее однородному дифференциальному уравнению

$$(a_1p+a_0)y=0, \tag{2.6.8}$$

содержит один член $y_H = Ky_1$. Частное решение ищем в виде

$$y_P = uy_1, \tag{2.6.9}$$

где все три величины являются функциями времени. Чтобы найти u, подставим уравнение (2.6.9) в уравнение (2.6.7). Получим

$$a_1(u\dot{y}_1 + \dot{u}y_1) + a_0uy_1 = F(t),$$

где точки обозначают производные по t. После преобразований имеем

$$a_1\dot{u}y_1 + u(a_1\dot{y}_1 + a_0y_1) = F(t).$$

В последнем уравнении множитель в скобках равен нулю, так как y_1 удовлетворяет уравнению (2.6.8). Следовательно,

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{a_1y_1}F(t). \tag{2.6.10}$$

Пример 2.6.2. Найти общее решение уравнения

$$\frac{dy}{dt} + 3y = \frac{e^{-3t}}{t}.$$

Решение однородного уравнения $y_H = Ke^{-3t}$, т. е. $y_1 = e^{-3t}$. Предполагая $y_P = ue^{-3t}$,

$$\frac{du}{dt} = e^{3t}\frac{e^{-3t}}{t} = \frac{1}{t},$$

$$u = \ln t \quad \text{и} \quad y_P = e^{-3t}\ln t.$$

Общее решение имеет вид

$$y = Ke^{-3t} + e^{-3t}\ln t.$$

Рассмотрим далее дифференциальное уравнение второго порядка:

$$(a_2p^2 + a_1p + a_0)y = F(t). \tag{2.6.11}$$

Решение, удовлетворяющее однородному дифференциальному уравнению

$$(a_2p^2 + a_1p + a_0)y = 0, \tag{2.6.12}$$

состоит из двух слагаемых:

$$y_H = K_1y_1 + K_2y_2.$$

Частное решение ищем в виде

$$y_P = u_1y_1 + u_2y_2, \tag{2.6.13}$$

где u_1 и u_2 являются неизвестными функциями времени. Для нахождения u_1 и u_2 требуются два условия. Одно из них состоит в том, что уравнение (2.6.13) должно удовлетворять уравнению (2.6.11). Другое условие можно выбрать любым наиболее

выгодным образом

$$\dot{y}_P = u_1\dot{y}_1 + \dot{u}_1 y_1 + u_2\dot{y}_2 + \dot{u}_2 y_2.$$

Выражения для $\dot{y}_P$ и $\ddot{y}_P$ будут менее громоздкими, если положить

$$\dot{u}_1 y_1 + \dot{u}_2 y_2 = 0. \tag{2.6.14}$$

Поэтому уравнение (2.6.14) становится вторым из двух необходимых условий:

$$\dot{y}_P = u_1\dot{y}_1 + u_2\dot{y}_2,$$
$$\ddot{y}_P = u_1\ddot{y}_1 + \dot{u}_1\dot{y}_1 + u_2\ddot{y}_2 + \dot{u}_2\dot{y}_2.$$

Подстановка в уравнение (2.6.11) дает

$$a_2(u_1\ddot{y}_1 + \dot{u}_1\dot{y}_1 + u_2\ddot{y}_2 + \dot{u}_2\dot{y}_2) + a_1(u_1\dot{y}_1 + u_2\dot{y}_2) + a_0(u_1 y_1 + u_2 y_2) = F(t).$$

После преобразования

$$a_2(\dot{u}_1\dot{y}_1 + \dot{u}_2\dot{y}_2) + u_1(a_2\ddot{y}_1 + a_1\dot{y}_1 + a_0 y_1) + u_2(a_2\ddot{y}_2 + a_1\dot{y}_2 + a_0 y_2) = F(t).$$

Так как y_1 и y_2 удовлетворяют уравнению (2.6.12), то

$$\dot{u}_1\dot{y}_1 + \dot{u}_2\dot{y}_2 = \frac{F(t)}{a_2}. \tag{2.6.15}$$

Чтобы получить в явном виде формулы для u_1 и u_2, необходимо решить совместно уравнения (2.6.14) и (2.6.15). Получим

$$\dot{u}_1 = \frac{-y_2 F(t)}{a_2(y_1\dot{y}_2 - \dot{y}_1 y_2)}, \qquad \dot{u}_2 = \frac{y_1 F(t)}{a_1(y_1\dot{y}_2 - \dot{y}_1 y_2)}. \tag{2.6.16}$$

Следует отметить, что так как y_1 и y_2 — линейно независимые решения уравнения (2.6.12), то из (2.4.3) следует, что $y_1\dot{y}_2 - \dot{y}_1 y_2 \neq 0$. Так как знаменатель уравнения (2.6.16) отличен от нуля, $\dot{u}_1$ и $\dot{u}_2$ всегда существуют.

Пример 2.6.3. Найти общее решение уравнения

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = \frac{1}{t}.$$

Решение однородного уравнения записывается в виде

$$y_H = K_1\cos t + K_2\sin t.$$

Следовательно,

$$y_1 = \cos t, \qquad y_2 = \sin t.$$

На основе уравнения (2.6.16) имеем

$$y_1\dot{y}_2 - \dot{y}_1 y_2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1,$$
$$\dot{u}_1 = -\frac{\sin t}{t}, \qquad u_2 = \frac{\cos t}{t}.$$

Общее решение представляется в виде

$$y_1 = K_1 \cos t + K_2 \sin t - (\cos t) \int \frac{\sin t}{t}\, dt + (\sin t) \int \frac{\cos t}{t}\, dt.$$

Интегралы, фигурирующие в решении, не могут быть выражены в виде конечного числа элементарных функций. Их можно представить при помощи бесконечных рядов. Это известные функции, называемые «интегральным синусом» и «интегральным косинусом».

В заключение рассмотрим дифференциальное уравнение n-го порядка типа (2.6.5). Решение однородного уравнения имеет вид

$$y_H = K_1 y_1 + K_2 y_2 + \ldots + K_n y_n.$$

Частное решение ищем в виде

$$y_P = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \ldots + u_n y_n, \tag{2.6.17}$$

где u_i являются функциями t. Производные от u_i находим из совместного решения следующих n уравнений:

$$\begin{gathered}
\dot{u}_1 y_1 + \dot{u}_2 y_2 + \ldots + \dot{u}_n y_n = 0, \\
\dot{u}_1 \dot{y}_1 + \dot{u}_2 \dot{y}_2 + \ldots + \dot{u}_n \dot{y}_n = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\dot{u}_1 y_1^{n-1} + \dot{u}_2 y_2^{n-1} + \ldots + \dot{u}_n y_n^{n-1} = \frac{F(t)}{a_n},
\end{gathered}$$

где точки и верхние индексы обозначают производные по t Первые $n-1$ условий выбираются произвольно, с целью получения результата в обозримой форме. Последнее уравнение получено при подстановке предполагаемого решения y_P в уравнение (2.6.5) с учетом предыдущих $n-1$ условий.

Приведенная выше система уравнений решается на основе правила Крамера

$$\dot{u}_i = \frac{W_{ni}(t)\, F(t)}{a_n W(t)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2.6.18}$$

где

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \ldots y_n \\ \dot{y}_1 & \dot{y}_2 \ldots \dot{y}_n \\ \cdots & \cdots \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-2} \ldots y_n^{n-1} \end{vmatrix}, \tag{2.6.19}$$

а $W_{ni}(t)$ — ni-е алгебраическое дополнение Из (2 4 3) следует, что $W(t)$ — определитель Вронского — отличен от нуля, если $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — независимые решения однородного дифференциального уравнения.

Пример 2.6.4. Найти общее решение уравнения

$$\frac{d^3y}{dt^3}+3\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+y=e^{-t}.$$

Решение однородного уравнения равно

$$y_H=K_1e^{-t}+K_2te^{-t}+K_3t^2e^{-t},$$

$$W(t)=e^{-3t}\begin{vmatrix}1 & t & t^2\\ -1 & (-t+1) & (-t^2+2t)\\ 1 & (t-2) & (t^2-4t+2)\end{vmatrix}=2e^{-3t},$$

$$\dot{u}_1=\left(\frac{1}{2}e^{3t}\right)(t^2e^{-2t})(e^{-t})=\frac{1}{2}t^2,$$

$$\dot{u}_2=\left(\frac{1}{2}e^{3t}\right)(-2te^{-2t})(e^{-t})=-t,$$

$$\dot{u}_3=\left(\frac{1}{2}e^{3t}\right)(e^{-2t})(e^{-n})=\frac{1}{2},$$

$$u_1=\frac{1}{6}t^3,$$

$$u_2=-\frac{1}{2}t^2,$$

$$u_3=\frac{1}{2}t,$$

$$y_P=\left(\frac{1}{6}t^3\right)(e^{-t})+\left(-\frac{1}{2}t^2\right)(te^{-t})+\left(\frac{1}{2}t\right)(t^2e^{-t})=\frac{1}{6}t^3e^{-t}.$$

В результате общее решение имеет вид

$$y=K_1e^{-t}+K_2te^{-t}+K_3t^2e^{-t}+\frac{1}{6}t^3e^{-t}.$$

Из сравнения двух стандартных методов нахождения y_P следует, что метод неопределенных коэффициентов зачастую проще. Недостатком его является, однако, то, что он справедлив лишь для ограниченного класса возмущающих функций и неприменим для систем с изменяющимися во времени параметрами.

Метод вариации параметров позволяет всегда получить в явном виде выражение для y_P, если известно y_H. Решение дается в виде интеграла от известной функции, в связи с чем y_P обычно называют частным интегральным решением. В ряде случаев непосредственное вычисление интеграла затруднительно и следует использовать численные методы. Существенным является то, что метод справедлив при любых вынуждающих функциях и может быть обобщен на системы с изменяющимися во времени коэффициентами.

Частное решение для входа e^{st}. Общий вид системы с неизменяющимися во времени коэффициентами описывается уравнениями (2.2.1) или (2.2.6). Вводя операторы A и B, получим

$$A(p)y(t)=B(p)v(t). \qquad (2.6.20)$$

Если $v(t) = e^{st}$, то частное решение имеет вид $y_P(t) = H(s)e^{st}$, где H не зависит от t. Подстановка этих выражений в дифференциальное уравнение дает

$$A(p)[H(s)e^{st}] = B(p)[e^{st}].$$

Учитывая $p^k e^{st} = s^k e^{st}$, $B(p)e^{st} = e^{st}B(s)$, где B — функция, образованная заменой дифференциального оператора p на s, получаем

$$H(s)e^{st}A(s) = e^{st}B(s) \quad \text{или} \quad H(s) = \frac{B(s)}{A(s)}. \qquad (2.6.21)$$

Следовательно, $H(s)$ можно записать непосредственно из дифференциального уравнения. Справедливо также

$$H(s) = \left[\frac{y_P(t)}{v(t)}\right]_{v(t)=e^{st}}. \qquad (2.6.22)$$

$H(s)$ обычно называют передаточной функцией системы. Возможность так легко определять реакцию на e^{st} позволяет использовать разложение произвольного входного сигнала в ряд по функциям e^{st}. Согласно терминологии § 1.3 элементарной функцией является $k(t, \lambda) = e^{\lambda t}$, а реакция на элементарную функцию равна $K(t, \lambda) = H(\lambda)e^{\lambda t}$. Подобный подход приводит к преобразованию Лапласа, рассматриваемому в третьей главе. Для стационарных электрических цепей передаточная функция $H(s)$ может определяться непосредственно по модели, минуя предварительную запись дифференциального уравнения. При $v(t) = e^{st}$ частное решение для токов и напряжений имеет вид $e(t) = E(s)e^{st}$ и $i(t) = I(s)e^{st}$. В таблице 2.6.1 приведены три пассивных элемента электрической цепи. Подставляя приведенные выражения

Таблица 2.6.1

Элемент	Уравнение	$Z(s)$
R	$e = Ri$	R
L	$e = L\dfrac{di}{dt}$	sL
C	$i = C\dfrac{de}{dt}$	$\dfrac{1}{sC}$

для e и i в дифференциальные уравнения элементов цепи, можно определить отношение напряжения к току.

Это отношение, называемое импедансом и обозначаемое через $Z(s)$, не зависит от t. В связи с этим подобным образом можно определить соотношение между $y_P(t)$ и $v(t)$ для цепей постоянного тока.

Пример 2.6.5 Для цепи на рис. 2.6.1 определить частное решение $e_P(t)$ при входном сигнале $i(t)=e^{st}$:

$$E(s)=\frac{(R+sL)\left(\frac{1}{sC}\right)}{R+sL+\frac{1}{sC}}\,I(s)=\frac{sL+R}{s^2LC+sRC+1}\,I(s).$$

Следовательно,

$$H(s)=\frac{sL+R}{s^2LC+sRC+1}\,e^{st},$$

и при $i(t)=e^{st}$ частное решение равно

$$e_P(t)=\frac{sL+R}{s^2LC+sRC+1}\,e^{st}.$$

Уравнение (2.6.21) можно использовать для написания по известной передаточной функции дифференциального уравнения, связывающего вход и выход системы. Для приведенного выше примера дифференциальное уравнение имеет вид

$$(LCp^2+RCp+1)\,e(t)=$$
$$=(Lp+R)\,i(t).$$

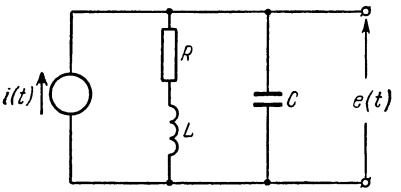


Рис. 2.6.1.

Переменная s называется обычно комплексной частотой. При анализе установившихся режимов в цепях переменного тока используются выражения таблицы 2.6.1 с заменой $s=j\omega$. Частное решение для $v=e^{j\omega t}$ определяется из выражения

$$H(j\omega)=\left[\frac{y_P(t)}{v(t)}\right]_{v(t)=e^{j\omega t}}=\frac{B(j\omega)}{A(j\omega)}. \qquad (2.6.23)$$

Частное решение при синусоидальном входном сигнале можно находить непосредственно по $H(j\omega)$, как показано в примере 1.2.5. Так как $\cos\omega t=\mathrm{Re}[e^{j\omega t}]$ и реакция на $v(t)=e^{j\omega t}$ равна $y_P(t)=H(j\omega)\,e^{j\omega t}$, то реакция на $v(t)=\cos\omega t$ имеет вид

$$y_P=\mathrm{Re}\,[H(j\omega)\,e^{j\omega t}].$$

Если комплексная величина $H(j\omega)$ выражается в показательной форме $|H(j\omega)|e^{j\theta}$, то реакцию можно записать в виде

$$y_P = |H(j\omega)|\cos(\omega t + \theta).$$

$H(j\omega)$, часто называемая частотным спектром системы, составляет основу теории установившихся режимов в цепях переменного тока.

Вычисление произвольных постоянных. Произвольные постоянные в решении однородного уравнения вычисляются на основе начальных или граничных условий. В большинстве случаев для решения дифференциального уравнения n-го порядка, описывающего систему, при определении произвольных постоянных используются значения $y(t)$ и его $n-1$ производных при $t = 0+$. Символ $0+$ указывает, что значения зависимой переменной и ее производных известны спустя бесконечно малый промежуток времени после момента отсчета $t = 0$. Данные величины обычно определяются, исходя из запасенной системой энергии к моменту $t = 0$. Существенно подчеркнуть, что произвольные постоянные зависят от вынуждающей функции и не могут быть определены, пока не найдена y_P.

Пример 2.6.6. Упрощенная модель электронного усилителя с высокочастотной коррекцией показана на рис. 2.6.2. Приложенное к сетке напряжение равно

$$e_1(t) = U_{-1}(t) \text{ в}.$$

Для невозбужденной цепи найти выходное напряжение $e_2(t)$. Запишем уравнение для двух узлов цепи на основе закона Кирхгофа

$$\left(C\frac{de_2}{dt} + \frac{1}{R}e_2\right) - \frac{1}{R}e_3 = -g_m e_1,$$

$$-\frac{1}{R}e_2 + \left(\frac{1}{R}e_3 + \frac{1}{L}\int e_3\,dt\right) = 0.$$

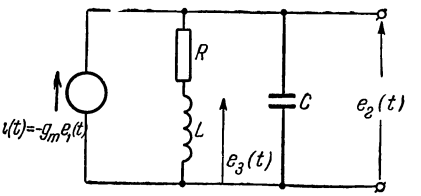


Рис. 2.6.2.

Второе уравнение преобразуется к дифференциальному, если исключить знак интегрирования. Записывая первое уравнение относительно e_3 и подставляя его во второе уравнение, получим

$$\frac{d^2e_2}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{de_2}{dt} + \frac{1}{LC}e_2 = -\frac{g_m}{C}\left(\frac{de_1}{dt} + \frac{R}{L}e_1\right).$$

Как и следовало ожидать, мы получили такое же уравнение, как и для рис. 2.6.1, но другим методом. Подставляя данные численные значения и выражая время t в микросекундах, получим

$$\frac{d^2e_2}{dt^2} + 36\frac{de_2}{dt} + 800e_2 = -400\frac{de_1}{dt} - 14{,}400e_1.$$

При $t > 0$

$$\frac{d^2e_2}{dt^2} + 36\frac{de_2}{dt} + 800e_2 = -14{,}400.$$

Характеристическое уравнение:

$$r^2+36r+800=0.$$

Его корни

$$r=-18\pm j\,21{,}8,$$

следовательно,

$$(e_2)_H=e^{-18t}[K_1\cos 21{,}8t+K_2\sin 21{,}8t].$$

Частное решение можно получить из анализа данного дифференциального уравнения или на основе теорем установившихся режимов цепей постоянного тока

$$(e_2)_P=-\frac{14{,}400}{800}=-18.$$

Общее решение имеет вид

$$e_2=-18+e^{-18t}\,[K_1\cos 21{,}8t+K_2\sin 21{,}8t]\qquad \text{при}\quad t>0.$$

Также имеем

$$\frac{de_2}{dt}=e^{-18t}\,[(21{,}8K_2-18K_1)\cos 21{,}8t-(21{,}8K_1+18K_2)\sin 21{,}8t]\qquad \text{при}\quad t>0.$$

K_1 и K_2 определяются из последних двух уравнений, если известны e_2 и de_2/dt при $t=0+$. По условиям задачи напряжение e_2 и ток через L при $t<0$ равны нулю. Эти величины не могут измениться мгновенно (если через C не проходит импульс тока, а через L — импульс напряжения), так что они должны остаться равными нулю и в момент $t=0+$. При определении de_2/dt заметим, что поскольку ток через индуктивность остается равным нулю, ток через C должен быть равен $i_c=i=-g_m=-0{,}01$. Так как $i_c=C(de_2/dt)$, то

$$\frac{de_2}{dt}(0+)=\frac{-0{,}01}{25\times 10^{-12}}=-400\times 10^6\,\frac{в}{сек}=-400\,\frac{в}{мк\,сек}.$$

Следовательно,

$$0=-18+K_1,$$
$$-400=21{,}8K_2-18K_1,$$
$$K_1=18,\qquad K_2=-3{,}5.$$

Решение имеет вид

$$e_2=-18+e^{-18t}[18\cos 21{,}8t-3{,}5\sin 21{,}8t].$$

Пример 2.6.7. Повторить предыдущий пример при $e_1(t)=(\cos 4\cdot 10^7t)\times\times U_{-1}(t)$.

Вид решения однородного уравнения сохранится и частное решение находится по передаточной функции

$$H(j\omega)=\frac{j\omega L+R}{1-\omega^2RC+j\omega RC}.$$

Для данных значений L, R, C и $\omega=4\cdot 10^7$

$$H(j\omega)=(-13{,}1)\,e^{-j71^\circ}.$$

Общее решение при времени в микросекундах равно

$$e_2(t)=-13{,}1\cos(40t-71^\circ)+e^{-18t}[K_1\cos 21{,}8t+K_2\sin 21{,}8t].$$

Произвольные постоянные снова находим на основе $e_2(0+)$ и $(de_2/dt)(0+)$;

$$0=-13{,}1\cos 71^\circ+K_1,$$
$$-400=-13{,}1\,(40)\sin 71^\circ+21{,}8K_2-18K_1,$$

откуда следует $K_1=4{,}3$ и $K_2=7{,}9$.

Одинаковые начальные условия. В ряде важных случаев начальные условия одинаковы. Для дифференциального уравнения n-го порядка (2.6.5) одинаковые начальные условия имеют вид

$$y(0) = \frac{dy}{dt}(0) = \ldots = \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}(0) = 0. \qquad (2.6.24)$$

Ранее используемый для нахождения частного решения метод вариации параметров можно обобщить для получения общего решения, удовлетворяющего указанным одинаковым начальным условиям. При $n = 1$ уравнения (2.6.9) и (2.6.10) объединяются в

$$y(t) = y_1(t)[u(t) - u(0)] = y_1(t)\int_0^t \frac{F(z)}{a_1(z)\,y_1(z)}\,dz, \qquad (2.6.25)$$

где $y_1(t)$ — решение однородного уравнения, а z — фиктивная переменная интегрирования. Верхний предел соответствует рассмотренному ранее частному решению, а нижний предел дает постоянную в решении однородного уравнения. Отметим, что $y(0) = 0$.

При $n = 2$ уравнения (2.6.13) и (2.6.16) объединяются в

$$y(t) = y_1(t)[u_1(t) - u_1(0)] + y_2(t)[u_2(t) - u_2(0)] =$$
$$= -y_1(t)\int_0^t \frac{y_2(z)\,F(z)}{a_2(z)\,W(z)}\,dz + y_2(t)\int_0^t \frac{y_1(z)\,F(z)}{a_2(z)\,W(z)}\,dz, \qquad (2.6.26)$$

где $y_1(t)$ и $y_2(t)$ — решения однородного уравнения, а $W(t)$ — определитель Вронского,

$$W(t) = y_1(t)\,\dot{y}_2(t) - \dot{y}_1(t)\,y_2(t).$$

Приведенные выше замечания о пределах интегрирования справедливы и в этом случае. Отметим, что $y(0) = 0$ и

$$\dot{y}(t) = \dot{y}_1(t)[u_1(t) - u_1(0)] + \dot{y}_2(t)[u_2(t) - u_2(0)] +$$
$$+ [y_1(t)\,\dot{u}_1(t) + y_2(t)\,\dot{u}_2(t)].$$

Выражение в последней скобке всегда равно нулю, как следует из уравнения (2.6.14), так что соблюдается $\dot{y}(0) = 0$.

В общем случае дифференциального уравнения n-го порядка при одинаковых начальных условиях из уравнений (2.6.17) и (2.6.18) следует

$$y(t) = y_1(t)[u_1(t) - u_1(0)] + \ldots + y_n(t)[u_n(t) - u_n(0)] =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left[y_i(t)\int_0^t \frac{W_{ni}(z)}{a_n(z)\,W(z)}\,F(z)\,dz\right], \qquad (2.6.27)$$

где $W(t)$ и $W_{ni}(t)$ определяются уравнением (2.6.19). Так как основу рассуждений составляет метод вариации параметров, уравнения (2.6.24) и (2.6.27) справедливы как для систем с постоянными, так и с переменными параметрами. Данные уравнения применяются в § 2.8 при нахождении импульсной характеристики нестационарной системы.

Физический смысл частного и вспомогательного решений. Решение однородного уравнения (вспомогательное решение) зависит только от свойств системы и не зависит от входного воздействия. Характеристическое уравнение зависит только от параметров системы, а корни характеристического уравнения определяют вид составляющих вспомогательного решения. В случае отсутствия внешних источников (т. е. система возбуждается запасенной в ней начальной энергией) вспомогательное решение совпадает с общим решением. Таким образом, вспомогательное решение характеризует «естественное» поведение системы при отсутствии внешних возмущений. В связи с этим вспомогательное решение называют также свободным или невынужденным движением.

Если вспомогательное решение системы неограниченно возрастает при стремлении t к бесконечности, говорят, что система неустойчивая. Так как вспомогательное решение содержит экспоненциальные члены, то система станет неустойчивой, если ее характеристическое уравнение содержит корень с положительной действительной частью. С другой стороны, корни с отрицательной действительной частью обусловливают стремление к нулю составляющих решения при стремлении t к бесконечности. Простые чисто мнимые корни приводят к синусоидальным составляющим постоянной амплитуды во вспомогательном решении. Указанный случай колебаний постоянной амплитуды, характерный, например, для LC-цепей, обычно рассматривают как устойчивое или «ненеустойчивое» движение. Кратные мнимые корни приводят к неустойчивым составляющим вида $t^n \cos(\omega t + \varphi)$.

При рассмотрении корней характеристического уравнения в комплексной плоскости можно сформулировать следующее утверждение. Если система устойчива, то ее корни должны лежать в левой полуплоскости, а на мнимой оси могут находиться только простые корни.

Если все корни характеристического уравнения лежат в левой полуплоскости, то вспомогательное решение стремится к нулю при стремлении t к бесконечности и «совпадает» с переходным процессом в системе.

Величины составляющих во вспомогательном решении, т. е. произвольные постоянные решения, зависят от двух факторов, одним из которых является входной сигнал. Другим фактором

служит предыстория системы (до момента приложения входного сигнала), которая полностью определяется знанием запасенной в системе энергии к моменту приложения входного воздействия.

Вид частного решения обусловливается вынуждающей функцией; его легко усмотреть из метода неопределенных коэффициентов. Время влияет на вид решения лишь в том случае, если составляющая вынужденной функции совпадает с каким-либо членом в y_H. Так как в этом случае система возбуждается на одной из ее собственных частот, то подобное явление называют резонансом.

В связи с тем, что вид частного решения зависит от входного воздействия, его называют также вынужденным движением. Если все корни характеристического уравнения лежат в левой полуплоскости, вынужденное решение «совпадает» с установившимся движением. Величины вынужденных составляющих зависят как от параметров системы, так и от входного сигнала.

Обычно считают, что вынужденная составляющая решения устанавливается мгновенно при подаче входного сигнала. Свободная же составляющая, т. е. вспомогательное решение, как бы настраивает себя путем правильного определения произвольных постоянных, чтобы обеспечить надлежащий переход системы из невозбужденного состояния в состояние, подчиненное входному воздействию.

Некоторые склонны рассматривать вспомогательное решение как первоначальное сопротивление системы «желаниям входа». Величины произвольных постоянных зависят от того, насколько характер входного воздействия отличается от «естественного» поведения системы.

§ 2.7. Решение дифференциальных уравнений с изменяющимися во времени коэффициентами

Дифференциальное уравнение, описывающее нестационарную систему, задается в виде (2.2.1), (2.2.2) или (2.2.7), где коэффициенты a_i и b_i в данном случае являются функциями времени:

$$a_n(t)\frac{d^n y}{dt^n} + \ldots + a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_0(t)\,y = \\ = b_m(t)\frac{d^m v}{dt^m} + \ldots + b_1(t)\frac{dv}{dt} + b_0(t)\,v = F(t), \qquad (2.7.1)$$

$$A(p,\ t)\,y(t) = B(p,\ t)\,v(t) = F(t).$$

Для решения уравнений первого порядка справедлив метод, описанный в § 2.5. Однако для уравнений более высокого порядка получение решения в явном виде в общем случае не представляется возможным.

Вспомогательное решение. Рассмотрим уравнение (2.7.1) при $F(t)=0$ и исследуем для нахождения y_H метод, описанный в § 2.6. Предполагалось, что решение в виде $y=e^{rt}$, где r — постоянная величина, приводит к уравнению

$$a_n r^n + \ldots + a_1 r + a_0 = 0.$$

Но так как в рассматриваемом случае a_i являются функциями времени, то и корни этого уравнения также являются функциями времени, что противоречит сделанному предположению. Вообще не существует общего метода нахождения y_H в виде элементарных функций. Иногда полезно знать, что если известны $n-1$ неизвестных решений однородного уравнения n-го порядка, то оставшееся решение находится путем модификации метода вариации параметров [2].

Примером «решаемого» уравнения служит уравнение Эйлера

$$[a_n (b+ct)^n p^n + a_{n-1}(b+ct)^{n-1} p^{n-1} + \ldots$$
$$\ldots + a_1 (b+ct)\, p + a_0]\, y(t) = 0, \qquad (2.7.2)$$

где a_i, b, c — постоянные величины. Путем введения переменной

$$(b+ct) = e^z, \quad \text{т. е.} \quad z = \ln(b+ct),$$

оно приводится к уравнению с постоянными коэффициентами.

Пример 2.7.1. Найти общее решение уравнения

$$t_2 \frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + y = 0.$$

Пусть $e^z = t$ и $e^z dz = dt$. Тогда

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dz} e^{-z},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{dy}{dz} e^{-2z} + \frac{d^2y}{dz^2} e^{-2z}.$$

Получим новое уравнение

$$\frac{d^2y}{dz^2} + y = 0,$$

решение которого

$$y = K_1 \cos z + K_2 \sin z = K_1 \cos(\ln t) + K_2 \sin(\ln t).$$

В ряде случаев однородные дифференциальные уравнения n-го порядка сводятся к дифференциальным уравнениям более низкого порядка. Уравнение, не содержащее y и его первые $n-k$ производных, приводится к уравнению $(n-k)$-го порядка путем введения переменной $z = d^k y/dt^k$.

Как показано в следующем примере, понижение порядка возможно также, если оператор системы раскладывается на множители.

Пример 2.7.2. Дифференциальное уравнение

$$[t^2p^2+(t^2+1)p+2t]y=0$$

можно представить в виде

$$(tp+1)(p+t)y=0$$

Это эквивалентно двум уравнениям первого порядка:

$$(tp+1)v=0, \qquad (p+t)y=v.$$

Первое из приведенных уравнений можно решить относительно $v(t)$, а второе решается затем относительно y на основе метода, описанного в § 2.5.

Значительные исследования проведены по дифференциальным уравнениям с периодически изменяющимися во времени коэффициентами. Уравнения второго порядка указанного типа можно преобразовать к уравнениям Матье и Хилла [3]. Для уравнений более высокого порядка можно использовать теорию Флоке [4].

Если коэффициенты a_i являются полиномами от t, то решение можно получить в виде бесконечного ряда. Наглядными примерами служат уравнения Бесселя и Лежандра. В виде бесконечного ряда ищется решение и при дробно-рациональных коэффициентах (представляющих отношение двух полиномов). Однако в этом случае бесконечный ряд имеет ограниченную область сходимости; поэтому если решение определяется на неограниченном интервале времени, следует использовать множество различных рядов.

Наконец, существуют многочисленные приближенные методы нахождения y_H *). Обычно в их предполагается, что коэффициенты a_i очень медленно изменяются во времени или мало отличаются от своих средних значений.

Частное решение. В отличие от метода неопределенных коэффициентов, метод вариации параметров применим для дифференциальных уравнений с изменяющимися во времени коэффициентами. Все этапы нахождения производных (уравнения (2.6.10), (2.6.16), (2.6.18)) справедливы вне зависимости от того, являются или не являются a_i функциями времени. Таким образом, если известно y_H, то всегда можно определить y_P. Но, к сожалению, как уже указывалось, определить y_H в общем случае не представляется возможным.

Пример 2.7.3. Найти общее решение уравнения

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2}+t\frac{dy}{dt}-y=\frac{1}{t}.$$

Однородное уравнение

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2}+t\frac{dy}{dt}-y=0$$

*) См. § 5.9.

является уравнением Эйлера. Вводя $e^z = t$, получим

$$y_H = K_1 e^z + K_2 e^{-z} = K_1 t + \frac{K_2}{t}.$$

На основе уравнения (2.6.16) при $y_1 = t$ и $y_2 = \frac{1}{t}$ имеем

$$y_1 \dot{y}_2 - \dot{y}_1 y_2 = -\frac{2}{t},$$

$$\dot{u}_1 = \frac{\left(-\frac{1}{t}\right)\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2\left(-\frac{2}{t}\right)} = \frac{1}{2t^3} \quad \text{и} \quad u_1 = -\frac{1}{4t^2},$$

$$\dot{u}_2 = \frac{(t)\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2\left(-\frac{2}{t}\right)} = -\frac{1}{2t} \quad \text{и} \quad u_2 = -\frac{1}{2}\ln t,$$

$$y_P = u_1 y_1 + u_2 y_2 = -\frac{1}{4t} - \frac{1}{2t}\ln t, \qquad y_1 = K_1 t + \frac{1}{t}\left(K_2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln t\right).$$

Для дифференциальных уравнений с изменяющимися во времени коэффициентами справедлива также трактовка вспомогательного и частного решений как свободного и вынужденного движений.

§ 2.8. Получение импульсной характеристики на основе дифференциального уравнения

В первой главе рассмотрены методы нахождения реакции системы на произвольный входной сигнал, если известна импульсная характеристика системы. Хотя импульсная характеристика в ряде случаев задается непосредственно, важно уметь определять ее по описывающему систему дифференциальному уравнению. Поэтому рассмотрим уравнение

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = U_0(t). \qquad (2.8.1)$$

Так как система невозбуждена при $t < 0$, то $y = 0$ при $t < 0$. В связи с тем, что возмущающая функция $U_0(t)$ отлична от нуля лишь при $t = 0$, общее решение при $t > 0$ совпадает со вспомогательным решением

$$y = K_1 y_1 + K_2 y_2 + \ldots + K_n y_n. \qquad (2.8.2)$$

Для вычисления n произвольных постоянных нужно знать n начальных условий. Для систем с постоянными параметрами, у которых коэффициенты a_i — постоянные величины, начальные условия находятся непосредственно по этим коэффициентам. В момент времени $t = 0$ n-я производная решения в отличие от

производных низшего порядка содержит мгновенный импульс. Только в этом случае удовлетворяется уравнение (2.8.1) при $t = 0$. Если одна из низших производных содержала бы мгновенный импульс, то $d^n y/dt^n$ содержала бы специальную функцию более высокого порядка. Так как в действительности $a_n(d^n y/dt^n)$ содержит единичный мгновенный импульс при $t = 0$, $d^{n-1}y/dt^{n-1}$ должна претерпевать скачок от 0 до $1/a_n$ в момент $t = 0$, а все остальные производные в начальный момент должны быть непрерывными.

n начальных условий должны иметь вид

$$y(0+) = \dot{y}(0+) = \ldots = y^{n-2}(0+) = 0, \quad y^{n-1}(0+) = \frac{1}{a_n}. \qquad (2.8.3)$$

Система с постоянными параметрами описывается уравнениями (2.2.1) или (2.2.6):

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m v}{dt^m} + \ldots + b_1 \frac{dv}{dt} + b_0 v$$

или

$$A(p)\,y(t) = B(p)\,v(t) = F(t). \qquad (2.8.4)$$

Если коэффициенты b_i отличны от нуля, описанная выше процедура должна быть видоизменена. При $v(t) = U_0(t)$ правая часть уравнения (2.8.4) содержит специальные функции различного порядка. Один из удобных подходов предполагает, что для малых неотрицательных значений времени $y(t)$ может быть разложена в ряд Тэйлора (см. приводимый пример).

Пример 2.8.1. Определить импульсную характеристику по уравнению

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = \frac{1}{2}\frac{dv}{dt} + v.$$

Пусть $v = U_0(t)$,

$$y = [c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots]\, U_{-1}(t),$$

где c_i — подлежащие определению коэффициенты,

$$\frac{dy}{dt} = c_0 U_0(t) + [c_1 + 2c_2 t + \ldots]\, U_{-1}(t),$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = c_0 U_1(t) + c_1 U_0(t) + [2c_2 + \ldots]\, U_{-1}(t).$$

После подстановки в дифференциальное уравнение и приведения подобных получим

$$U_1(t)\,[c_0] + U_0(t)\,[c_1 + 3c_0] + U_{-1}(t)\,[2c_2 + 3c_1 + 2c_0] + \ldots = \frac{1}{2}U_1(t) + U_0(t).$$

Приравнивая соответствующие коэффициенты, имеем

$$c_0 = \frac{1}{2}, \quad c_1 + 3c_0 = 1, \quad c_1 = -\frac{1}{2}.$$

Для момента времени $t=0+$

$$y(0+)=c_0=\frac{1}{2},\quad \frac{dy}{dt}(0+)=c_1=-\frac{1}{2}.$$

Из исходного дифференциального уравнения следует, что вспомогательное решение при $t>0$

$$y=K_1e^{-t}+K_2e^{-2t}.$$

Вычисляя K_1 и K_2 по двум определенным начальным условиям, получим $K_1=1/2$, $K_2=0$. Импульсная характеристика

$$h(t)=\frac{1}{2}e^{-t}.$$

Читатель, знакомый с преобразованием Лапласа, может сравнить данный пример с примером 3.5.2.

Импульсная характеристика нестационарных систем. Изложенный выше подход нельзя непосредственно распространить на нестационарные системы, для которых операторы A и B являются функциями времени:

$$a_n(t)\frac{d^ny}{dt^n}+\ldots+a_0(t)y=b_m(t)\frac{d^mv}{dt^m}+\ldots+b_0(t)v,$$
$$A(p,\ t)y(t)=B(p,\ t)v(t)=F(t). \tag{2.8.5}$$

Как для стационарных, так и нестационарных систем справедлив метод, непосредственно связанный с уравнениями (2.6.24)—(2.6.27). Для систем без упреждения при равном нулю входном сигнале при $t<0$ реакция на произвольный входной сигнал описывается уравнением (1.7.2):

$$y(t)=\int_0^t v(\lambda)h(t,\ \lambda)\,d\lambda. \tag{2.8.6}$$

Отметим сходство этого уравнения с уравнениями (2.6.25)—(2.6.27). Так как $y_i(t)$ не зависят от z, а $F(z)$ и $W(z)$ не зависят от i, уравнение (2.6.27) можно переписать в виде

$$y(t)=\int_0^t F(z)\left[\frac{1}{a_n(z)W(z)}\sum_{i=1}^{n}y_i(t)W_{ni}(z)\right]dz, \tag{2.8.7}$$

где y_i — n независимых решений однородного дифференциального уравнения. Выражение в скобках известно как однородная функция Грина и обозначается через [6]

$$g(t,\ z)=\frac{1}{a_n(z)W(z)}\sum_{i=1}^{n}y_i(t)W_{ni}(z). \tag{2.8.8}$$

Тогда

$$y(t)=\int_0^t F(z)\,g(t,\ z)\,dz, \tag{2.8.9}$$

Прежде всего сравним уравнения (2.8.6) и (2.8.9) при $F(t)=$ $=v(t)$, что соответствует $B(p,t)=1$. Тогда

$$h(t,\lambda)=g(t,\lambda) \quad \text{при} \quad 0<\lambda<1.$$

$$h(t,\lambda)=0 \quad \text{при} \quad t<\lambda.$$

Конечно, $\dfrac{W_{ni}(z)}{a_n(z)\,W(z)}$ соответствует в этом случае надлежащим значениям произвольных постоянных в импульсной характеристике. Функция Грина, часто используемая в математической литературе, обладает рядом полезных свойств [6]. Множители в уравнении (2.8.8) можно записать непосредственно в виде определителей на основе уравнения (2.6.19):

$$W(z)=\begin{vmatrix} y_1(z) & y_2(z) & \dots & y_n(z) \\ \dot{y}_1(z) & \dot{y}_2(z) & \dots & \dot{y}_n(z) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{n-1}(z) & y_2^{n-1}(z) & \dots & y_n^{n-1}(z) \end{vmatrix}, \tag{2.8.10}$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i(t)\,W_{ni}(z)=\begin{vmatrix} y_1(z) & y_2(z) & \dots & y_n(z) \\ \dot{y}_1(z) & \dot{y}_2(z) & \dots & \dot{y}_n(z) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{n-2}(z) & y_2^{n-2}(z) & \dots & y_n^{n-2}(z) \\ y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_n(t) \end{vmatrix}=$$

$$=(-1)^{n-1}\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1(z) & y_2(z) & \dots & y_n(z) \\ \dot{y}_1(z) & \dot{y}_2(z) & \dots & \dot{y}_n(z) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{n-2}(z) & y_2^{n-2}(z) & \dots & y_n^{n-2}(z) \end{vmatrix}. \tag{2.8.11}$$

В общем случае $F(t)\neq v(t)$, и функция Грина не совпадает с импульсной характеристикой. Пусть теперь единственным ограничением в уравнении (2.8.5) будет $m<n$,

$$F(t)=B(p,\ t)\,v(t)=[b_m(t)\,p^m+\ldots+b_1(t)\,p+b_0(t)]\,v(t), \tag{2.8.12}$$

где $p=d/dt$. Уравнение (2.8.9) можно использовать для определения импульсной характеристики при известной функции

Грина. Если $v(t) = U_0(t-\lambda)$, то $y(t) = h(t, \lambda)$,

$$h(t, \lambda) = \int_0^t [B(p, z) U_0(z-\lambda)] g(t, z) dz, \tag{2.8.13}$$

здесь $p = d/dz$. Уравнение (2.8.13) используется только для нахождения импульсной характеристики на интервале $0 < \lambda < t$. При этом подынтегральное выражение отлично от нуля лишь при $z = \lambda$, в связи с чем пределы интегрирования можно изменить на $-\infty$ и $+\infty$.

Данное уравнение не является настолько сложным, как это кажется на первый взгляд. Составляющие $B(p, z) U_0(z-\lambda)$ имеют вид

$$b_k(z) \frac{d^k}{dz^k} U_0(z-\lambda) = b_k(z) \frac{d^k}{dz^k} U_0(\lambda - z).$$

Интеграл, содержащий подобную составляющую, вычисляется согласно уравнения (1.6.14), именно:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t, z) b_k(z) \frac{d^k}{dz^k} [U_0(\lambda - z)] dz = (-1)^k \frac{d^k}{d\lambda^k} [g(t, \lambda) b_k(\lambda)]. \tag{2.8.14}$$

Уравнение (2.8.13) поэтому можно переписать в виде

$$h(t, \lambda) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{d^k}{d\lambda^k} [g(t, \lambda) b_k(\lambda)]. \tag{2.8.15}$$

Подобный результат, но более изящным образом, можно получить, используя понятие сопряженного оператора [6].

Таким образом, уравнение (2.8.8) позволяет получить $h(t, \lambda) = g(t, \lambda)$ при $0 < \lambda < t$ и $F(t) = v(t)$. В этом случае $h(t, \lambda)$ определяется согласно уравнениям (2.8.13) или (2.8.15). Указанные уравнения составляют общий метод нахождения импульсной характеристики по линейному дифференциальному уравнению. Принципиальное ограничение состоит в том, что не существует общего метода для определения решений $y_1, \ldots, y_n$ однородного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами.

Пример 2.8.2. Определить импульсную характеристику системы, описываемой следующим дифференциальным уравнением [7]:

$$t^2 \frac{d^2y}{dt^2} + 4t \frac{dy}{dt} + 2y = v.$$

Так как данное уравнение является уравнением Эйлера, то вспомогательное решение находится путем подстановки переменной $t = e^z$, как описано в § 2.7,

$$y_H = \frac{K_1}{t} + \frac{K_2}{t^2}.$$

Имеем $y_1(t) = \frac{1}{t}$ и $y_2(t) = \frac{1}{t^2}$. При определении функции Грина заметим, что

$$W(z) = \begin{vmatrix} \frac{1}{z} & \frac{1}{z^2} \\ \frac{-1}{z^2} & \frac{-2}{z^3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{z^4},$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i(t)\, W_{ni} = (-1) \begin{vmatrix} \frac{1}{t} & \frac{1}{t^2} \\ \frac{1}{z} & \frac{1}{z^2} \end{vmatrix} = \frac{z-t}{t^2 z^2},$$

$$g(t, z) = \left(\frac{1}{z^2}\right)(-z^4)\left(\frac{z-t}{t^2 z^2}\right) = \frac{t-z}{t^2}.$$

Так как в данном примере $B(p, t) = 1$, то

$$h(t, \lambda) = \frac{t-\lambda}{t^2} \quad \text{при} \quad t \geqslant \lambda.$$

Этот результат используется в примерах 1.7.1 и 3.9.4.

§ 2.9. Прямой и обратный разностные операторы

Уравнения в конечных разностях оперируют с функциями дискретной переменной. Пусть $y(k)$ обозначают функцию, определенную только при целых значениях k *). Как описано в первой главе, произвольная функция, определенная в равноотстоящие промежутки времени, может быть выражена подобным образом путем надлежащего выбора масштаба.

Определим оператор сдвига E в виде

$$E[y(k)] = y(k+1). \tag{2.9.1}$$

Последовательное применение этого оператора дает

$$E^2[y(k)] = E[Ey(k)] = y(k+2)$$

или, в общем случае,

$$E^n[y(k)] = y(k+n) \tag{2.9.2}$$

для любого положительного целого числа n. Разностный оператор **) Δ определяется как

$$\Delta y(k) = y(k+1) - y(k). \tag{2.9.3}$$

*) Во многих книгах эта функция обозначается через y_k.

**) Это правый разностный оператор, в отличие от используемого в ряде случаев левого разностного оператора ∇, определяемого выражением $\nabla y(k) = y(k) - y(k-1)$.

Таким образом, последнее выражение можно переписать в виде

$$\Delta y(k) = (E - 1)\, y(k),$$

где операторы Δ и E связаны соотношением

$$\Delta = E - 1. \tag{2.9.4}$$

$\Delta y(k)$ называется первой разностью функции $y(k)$. Разности высшего порядка определяются так:

$$\Delta^2 y(k) = \Delta[\Delta y(k)] = y(k+2) - 2y(k+1) + y(k),$$

$$\Delta^3 y(k) = \Delta[\Delta^2 y(k)] = y(k+3) - 3y(k+2) + 3y(k+1) - y(k)$$

или, в общем случае,

$$\Delta^n y(k) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} y(k+n-r), \tag{2.9.5}$$

где $\binom{n}{r}$ означают биномиальные коэффициенты. Последнее уравнение совместно с уравнениями (2.9.2) и (2.9.4) дает

$$\Delta^n y(k) = (E-1)^n\, y(k) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} E^{n-r} y(k).$$

Операторы E и Δ подчиняются обычным законам алгебры:

$$\begin{gathered} \Delta[cy(k)] = c\,\Delta y(k), \\ \Delta^m[y(k) + z(k)] = \Delta^m y(k) = \Delta^m z(k), \\ \Delta^m \Delta^n y(k) = \Delta^n \Delta^m y(k) = \Delta^{m+n} y(k)), \end{gathered} \tag{2.9.6}$$

где c — постоянная величина, а m и n — положительные целые числа. Уравнение (2.9.6) остается справедливым при замене Δ на E. Операторы коммутативны между собой, но в общем случае не коммутативны с функциями:

$$\Delta[y(k)\, z(k)] \neq y(k)\, \Delta z(k).$$

Оператор Δ для дискретных функций является своего рода аналогом дифференциального оператора $p = d/dt$ для непрерывных функций. Чтобы пояснить сказанное, рассмотрим непрерывную функцию $f(t)$, производная от которой равна

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{T \to 0} \frac{f(t+T) - f(t)}{T}. \tag{2.9.7}$$

Если функция рассматривается только в дискретные моменты $t = nT$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, оператор сдвига и разностный оператор определяются в виде

$$\begin{aligned} Ef(t) &= f(t+T), \\ \Delta f(t) &= f(t+T) - f(t). \end{aligned} \tag{2.9.8}$$

Тогда

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{T \to 0} \frac{\Delta f(t)}{T} \tag{2.9.9}$$

или, в общем случае,

$$\frac{d^m f(t)}{dt^m} = \lim_{T \to 0} \frac{\Delta^m f(t)}{T^m}. \tag{2.9.10}$$

Поэтому нет ничего удивительного в том, что существуют разностные формулы, подобные, но не идентичные, обычным формулам дифференцирования. Например,

$$\begin{aligned} \Delta[y(k)z(k)] &= y(k+1)\Delta z(k) + z(k)\Delta y(k), \\ \Delta\left[\frac{y(k)}{z(k)}\right] &= \frac{z(k)\Delta y(k) - y(k)\Delta z(k)}{z(k)z(k+1)}. \end{aligned} \tag{2.9.11}$$

Дифференцирование многочленов аналогично вычислению разностей факториальных многочленов *). Факториальный многочлен m-го порядка определяется как

$$(k)^{(m)} = k(k-1)(k-2)\ldots(k-m+1), \tag{2.9.12}$$

где m — положительное целое число. Заметим, что $(k)^m$ состоит из m множителей. Используя определение разностного оператора, найдем

$$\Delta(k)^{(m)} = m(k)^{(m-1)} = mk(k-1)(k-2)\ldots(k-m+2). \tag{2.9.13}$$

Ввиду аналогии между Δ и p вполне логично задать вопрос, существует ли для дискретных функций оператор, аналогичный интегральному оператору p^{-1}, где

$$p^{-1}[f(t)] = \int f(t)\,dt + c = \int_{t_0}^{t} f(\lambda)\,d\lambda + K; \tag{2.9.14}$$

c и K — постоянные интегрирования. Нижний предел t_0 — произвольный и формирует часть постоянной интегрирования, а именно:

$$c = K - \left[\int f(t)\,dt\right]_{t=t_0}.$$

*) Произвольный обыкновенный многочлен можно представить в виде суммы факториальных многочленов. См., например, [8].

Выражение

$$y(t) = p^{-1}[f(t)] \tag{2.9.15}$$

является общим решением уравнения

$$py(t) = f(t). \tag{2.9.16}$$

Соответственно,

$$pp^{-1}f(t) = f(t). \tag{2.9.17}$$

По аналогии обратный разностный оператор Δ^{-1} должен иметь такой вид, чтобы выражение

$$y(k) = \Delta^{-1}f(k) \tag{2.9.18}$$

являлось общим решением уравнения

$$\Delta y(k) = f(k) \tag{2.9.19}$$

или, соответственно, чтобы удовлетворялось равенство

$$\Delta\Delta^{-1}f(k) = f(k). \tag{2.9.20}$$

Так как

$$\Delta\left[\sum_{n=0}^{k-1} f(n) + K\right] = [f(k) + f(k-1) + \ldots + f(0) + K] - \\ - [f(k-1) + \ldots + f(0) + K] = f(k),$$

то обратный разностный оператор, удовлетворяющий уравнениям (2.9.19) и (2.9.20), имеет вид

$$\Delta^{-1}f(k) = \sum_{n=0}^{k-1} f(n) + K. \tag{2.9.21}$$

Обратный оператор можно переписать как

$$\Delta^{-1}f(k) = \sum^{n=k-1} f(n) + c = \sum^{n=k} f(n-1) + c, \tag{2.9.22}$$

где суммирование производится по фиктивной переменной n. Нижний предел в уравнении (2.9.22) не указывается, так как можно объединить произвольное фиксированное число членов $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, ... в уравнении (2.9.21) с постоянной суммирования K, образуя новую постоянную c. Он выбирается наиболее выгодным образом для каждого конкретного случая. Произвольный нижний предел в уравнении (2.9.22) является аналогом произвольной постоянной t_0 в уравнении (2.9.14).

Известно, что точное вычисление интегралов требует определенного искусства, порой встречает трудности, а в ряде случаев и невозможно. Так как не существует принципиальных

трудностей в суммировании конечного числа членов, очевидно, что для оператора Δ^{-1} подобная проблема не возникает. Однако, непосредственное вычисление $\Delta^{-1}f(k)$ на основе уравнения (2.9.22) для широкого диапазона значений зачастую без необходимости утомительно. При неограниченном увеличении k неограниченно растет и число членов при суммировании. Следует стремиться выражать $\Delta^{-1}f(k)$ в замкнутой форме.

Суммирование конечных рядов составляет одну из тем, обычно включаемую в книги по конечным разностям. Существующий аппарат включает в себя таблицы формул суммирования, правило суммирования по частям (аналогичное, но не тождественное интегрированию по частям), использование многочленов Бернулли, использование элементарных дробей. Например, сумма телескопического ряда

$$\sum_{n=2}^{k} \frac{1}{n(n-1)}$$

легко находится, если учесть

$$\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

Результат:

$$\sum_{n=2}^{k} \frac{1}{n(n-1)} = 1 - \frac{1}{k}. \tag{2.9.23}$$

Суммирование некоторых очень простых функций (например, $\sum^{n=k} \frac{1}{n}$) не может быть представлено в замкнутой форме при помощи элементарных функций. В некоторых из указанных случаев можно воспользоваться приближенными выражениями.

Полезно отметить, что при использовании факториальных многочленов уравнение (2.9.13) преобразуется к виду

$$\Delta^{-1}(k)^{(m)} = \frac{1}{m+1}(k)^{(m+1)} + K$$

или

$$\Delta^{-1}[k(k-1)\ldots(k-m+1)] = \sum^{n=k-1} n(n-1)\ldots(n-m+1) =$$

$$= \frac{1}{m+1} k(k-1)\ldots(k-m) + K. \tag{2.9.24}$$

В последующих параграфах читатель заметит поразительное сходство между решениями дифференциальных и разностных

уравнений *). Предположение об этом можно было уже сделать на основе аналогии операторов p и Δ, p^{-1} и Δ^{-1}. Несмотря на ряд отличий, основные методы решения дифференциальных уравнений имеют соответствующие аналоги для решения разностных уравнений. По этой причине изложение разностных уравнений дается более кратко и сжато, чем дифференциальных уравнений.

§ 2.10. Представление дискретных систем в виде разностных уравнений

Общий вид разностного уравнения, связывающего выход $y(k)$ и вход $v(k)$ дискретной системы, задается выражением

$$a_n y(k+n) + a_{n-1} y(k+n-1) + \ldots + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) = \\ = b_m v(k+m) + \ldots + b_1 v(k+1) + b_0 v(k) \qquad (2.10.1)$$

или, соответственно,

$$[c_n \Delta^n + c_{n-1}\Delta^{n-1} + \ldots + c_1\Delta + c_0]\, y(k) = \\ = [d_m \Delta^m + \ldots + d_1\Delta + d_0]\, v(k). \qquad (2.10.2)$$

Любое из указанных двух уравнений легко получить из другого на основе уравнений (2.9.1)—(2.9.5). Второе — более близкий аналог дифференциального уравнения (2.2.1); однако первое легче использовать — и оно наиболее распространено. Для линейных систем a_i, b_i, c_i и d_i не являются функциями от y или v, но они могут зависеть от k. Для линейных систем с постоянными параметрами эти коэффициенты — постоянные величины.

Используя оператор сдвига E, уравнение (2.10.1) можно переписать в виде

$$(a_n E^n + a_{n-1} E^{n-1} + \ldots + a_1 E + a_0)\, y(k) = \\ = (b_m E^m + \ldots + b_1 E + b_0)\, v(k). \qquad (2.10.3)$$

Так как вход $v(k)$ предполагается известным, правая часть уравнения (2.10.1) представляется в виде известной вынуждающей функции $F(k)$. Для линейных систем с постоянными параметрами, коэффициенты которых являются постоянными величинами, последнее уравнение записывается символически как

$$A(E)\, y(k) = B(E)\, v(k) = F(k). \qquad (2.10.4)$$

Разностные уравнения используются при операциях с функциями дискретного переменного. Примером систем, описываемых

*) Действительно, разностные уравнения могут использоваться для приближенного решения обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений в частных производных. С другой стороны, разностные уравнения образуют как бы мост между этими типами уравнений.

уравнениями в конечных разностях, служат вычислительные устройства, последовательностные цепи, системы с элементами запаздывания. Произвольная система, в которой взаимосвязь входа и выхода определяется только в равноотстоящие интервалы $t = kT$, описывается разностным уравнением

$$a_n y(kT + nT) + a_{n-1} y(kT + nT - T) + \ldots + a_1 y(kT + T) + a_0 (kT) = \\ = b_m v(kT + mT) + \ldots + b_1 v(kT + T) + b_0 v(kT),$$

где k, m и n — целые числа. Из уравнения следует, что выходная величина в момент $t = (k + n)T$ выражается через ее прошлые значения от $t = kT$ до $(k + n - 1)T$ и значения входа от $t = kT$ до $(k + m)T$. Для систем без упреждения $m \leqslant n$. Если масштаб времени выбрать таким образом, чтобы $T = 1$, это уравнение совпадает с уравнением (2.10.1).

К разностным уравнениям прибегают также в случаях, отличных от упомянутых выше. Правая часть уравнений (2.10.3) и (2.10.4) не обязательно непосредственно зависит от входной величины, а дискретная переменная может означать не время, а положение. В следующих двух примерах*) иллюстрируется использование разностных уравнений при разном характере последовательных равных интервалов (времени и положения).

Пример 2.10.1. Примером повторяющейся через равные интервалы структуры служит последовательное соединение T-образных звеньев, как показано

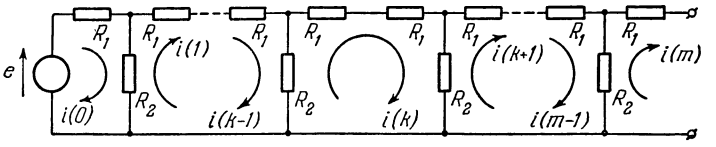


Рис. 2.10.1.

на рис. 2.10.1. Токи являются функциями указателя положения K. Требуется определить $i(k)$ при $k=0, 1, 2, \ldots, m$. Уравнение для K-й ячейки имеет вид

$$-R_2 i(k-1) + 2(R_1 + R_2) i(k) - R_2 i(k+1) = 0.$$

Это — разностное однородное уравнение второго порядка. Его решение для i в зависимости от k дается в примере 2.12.1. Если сопротивление R_2 заменить емкостью C, то уравнение для r-й ячейки станет дифференциально-разностным уравнением. Решение для i в зависимости от непрерывной переменной t и дискретной переменной k приводится в примере 3.7.3.

Пример 2.10.2. Системы, подверженные действию периодических входных сигналов или периодическим коммутациям, служат примерами систем, заданных на последовательных равных интервалах времени. На рис. 2.10.2 показана электрическая цепь с источником напряжения прямоугольной формы.

*) Эти примеры подобны рассмотренным в [9].

Определить ток, предполагая отсутствие начальной запасенной энергии в цепи. Решение можно найти, определяя реакцию последовательно для каждого периода, но этот путь крайне утомителен. Установившееся решение можно получить, используя ряды Фурье; однако решение получается не в замкнутой форме, а в виде бесконечного ряда. Исследуем k-й период, для удобства принимая начало этого периода за начало отсчета времени. Дифференциальные уравнения, описывающие электрическую цепь, имеют вид

$$\frac{di_1}{dt}+i_1=1 \quad \text{при} \quad 0<t<1,$$

$$\frac{di_2}{dt}+i_2=0 \quad \text{при} \quad 1<t<2,$$

где индексы 1 и 2 обозначают соответственно первый и второй полупериоды. Так как ток зависит от рассматриваемого периода времени, то он опять зависит от дискретной переменной k, а также от непрерывной переменной t.

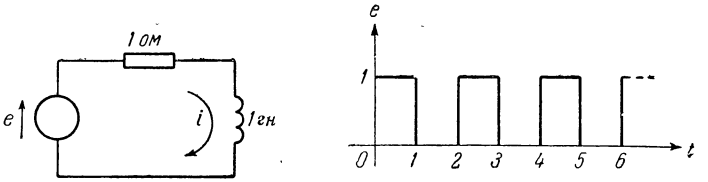


Рис. 2.10.2.

Решение приводится в примере 2.12.3. Совместно с приведенными выше дифференциальными уравнениями необходимо решать разностное уравнение первого порядка.

§ 2.11. Основные свойства линейных разностных уравнений

Линейное разностное уравнение n-го порядка можно записать в форме (2.10.3), а именно:

$$(a_nE^n+a_{n-1}E^{n-1}+\ldots+a_1E+a_0)y(k)=F(k), \qquad (2.11.1)$$

где $a_n\neq0$, $a_0\neq0$ и a_i определены для всех интересующих нас целых значений k. Выражения этого параграфа справедливы как для уравнений с постоянными, так и переменными коэффициентами и в общем случае a_i могут зависеть от k. Если $a_0=0$, $a_1\neq0$ и $a_n\neq0$, то имеем уравнение $(n-1)$-го порядка. В отличие от дифференциального уравнения, порядок разностного уравнения определяется как разность между высшей и низшей степенями E. При использовании оператора Δ, например, в уравнении

$$(c_n\Delta^n+c_{n-1}\Delta^{n-1}+\ldots+c_1\Delta+c_0)y(k)=F(k), \qquad (2.11.2)$$

установить порядок уравнения непосредственно по его виду не представляется возможным. Так, уравнение $(\Delta^2+3\Delta+2)y(k)=0$ эквивалентно

$$(E^2+E)y(k)=0,$$

являющемуся уравнением первого, а не второго порядка. Уравнение (2.11.1) называют неоднородным разностным уравнением, в отличие от однородного разностного уравнения n-го порядка

$$(a_n E^n + a_{n-1} E^{n-1} + \ldots + a_1 E + a_0) y(k) = 0. \qquad (2.11.3)$$

Разностные уравнения называют также рекуррентными формулами. Уравнение (2.11.1) можно переписать в виде

$$y(k+n) = -\frac{1}{a_n}[a_{n-1} y(k+n-1) + \ldots + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) + F(k)]. \qquad (2.11.4)$$

Если известны величины $y(0) \div y(n-1)$, то $y(k)$ непосредственно находится для всех $k \geqslant n$ путем последовательного применения уравнения (2.11.4). Таким образом, в отличие от дифференциальных уравнений, непосредственно по разностному уравнению можно определить $y(k)$ для любых значений k (набравшись достаточно терпения или при помощи вычислительного устройства); решение дается в виде первых n значений $y(k)$*). Величины $y(0) \div y(n-1)$ или эквивалентная информация необходимы для единственности решения уравнения (2.11.1).

Обычно при «формировании решения» уравнения (2.11.1) не прибегают к построению итерационной процедуры, описываемой уравнением (2.11.4). Оставшаяся часть этой главы в основном связана с нахождением решений $y(k)$ уравнений (2.11.1) или (2.11.3) в замкнутой форме.

Однородное дифференциальное уравнение n-го порядка содержит n линейно независимых решений. Если $a_n \neq 0$ и $a_0 \neq 0$, то независимые уравнения (2.11.3) можно обозначить через $y_1(k), y_2(k), \ldots, y_n(k)$. Необходимое и достаточное условие линейной независимости решений имеет вид

$$W(k) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ Ey_1 & Ey_2 & \ldots & Ey_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ E^{n-1}y_1 & E^{n-1}y_2 & \ldots & E^{n-1}y_n \end{vmatrix} \neq 0\ ^{**}). \qquad (2.11.5)$$

В общем виде решение уравнения (2.11.3) представляется как

$$u_H = C_1 y_1(k) + C_2 y_2(k) + \ldots + C_n y_n(k), \qquad (2.11.6)$$

где C_i — произвольные постоянные, не зависящие от k.

---

*) Сказанное лежит в основе одного из численных методов решения дифференциальных уравнений.

**) Функция W_k представляет собой аналог определителя Вронского, но ее обычно называют определителем Касорати и обозначают символом $C(k)$.

Общее решение уравнения (2.11.1) имеет вид

$$y = y_H + y_P,$$

где y_H задается уравнением (2.11.6), а y_P — произвольное решение, удовлетворяющее уравнению (2.11.1). Составляющие y_H и y_P называют соответственно вспомогательным и частным решениями. Так как y_P не содержит произвольных постоянных, то в решении y содержатся n произвольных постоянных, которые должны определяться по начальным или граничным условиям, как показано в примерах 2.12.1 и 2.12.4.

§ 2.12. Решение разностных уравнений с постоянными коэффициентами

Для разностных уравнений с постоянными коэффициентами существуют детально разработанные методы нахождения решения в замкнутой форме. Неоднородное и однородное разностные уравнения n-го порядка задаются соответственно уравнениями (2.11.1) и (2.11.3), где a_i — постоянные коэффициенты.

Однородные разностные уравнения. Рассмотрим уравнение n-го порядка

$$(a_n E^n + a_{n-1} E^{n-1} + \ldots + a_1 E + a_0)\, y(k) = 0. \qquad (2.12.1)$$

По аналогии с § 2.6 предполагаемое решение следует искать в виде

$$y(k) = e^{rk}, \qquad (2.12.2)$$

где r — подлежащая определению постоянная величина.

Пример 2.12.1. Определить зависимость i от k в примере 2.10.1. Уравнение для r-й ячейки на рис. 2.10.1 имеет вид

$$-R_2 i(k-1) + 2(R_1+R_2)\, i(k) - R_2 i(k+1) = 0. \qquad (2.12.3)$$

Этому разностному уравнению второго порядка соответствуют два независимых решения. Полагая $i(k) = e^{rk}$, имеем

$$\left[-R_2 e^{-r} + 2(R_1+R_2) - R_2 e^{r}\right] e^{rk} = 0.$$

Выражение в скобках, являющееся многочленом от e^r, равно нулю, если

$$\operatorname{ch} r = \frac{R_1+R_2}{R_2}.$$

Так как $\operatorname{ch}(-\theta) = \operatorname{ch}(\theta)$, то два допустимые решения равны $r = \pm\theta$, где

$$\operatorname{ch}\theta = \frac{R_1+R_2}{R_2}. \qquad (2.12.4)$$

Общее решение имеет вид

$$i(k) = C_1 e^{k\theta} + C_2 e^{-k\theta}.$$

Граничные условия, необходимые для вычисления произвольных постоянных C_1 и C_2, находятся из рассмотрения первой и последней ячеек на рис. 2.10.1

$$(R_1 + R_2)\, i\,(0) - R_2 i\,(1) = e, \qquad i\,(m) = 0. \tag{2.12.5}$$

Из второго граничного условия $C_1 e^{m\theta} + C_2 e^{-m\theta} = 0$ следует

$$C_2 = -\,C_1 e^{2m\theta}$$

и

$$i\,(k) = C_1\left[e^{k\theta} - e^{2m\theta} e^{-k\theta}\right] = -\,2C_1 e^{m\theta}\,\mathrm{sh}\,(m-k)\,\theta.$$

Из первого граничного условия

$$(R_1 + R_2)\left[-\,2C_1 e^{m\theta}\,\mathrm{sh}\,m\theta\right] - R_2\left[-\,2C_1 e^{m\theta}\,\mathrm{sh}\,(m-1)\,\theta\right] = e.$$

С учетом того, что

$$R_1 + R_2 = R_2\,\mathrm{ch}\,\theta$$

и

$$\mathrm{sh}\,(m-1)\,\theta = \mathrm{sh}\,m\theta\,\mathrm{ch}\,\theta - \mathrm{sh}\,\theta\,\mathrm{ch}\,m\theta,$$

следует

$$2C_1 R_2 e^{m\theta}\left[-\,\mathrm{sh}\,m\theta\,\mathrm{ch}\,\theta + \mathrm{sh}\,m\,\theta\,\mathrm{ch}\,\theta - \mathrm{sh}\,\theta\,\mathrm{ch}\,m\theta\right] = e,$$

откуда

$$2C_1 e^{m\theta} = \frac{-\,e}{R_2\,\mathrm{sh}\,\theta\,\mathrm{ch}\,m\theta}.$$

Окончательно

$$i\,(k) = \frac{e\,\mathrm{sh}\,(m-k)\,\theta}{R_2\,\mathrm{sh}\,\theta\,\mathrm{ch}\,m\theta} \tag{2.12.6}$$

при $k=0, 1, 2, \ldots, m$, а θ задается уравнением (2.12.4). В примере 3.7.3 приводится решение для i в функции t и k при замене сопротивления R_2 на рис. 2.10.1 емкостью C.

Вид предполагаемого решения, задаваемый уравнением (2.12.2), не является наиболее распространенным, хотя он и чрезвычайно удобен для примера 2.12.1. Напомним из примера, что допустимые значения r служат корнями многочлена от e^r. При $\beta = e^r$ предполагаемое решение становится таким:

$$y\,(k) = \beta^k, \tag{2.12.7}$$

где β — подлежащая определению постоянная величина. Подставляя уравнение (2.12.7) в (2.12.1) и учитывая $E^m\beta^k = \beta^m\beta^k$, получим следующее характеристическое уравнение:

$$a_n\beta^n + a_{n-1}\beta^{n-1} + \ldots + a_1\beta + a_0 = 0. \tag{2.12.8}$$

На практике это уравнение записывается непосредственно по виду разностного уравнения (2.12.1).

Если n корней характеристического уравнения различны и обозначаются $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, общее решение однородного разностного уравнения имеет вид

$$y_H = C_1\beta_1^k + C_2\beta_2^k + \ldots + C_n\beta_n^k. \tag{2.12.9}$$

Можно показать, что при различных β_i отдельные решения $y_1=\beta_1^k$, $y_2=\beta_2^k$, ..., $y_n=\beta_n^k$ удовлетворяют уравнению (2.11.5) и, следовательно, независимы [10]. Если, например, корень β_1 имеет кратность m, то общее решение имеет вид:

$$y_H=C_1\beta_1^k+C_2k\beta_1^k+\ldots+C_mk^{m-1}\beta_1^k+C_{m+1}\beta_{m+1}^k+\ldots+C_n\beta_n^k. \tag{2.12.10}$$

Для любого комплексного корня характеристического уравнения с действительными коэффициентами должен существовать и комплексно сопряженный корень.

Паре простых корней $\beta_1=\rho e^{j\theta}$ и $\beta_2=\rho e^{-j\theta}$, где ρ и θ — действительные числа, соответствует составляющая решения

$$C_1\beta_1^k+C_2\beta_2^k=\rho^k[A\cos\theta k+B\sin\theta k]=C\rho^k\cos(\theta k+\varphi), \tag{2.12.11}$$

где A, B, C и φ — произвольные действительные постоянные.

Специального упоминания требуют корни характеристического уравнения $\beta=0$. При $a_0=0$, $a_1\neq0$ и $a_n\neq0$ в уравнении (2.12.1) характеристическое уравнение содержит один нулевой корень. Так как в этом случае порядок разностного уравнения равен $n-1$, а характеристический многочлен имеет порядок n, то нулевой корень оказывается лишним и не должен учитываться. Подобным образом не должны учитываться и нулевые корни более высокого порядка.

Неоднородные разностные уравнения. Метод неопределенных коэффициентов. Рассмотрим разностное уравнение n-го порядка

$$(a_nE^n+a_{n-1}E^{n-1}+\ldots+a_1E+a_0)\,y(k)=F(k), \tag{2.12.12}$$

решение которого имеет вид:

$$y(k)=y_H+y_P. \tag{2.12.13}$$

Вспомогательное решение y_H находится из решения соответствующего однородного уравнения (2.12.11). Частное решение y_P находится на основе тех же самых двух методов, как и в случае дифференциальных уравнений, а именно: методов неопределенных коэффициентов и вариации параметров.

Метод неопределенных коэффициентов применим лишь в том случае, если в результате последовательного воздействия оператором E на возмущающую функцию $F(k)$ получаем конечное число линейно независимых членов. $F(k)$ может быть многочленом, экспоненциальной, синусоидальной или гиперболической функцией (т. е. $k^m+\ldots+b_1k+b_0$, c^k, $\sin\theta k$ или $\cos\theta k$, $\operatorname{sh}\theta k$ или $\operatorname{ch}\theta k$) или содержать линейную комбинацию указанных функций. Решение ищут в виде линейной комбинации составляющих $F(k)$, $F(k+1)$, $F(k+2)$, ..., причем каждая из со-

ставляющих входит с неопределенным постоянным коэффициентом. Неопределенные коэффициенты выбираются таким образом, чтобы предполагаемое решение удовлетворяло уравнению (2.12.12) при всех значениях k.

Если составляющие $F(k)$, $F(k+1)$, $F(k+2)$,... имеют такой же вид, как и составляющие y_H, то предполагаемое частное решение видоизменяется. Все составляющие y_P, соответствующие таким же составляющим y_H, необходимо умножить на k в такой наименьшей степени, чтобы их тождественность нарушилась.

Пример 2.12.2. Найти общее решение уравнения

$$(E^2+2E+1)\,y(k)=k(-1)^k.$$

Характеристическое уравнение

$$\beta^2+2\beta+1=0,$$

так что $\beta_1=\beta_2=-1$ и $y_H=C_1(-1)^k+C_2k(-1)^k$.

Обычно $y_P=[Ak+B](-1)^k$, но из-за кратности корня характеристического уравнения решение y_P ищем в виде

$$y_P=[Ak^3+Bk^2]\,(-1)^k,$$

Тогда

$$Ey_P=-\,[A\,(k+1)^3+B\,(k+1)^2]\,(-1)^k,$$

$$E^2y_P=[A\,(k+2)^3+B\,(k+2)^2\,(-1)^k.$$

Подставив эти выражения в левую часть разностного уравнения, получим

$$[(6k+6)\,A+2B)\,]\,(-1)^k=k\,(-1)^k,$$

откуда $A=\frac{1}{6}$ и $B=-\frac{1}{2}$. Окончательно решение имеет вид

$$y\,(k)=\left[C_1+C_2k-\frac{1}{2}\,k^2+\frac{1}{6}\,k^3\right](-1)^k.$$

Пример 2.12.3. Решить пример 2.10 2 относительно i как функции t и k.

Реакция электрической цепи на рис. 2.10.2 в течение k-го периода описывается как

$$\begin{aligned}\frac{di_1}{dt}+i_1&=1 \quad \text{при} \quad 0<t<1,\\ \frac{di_2}{dt}+i_2&=1 \quad \text{при} \quad 1<t<2,\end{aligned} \tag{2.12.14}$$

где индексы 1 и 2 обозначают соответственно первый и второй полупериоды. Решение этих уравнений

$$\begin{aligned}i_1\,(t,\ k)&=1+C_1\,(k)\,e^{-t} \quad \text{при} \quad 0<t<1,\\ i_2\,(t,\ k)&=C_2\,(k)\,e^{-t} \quad \text{при} \quad 1<t<2.\end{aligned} \tag{2.12.15}$$

Коэффициенты C_1 и C_2 не зависят от t, но могут быть функциями текущего периода k. Поскольку ток не может изменяться мгновенно, то

$$i_1\,(1,\ k)=i_2\,(1,\ k) \quad \text{и} \quad i_1\,(0,\ k+1)=i_2\,(2,\ k).$$

Так как в начале первого периода ток равен нулю, то

$$i_1(0,\ 1) = 0.$$

Подставив каждое из трех условий в уравнение (2.12.15), получим соответственно

$$C_2(k) = C_1(k) + e, \tag{2.12.16}$$

$$1 + C_1(k+1) = C_2(k)\, e^{-2}, \tag{2.12.17}$$

$$C_1(1) = -1. \tag{2.12.18}$$

Уравнения (2.12.16) и (2.12.17) сводятся к разностному уравнению первого порядка:

$$C_1(k+1) - e^{-2} C_1(k) = -1 + e^{-1}.$$

Вспомогательное решение равно

$$C_{1_H}(k) = ce^{2-k}.$$

Предполагая, что частное решение имеет вид

$$C_{1_P}(k) = a,$$

и подставив его в разностное уравнение, получим

$$a(1 - e^{-2}) = -1 + e^{-1}.$$

Следовательно,

$$a = \frac{-1}{1 + e^{-1}}.$$

Общее решение имеет вид

$$C_1(k) = ce^{-2k} - \frac{1}{1 + e^{-1}}.$$

На основе уравнения (2.12.18) получим

$$c = -\frac{e^2}{1+e},$$

а окончательно

$$C_1(k) = -\frac{e + e^{2(1-k)}}{1+e}$$

и

$$i_1(t,\ k) = 1 - \frac{e + e^{2(1-k)}}{1+e}\, e^{-t} \quad \text{при} \quad 0 < t < 1,$$

$$i_2(t,\ k) = \frac{e^2 - e^{2(1-k)}}{1+e}\, e^{-t} \quad \text{при} \quad 1 < t < 2.$$

Видно, что при стремлении k к бесконечности установившаяся реакция равна

$$\begin{aligned} i_1(t) &= 1 - \frac{e}{1+e}\, e^{-t} \quad \text{при} \quad 0 < t < 1, \\ i_2(t) &= \frac{e^2}{1+e}\, e^{-t} \quad \text{при} \quad 1 < t < 2. \end{aligned} \tag{2.12.19}$$

Число периодов, необходимое для «достижения» установившегося режима, характеризуется выражением

$$e^{2(1-k)} \ll e.$$

Неоднородные разностные уравнения. Вариация параметров. При известном решении вспомогательного уравнения метод вариации параметров позволяет получить выражение для y_P вне зависимости от характера функции $F(k)$. Если применение этого метода к дифференциальным уравнениям сводится в конечном счете к интегрированию некоторой известной функции t, то применительно к разностным уравнениям приходим к суммированию некоторой известной функции k.

Рассмотрим уравнение первого порядка:

$$(a_1E+a_0)y(k)=F(k). \tag{2.12.20}$$

Вспомогательное решение содержит лишь один член $y_H=Cy_1(k)$. Предполагаем, что частное решение имеет вид

$$y_P=\mu(k)y_1(k). \tag{2.12.21}$$

Подстановка уравнения (2.12.21) в (2.12.20) дает

$$a_1\mu(k+1)y_1(k+1)+a_0\mu(k)y_1(k)=F(k).$$

Преобразуем его к виду

$$a_1[\mu(k+1)y_1(k+1)-\mu(k)y_1(k+1)]+$$
$$+\mu(k)[a_1y_1(k+1)+a_0y_1(k)]=F(k).$$

Выражение в первых скобках равно $y_1(k+1)\Delta\mu(k)$, а выражение во вторых скобках равно нулю, так как $y_1(k)$ является решением соответствующего однородного уравнения. Следовательно,

$$a_1y_1(k+1)\Delta\mu(k)=F(k),$$

откуда на основе уравнения (2.9.22) имеем

$$\mu(k)=\Delta^{-1}\left[\frac{F(k)}{a_1y_1(k+1)}\right]=\sum^{n=k}\frac{F(n-1)}{a_1y_1(n)}. \tag{1.12.22}$$

Пример 2.12.4. Найти общее решение уравнения

$$(E+3)\,y(k)=\frac{(-3)^k}{k(k+1)}.$$

Вспомогательное решение имеет вид

$$y_H=C(-3)^k,\quad y_1(k)=(-3)^k.$$

Частное решение ищем в виде

$$y_P=\mu(k)(-3)^k.$$

На основе уравнения (2.12.22)

$$\mu(k)=\sum_{n=2}^{k}\frac{(-3)^{n-1}/(n-1)\,n}{(-3)^n}=\sum_{n=2}^{k}\frac{1}{-3(n-1)\,n}.$$

Учитывая уравнение (2.9.23), получим

$$\mu(k) = -\frac{1}{3}\left[1 - \frac{1}{k}\right],$$

и общее решение представится в виде

$$y(k) = \left[C - \frac{1}{3} + \frac{1}{3k}\right](-3)^k = \left[C_1 + \frac{1}{3k}\right](-3)^k.$$

Рассмотрим теперь уравнение второго порядка

$$(a_2E^2 + a_1E + a_0)y(k) = F(k). \qquad (2.12.23)$$

Вспомогательное решение имеет вид

$$y_H = C_1y_1(k) + C_2y_2(k).$$

Частное решение имеем в форме

$$y_P = \mu_1(k)y_1(k) + \mu_2(k)y_2(k). \qquad (2.12.24)$$

Одним из двух условий, необходимых для вычисления μ_1 и μ_2, является то, что уравнение (2.12.24) должно удовлетворять уравнению (2.12.23). По аналогии с уравнением (2.6.14) второе условие выбирается произвольно, чтобы

$$y_1(k+1)\Delta\mu_1(k) + y_2(k+1)\Delta\mu_2(k) = 0. \qquad (2.12.25)$$

Так как

$$\mu_i(k+1) = \mu_i(k) + \Delta\mu_i(k),$$

то из уравнения (2.12.15) следует

$$\begin{aligned} Ey_P &= y_1(k+1)[\mu_1(k) + \Delta\mu_1(k)] + y_2(k+1)[\mu_2(k) + \Delta\mu_2(k)] = \\ &= y_1(k+1)\mu_1(k) + y_2(k+1)\mu_2(k) \end{aligned}$$

и

$$E^2y_P = y_1(k+2)[\mu_1(k) + \Delta\mu_1(k)] + y_2(k+2)[\mu_2(k) + \Delta\mu_2(k)].$$

Подставив эти выражения в уравнение (2.12.23), после преобразований получим

$$\begin{aligned} a_2[y_1(k+2)\Delta\mu_1(k) + y_2(k+2)\Delta\mu_2(k)] &+ \\ + \mu_1(k)[a_2y_1(k+2) + a_1y_1(k+1) + a_0y_1(k)] &+ \\ + \mu_2(k)[a_2y_2(k+2) + a_1y_2(k+1) + a_0y_2(k)] &= F(k). \end{aligned}$$

Так как $y_1(k)$ и $y_2(k)$ являются решениями соответствующего однородного уравнения, то

$$y_1(k+2)\Delta\mu_1(k) + y_2(k+2)\Delta\mu_2(k) = \frac{F(k)}{a_2}. \qquad (2.12.26)$$

Решая однородные уравнения (2.12.25) и (2.12.26), получим

$$\Delta\mu_1(k) = \frac{-y_2(k+1)F(k)}{a_2[y_1(k+1)y_2(k+2) - y_1(k+2)y_2(k+1)]};$$

$$\Delta\mu_2(k) = \frac{y_1(k+1)F(k)}{a_2[y_1(k+1)y_2(k+2) - y_1(k+2)y_2(k+1)]}, \qquad (2.12.27)$$

откуда

$$\mu_1(k) = -\sum^{n=k} \frac{y_2(n)F(n-1)}{a_2[y_1(n)y_2(n+1) - y_1(n+1)y_2(n)]},$$

$$\mu_2(k) = \sum^{n=k} \frac{y_1(n)F(n-1)}{a_2[y_1(n)y_2(n+1) - y_1(n+1)y_2(n)]}. \qquad (2.12.28)$$

Так как предполагалось, что y_1 и y_2 — независимые решения однородного уравнения, то из уравнения (2.11.5) следует, что знаменатели в (2.12.27) и (2.12.28) отличны от нуля. Поэтому $\mu_1(k)$ и $\mu_2(k)$ всегда можно непосредственно определить.

Пример 2.12.5. Решить пример 2.12 12 методом вариации параметров

$$(E^2 + 2E + 1)\,y(k) = k(-1)^k.$$

Пусть

$$y_P = \mu_1(k)\,y_1(k) + \mu_2(k)\,y_2(k),$$

где

$$y_1(k) = (-1)^k, \qquad y_2(k) = k(-1^k).$$

Заметим, что

$$y_1(k)\,y_2(k+1) - y_1(k+1)\,y_2(k) = -1.$$

На основе уравнения (2.12.28) имеем

$$\mu_1(k) = \sum^{n=k} n(-1)^n(n-1)(-1)^{n-1} =$$

$$= -\sum^{n=k} n(n-1) = -k(k-1) - \sum^{n=k-1} n(n-1).$$

Используя уравнение (2.9.24) при $m = 2$, получим

$$\mu_1(k) = -k(k-1) - \frac{1}{3}k(k-1)(k-2) = -\frac{1}{3}(k^3 - k).$$

Подобным образом

$$\mu_2(k) = -\sum^{n=k}(-1)^n(n-1)(-1)^{n-1} = \sum^{n=k}(n-1) = \frac{1}{2}k(k-1).$$

Тогда

$$y_P = -\frac{1}{3}(k^3 - k)(-1)^k + \frac{1}{2}(k^2 - k)k(-1)^k = \left[\frac{1}{6}k^3 - \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{3}k\right](-1)^k.$$

Общее решение имеет вид

$$y(k) = \left[C_1 + C_2 k - \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{6}k^3\right](-1)^k,$$

что совпадает с примером 2.12.2.

Рассмотрим, наконец, разностное уравнение n-го порядка (2.12.12), вспомогательное решение которого имеет вид

$$y_H = C_1 y_1(k) + C_2 y_2(k) + \ldots + C_n y_n(k).$$

Частное решение ищем в виде

$$y_P = \mu_1(k)\, y_1(k) + \mu_2(k)\, y_2(k) + \ldots + \mu_n(k)\, y_n(k). \quad (2.12.29)$$

Следующие $n-1$ условий выбираются произвольно с целью упрощения решения:

$$\begin{gathered} y_1(k+1)\,\Delta\mu_1(k) + y_2(k+1)\,\Delta\mu_2(k) + \ldots + y_n(k+1)\,\Delta\mu_n(k) = 0, \\ y_1(k+2)\,\Delta\mu_1(k) + y_2(k+2)\,\Delta\mu_2(k) + \ldots + y_n(k+2)\,\Delta\mu_n(k) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_1(k+n-1)\,\Delta\mu_1(k) + y_2(k+n-1)\,\Delta\mu_2(k) + \ldots \\ \ldots + y_n(k+n-1)\,\Delta\mu_n(k) = 0. \end{gathered} \quad (2.12.30)$$

Подставив уравнение (2.12.29) в уравнение (2.12.12) и используя (2.12.30), получим

$$y_1(k+n)\,\Delta\mu_1(k) + y_2(k+n)\,\Delta\mu_2(k) + \ldots + y_n(k+n)\,\Delta\mu_n(k) = \frac{F(k)}{a_n}. \quad (2.12.31)$$

Решая уравнения (2.12.30) и (2.12.31), на основе правила Крамера имеем

$$\Delta\mu_i = \frac{W_{ni}(k+1)\,F(k)}{a_n W(k+1)} \quad (2.12.32)$$

или

$$\mu_i = \sum^{r=k} \frac{W_{ni}(r)\,F(r-1)}{a_n W(r)}, \quad (2.12.33)$$

где

$$W(k) = \begin{vmatrix} y_1(k) & y_2(k) & \ldots & y_n(k) \\ Ey_1(k) & Ey_2(k) & \ldots & Ey_n(k) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ E^{n-1}y_1(k) & E^{n-1}y_2(k) & \ldots & E^{n-1}y_n(k) \end{vmatrix}, \quad (2.12.34)$$

а $W_{ni}(k)$ — n_i-е алгебраические дополнения. Из уравнения (2.11.5) следует, что $W(k)$ отличен от нуля, если $y_1(k) \div y_n(k)$ являются независимыми решениями однородного уравнения.

Несмотря на то, что входящую в (2.12.33) операцию суммирования порой трудно представить в замкнутой форме, это выражение дает в явном виде решение для y_P по известному y_H.

В отличие от метода неопределенных коэффициентов, метод вариации параметров применим при любых вынуждающих функциях и может быть распространен на разностные уравнения, коэффициенты которых зависят от k.

Физический смысл частного и вспомогательного решений. Предположим, что взаимосвязь между входом и выходом системы задается разностным уравнением

$$A(E)\,y(k) = B(E)\,v(k) = F(k). \qquad (2.12.35)$$

Вид вспомогательного решения зависит только от параметров системы, в частности, от корней характеристического уравнения

$$A(\beta) = 0.$$

В случае различных корней $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ вспомогательное решение

$$y_H = C_1\beta_1^k + C_2\beta_2^k + \ldots$$

неограниченно возрастает при стремлении k к бесконечности в том случае, если хотя бы один из корней имеет величину, бо́льшую единицы. Если корни характеристического уравнения представить на комплексной плоскости, то корни внутри и вне единичного круга, проведенного вокруг начала координат, отвечают составляющим, стремящимся соответственно к нулю и к бесконечности при неограниченном увеличении k. Простые корни на единичном круге соответствуют составляющим постоянной величины, а кратные корни на единичном круге соответствуют неограниченно возрастающим составляющим.

В случае отсутствия внешних источников вспомогательное решение совпадает с общим решением; поэтому его называют также свободным или невынужденным движением. Если вспомогательное решение системы неограниченно возрастает, т. е. если корни характеристического уравнения лежат вне единичного круга, а кратные — на единичном круге, то система неустойчива.

Произвольные постоянные во вспомогательном решении зависят от начальных или граничных условий, воплощающих в себе предысторию системы, и от входного сигнала. Они могут быть вычислены лишь после нахождения вспомогательного и частного решений.

Вид частного решения зависит от входного сигнала, поэтому его называют также вынужденным движением. Если все корни характеристического уравнения лежат внутри единичного круга, то вспомогательное и частное решения совпадают соответственно с переходным и установившимся процессом.

Частное решение для входа z^k. Исследование записанного ниже частного решения уравнения (2.12.35) при $v(k) = z^k$

позволяет выявить взаимосвязь между классическим решением разностных уравнений и решением на основе методов преобразования

$$(a_nE^n + a_{n-1}E^{n-1} + \ldots + a_1E + a_0)\,y(k) = \\ = (b_mE^m + \ldots + b_1E + b_0)\,v(k). \quad (2.12.36)$$

Предполагая, что $y_P(k) = H(z)z^k$, где $H(z)$ не зависит от k, и учитывая $E^m y_P(k) = H(z)z^m z^k$, получим

$$H(z)\,A(z)\,k^k = B(z)\,z^k,$$

где $A(z)$ образуется из $A(E)$ при замене оператора E параметром z. Таким образом,

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_mz^m + \ldots + b_1z + b_0}{a_nz^n + \ldots + a_1z + a_0}. \quad (2.12.37)$$

$H(z)$ является передаточной функцией дискретной системы и может быть непосредственно записана по разностному уравнению. Она играет важную роль в аппарате z-преобразования. Заметим также, что

$$H(z) = \left[\frac{y_P(k)}{v(k)}\right]_{v(k)=z^k}. \quad (2.12.38)$$

Получение импульсной характеристики на основе разностного уравнения. Реакция на дельта-функцию (импульсная характеристика), определенная в § 1.9 и обозначаемая через $d(k)$, представляет собой реакцию предварительно невозбужденной дискретной системы на сигнал

$$v(k) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad k = 0, \\ 0 & \text{при} \quad k \neq 0. \end{cases} \quad (2.12.39)$$

Сравнивая это уравнение с приведенным в первой главе, напомним, что при рассмотрении разностных уравнений в данной главе масштаб времени предполагается таким, что $T=1$. Следует решить уравнение (2.12.36) при входном сигнале (2.12.39) и условии

$$y(k) = 0 \quad \text{при} \quad k < 0. \quad (2.12.40)$$

Общий метод решения показывается на следующем примере, ответ которого используется в примерах 1.9.1 и 3.13.3. Метод применим также для нахождения импульсной характеристики непрерывных систем при входе $v^*(t)$ при условии, что нас интересует реакция только в равноотстоящие моменты времени.

Пример 2.12.6. Найти импульсную характеристику системы

$$y(k+2)-3y(k+1)+2y(k)=2v(k+1)-2v(k).$$

Правая часть этого уравнения равна нулю при $k\geqslant 1$, так что импульсная характеристика совпадает с решением вспомогательного уравнения

$$y(k)=C_1+C_2(2)^k \text{ при } k\geqslant 1.$$

Для вычисления двух произвольных постоянных необходимо знать величины $y(1)$ и $y(2)$. При подстановке в разностное уравнение $k=-2$ имеем

$$y(0)-0+0=0-0.$$

Поэтому $y(0)=0$. При $k=-1$ имеем

$$y(1)-0+0=2-0,$$

откуда $y(t)=2$. При $k=0$

$$y(2)-3(2)+0=0-2,$$

откуда в свою очередь $y(2)=4$. Используя значения $y(1)$ и $y(2)$ для вычисления C_1 и C_2

$$2=C_1+2C_2,$$
$$4=C_1+4C_2,$$

получим $C_1=0$ и $C_2=1$. Импульсная характеристика равна

$$d(k)=\begin{cases} 2^k & \text{при} \quad k\geqslant 1, \\ 0 & \text{при} \quad k\leqslant 0. \end{cases}$$

§ 2.13. Решение линейных разностных уравнений с изменяющимися во времени коэффициентами

Рассмотрим разностное уравнение n-го порядка

$$[a_n(k)E^n+\ldots+a_1(k)E+a_0(k)]y(k)=F(k). \qquad (2.13.1)$$

Как и для дифференциальных уравнений, решение всегда определяется для уравнений первого порядка и в общем случае не может быть найдено для уравнений более высокого порядка.

Вспомогательное решение. Рассмотрим однородное уравнение первого порядка

$$a_1(k)y(k+1)+a_0(k)y(k)=0, \qquad (2.13.2)$$

где $a_0(k)\neq 0$ и $a_1(k)\neq 0$. Его можно переписать в виде

$$y(k+1)=a(k)y(k). \qquad (2.13.3)$$

При $k=0, 1, 2, \ldots$

$$y(1)=a(0)y(0),$$
$$y(2)=a(1)a(0)y(0),$$
$$y(3)=a(2)a(1)a(0)y(0)$$

или, в общем случае,

$$y(k) = [a(0)\,a(1)\,\ldots\,a(k-1)]\,y(0) = y(0)\prod_{n=0}^{k-1} a(n),$$

так что общее решение уравнения (2.13.3) равно

$$y_H(k) = C\prod^{n=k-1} a(n) = C\prod^{n=k} a(n-1). \qquad (2.13.4)$$

Нижний предел произведения произволен, так как любое фиксированное число множителей $a(0)$, $a(1)$, $a(2)$, ... можно объединить с произвольной постоянной C.

Решение однородного уравнения выше первого порядка в общем случае не выражается в виде элементарных функций, так как процедура, основанная на уравнениях (2.12.7) и (2.12.8), при зависящих от k коэффициентах перестает быть справедливой. Полезно знать, что если известны все, кроме одного, независимые решения уравнения, то можно определить и оставшееся решение [11]. Как и для дифференциальных уравнений, в ряде отдельных случаев удается получить решение в явном виде. Уравнение вида

$$a_n f(k+n)\,y(k+n) + \ldots + a_1 f(k+1)\,y(k+1) + a_0 f(k)\,y(k) = 0,$$

где коэффициенты a_i — постоянные величины, путем подстановки $z(k) = f(k)\,y(k)$ сводится к разностному уравнению с постоянными коэффициентами. Процедура отчасти сходна с используемой для дифференциального уравнения Эйлера, но замене в данном случае подлежит зависимая (а не независимая) переменная. Этот метод широко используется при решении уравнений с переменными коэффициентами *).

В ряде случаев можно понизить порядок разностного уравнения, если его оператор раскладывается на множители. Например, уравнение

$$[kE^2 + (k^2+k+1)E + k]\,y(k) = 0$$

можно записать как

$$(kE+1)(E+k)\,y(k) = 0,$$

что эквивалентно двум уравнениям первого порядка

$$(kE+1)\,z(k) = 0, \qquad (E+k)\,y(k) = z(k),$$

каждое из которых решается в явном виде.

---

*) Некоторые нелинейные уравнения, такие как $y^2(k+2) + y^2(k+1) + y^2(k) = 0$, путем замены зависимой переменной сводятся к линейным разностным уравнениям.

Проведено детальное исследование различных уравнений специального вида, которые можно классифицировать по виду их коэффициентов (скажем, уравнения с периодическими коэффициентами) [12]. Значительные усилия направлены для получения решения в виде бесконечных рядов [13].

Частное решение. Метод вариации параметров, использующий уравнения (2.12.22), (2.1.28) и (2.12.33), справедлив вне зависимости от вида a_i. В правой части этих трех уравнений $a_1, a_2, \ldots a_n$ следует понимать сответственно как $a_1(n-1)$, $a_2(n-1)$ и $a_n(n-1)$. Однако, несмотря на то, что, зная y_H, всегда можно найти y_P, определить y_H в общем случае не представляется возможным.

Пример 2.13.1. Найти общее решение уравнения

$$[(k+1)E-k]y(k)=k+1.$$

На основе уравнения (2.13.4) вспомогательное решение равно

$$y_H=C\prod_{n=1}^{k-1}\frac{n}{n+1}=C\frac{(k-1)!}{k!}=\frac{C}{k}.$$

Частное решение имеем в виде $y_P=\frac{\mu(k)}{k}$. Из уравнения (2.12 22) следует

$$\mu(k)=\sum^{n=k}\frac{F(n-1)}{a_1(n-1)\,y_1(n)}=\sum_{n=1}^{k}n=\frac{k(k+1)}{2},$$

где последнее выражение получено на основании формулы для арифметической прогрессии или уравнения (2.9 24). Общее решение имеет вид

$$y(k)=\frac{C}{k}+\frac{k+1}{2}.$$

Задачи

2.1. Доказать, что два решения y_1 и y_2 линейного дифференциального уравнения второго порядка независимы тогда и только тогда, когда определитель Вронского (2.4.3) отличен от нуля.

2.2. Решить следующие дифференциальные уравнения. Для (*e*) полезно использовать подстановку $y=(1/x)(dx/dt)$.

(*a*) $(p^2+3p+2)\,y=0,\quad y(0)=1,\quad \dot{y}(0)=4;$

(*b*) $(p^2+3p+2)\,y=\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right),\quad y(0)=1,\quad \dot{y}(0)=4;$

(*c*) $(p^3+p^2+p+1)\,y=te^{-t},\quad y(0)=\dot{y}(0)=\ddot{y}(0)=0;$

(*d*) $(t^2p^2+2p)\,y=e^{-t},\quad y(0)=0,\quad \dot{y}(0)=\frac{1}{2};$

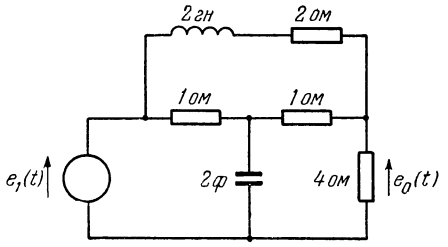
(*e*) $py-y^2=1,\quad y(0)=0.$

2.3. Найти дифференциальное уравнение, описывающее систему на рисунке, определив предварительно ее передаточную функцию $H(s)$.

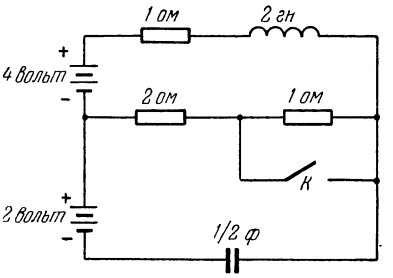
2.4. Найти общее решение следующего однородного дифференциального уравнения при условии, что одно из решений равно $y_1(t)=t$,

$$\left(\frac{1}{2}t^3p^2+tp-1\right)y=0.$$

2.5. Решить пример 1.6.1 на основе классического аппарата дифференциальных уравнений.



К задаче 2.3.



К задаче 2.6.

2.6. Электрическая цепь на рисунке первоначально работала в установившемся режиме при разомкнутом ключе K. Определить выражения для токов при $t\geqslant 0$, если ключ замыкается в момент $t=0$.

2.7. Определить импульсную характеристику системы, описываемой следующими дифференциальными уравнениями:

(*a*) $(p^2+2p+2)y=(p^2+3p+3)v$;

(*b*) $(p^3+2p^2+3p+2)y=(p+4)v$;

(*c*) $(p+t)y=v$;

(*d*) $(tp^2+2p)y=v$.

2.8. Решить задачу 2.2 (*d*), используя интегралы совмещения из первой главы и решение примера 2 7 (*d*).

2.9. Найти выражение $h(t, \lambda)$ для системы

$$(\alpha p+1)y=(ap+1)v,$$

где α — постоянная величина, а a может зависеть от t.

2.10. Доказать равенства (2.9.6), (2.9.11) и (2.9.13).

2.11. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

2.12. На основании уравнения (2.9.11) вывести формулу суммирования по частям:

$$\sum_{n=a}^{k}u(n)\,\Delta v(n)=[u(n)\,v(n)]_a^{k+1}-\sum_{n=a}^{k}v(n+1)\,\Delta u(n).$$

2.13. Найти общее решение следующих разностных уравнений. Какие из этих уравнений соответствуют устойчивым системам? Запишите уравнения, используя разностный оператор Δ.

(*a*) $y(k+2)+5y(k+1)+6y(k)=0$;

(*b*) $y(k+2)-2(\sin h\theta)\,y(k+1)-y(k)=0$;

(*c*) $y(k+2)-Ay(k+1)+y(k)=0, \quad -1\leqslant A<1$.

2.14. Решить следующие разностные уравнения и исследовать устойчивость описываемых ими систем:

(*a*) $\left(E^2+E+\frac{1}{4}\right)y(k)=\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right), \quad y(0)=0, \quad y(1)=1$;

(*b*) $(\Delta^2+\Delta+1)\,y(k)=0, \quad y(0)=1, \quad \Delta y(0)=0$;

(*c*) $(E^2+3E+2)\,y(k)=(-1)^k$ при $y(0)=y(1)=1$;

(*d*) $(E^2+2E+1)\,y(k)=(E+2)\,v(k), \quad y(k)=v(k)=0$ при $k<0, \quad v(k)=1$ при $k\geqslant 0$;

(*e*) $(E^2+E+1)\,y(k)=v(k), \quad y(k)=v(k)=0$ при $k<0$,

$$v(k)=(-1)^k \quad \text{при} \quad k\geqslant 0.$$

2.15. Определить импульсную характеристику системы, описываемой уравнением

$$(E^3+2E^2+3E+2)\,y(k)=(E+4)\,v(k).$$

2.16. Решить задачу 2.14, используя суммы совмещения из первой главы.

2.17. Найти общее решение следующих разностных уравнений:

(*a*) $(E-k)^2y(k)=k!$;

(*b*) $[E^2+(2k+1)E+k^2]y(k)=k!$.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. A. Ralston and H. S. Wilf, Numerical Methods for Digital Computers, John Wiley and Sons, New York, 1960, Part II
2. Э. Л. Айнс, Обыкновенные дифференциальные уравнения, ГОНТИ, 1939.
3. Там же, § 7.4.
4. Там же, § 15.7.
5. B. K. Kinariwala, Analysis of Time-Varying Networks, IRE Intern. Conv. Record, Vol. 9, Pt. 4, March 1961, стр. 268—276.
6. K. S. Miller, Properties of Impulsive Responses and Green's Functions, IRE Trans. Circuit Theory, Vol. CT-2, March 1955, стр. 26—31.
7. D. Graham, E. J. Brunelle, Jr., W. Johnson and H. Passmore, III, Engineering Analysis Methods for Linear Time Varying Systems, Report ASD-TDR-62-362, Flight Control Laboratory, Wright—Patterson Air Force Base, Ohio, January 1963, стр. 126—127.
8. C. R. Wylie, Jr., Advanced Engineering Mathematics, Second Edition, McGraw-Hill Book Company, New York, 1960, стр. 137.
9. M. P. Gardner and J. L. Barnes, Transients in Linear Systems, John Wiley and Sons, New York, 1942, Chapter IX.
10. Wylie, op. cit., Section 55.
11. H. Levy and F. Lessman, Finite Difference Equations, Sir Isaac Pitman and Sons, London, 1959, Chapter 6.
12. T. Fort, Finite Differences and Difference Equations in the Real Domain, Oxford University Press, London, 1948, Chapters XIII and XIV.
13. L. M. Milne-Thomson, The Calculus of Finite Differences, Macmillan and Company, London, 1933, Chapters 14—16.

ГЛАВА 3

МЕТОДЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 3.1. Введение

В первой главе непрерывные сигналы представлялись в виде последовательностей специальных функций. Если известна реакция линейной системы на элементарную функцию, то реакцию на произвольный входной сигнал можно определить на основе суперпозиции. В § 3.2 непрерывные сигналы раскладываются в ряде синусоидальных функций на основе рядов и интеграла Фурье. Реакция системы на синусоидальный сигнал легко определяется на основе теории установившихся режимов цепей переменного тока, в результате чего реакция на произвольный входной сигнал находится на основе суперпозиции. Ввиду ряда ограничений, присущих методам преобразования Фурье, в § 3.3 как обобщение интеграла Фурье дается преобразование Лапласа. Свойства и приложения преобразования Лапласа разбираются подробно; методы преобразования даются применительно к интегралам свертывания и дифференциальным уравнениям, рассмотренным соответственно в первой и второй главах.

В § 1.3 указывалось, что временные методы и методы преобразования представляют собой лишь два частных случая общей задачи разложения сигналов в виде последовательности элементарных функций. Эта проблема обсуждается также в § 3.10.

Приводимое в § 3.11 z-преобразование удобно использовать для систем с дискретными входными сигналами при условии, что выходной сигнал рассматривается только в определенные дискретные моменты времени.

z-преобразование дается применительно к суммам совмещения и разностным уравнениям, рассмотренным соответственно в первой и второй главах.

Модифицированное z-преобразование в § 3.14 позволяет определять выходной сигнал в произвольный момент времени.

§ 3.2. Ряд и интеграл Фурье

Периодические и непериодические функции можно представить в виде последовательности синусоидальных функций соответственно на основе рядов и интеграла Фурье. Функцию на-

зывают периодической с периодом T, если ее значения повторяются последовательно каждые T *сек* для всех t. Из показанных на рис. 3.2.1 функций только $f_1(t)$ является периодической.

Произвольная однозначная периодическая функция, имеющая в течение одного периода конечное число максимумов, минимумов и разрывов непрерывности, может быть представлена в виде бесконечного ряда, известного как ряд Фурье. Необходимо, чтобы площадь, ограниченная функцией в течение одного периода, была конечной. Ряд Фурье для функции $f(t)$ с периодом T имеет вид

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t), \quad (3.2.1)$$

где $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ называют угловой частотой первой гармоники, а

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, dt,$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t\, dt \quad (3.2.2)$$

$$(n \neq 0),$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\omega_0 t\, dt.$$

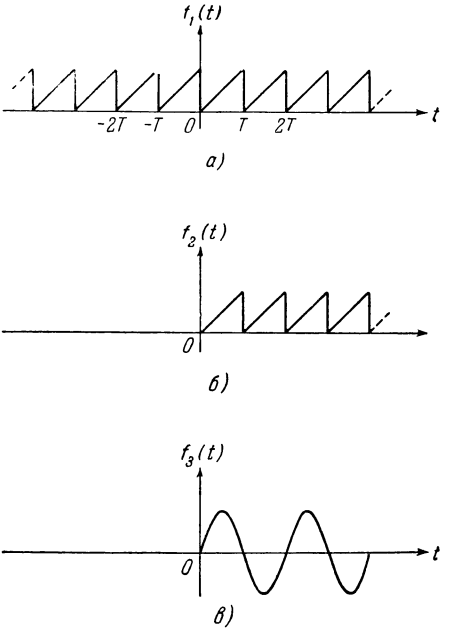


Рис. 3.2.1.

Ряд сходится к $f(t)$ для тех значений t, в которых функция непрерывна. При значениях t, соответствующих разрывам конечной величины, ряд сходится к среднему значению $f(t)$ по обе стороны от точки разрыва. Ряд сходится равномерно при всех t, если $f(t)$ удовлетворяет указанным выше ограничениям и, кроме того, ограничена. Если ограничиться только конечным числом членов ряда Фурье, соответствующий конечный ряд аппроксимирует $f(t)$ с минимальной средней квадратичной ошибкой.

Так как два тригонометрических члена одинаковой частоты можно объединить в один, введя фазовый угол, уравнение

(3.2.1) можно переписать в виде

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n), \tag{3.2.3}$$

где

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \qquad \theta_n = -\operatorname{arctg}\frac{b_n}{a_n}. \tag{3.2.4}$$

A_n и θ_n обозначают амплитуду и сдвиг по фазе (по отношению к несмещенной косинусоиде) n-й гармоники.

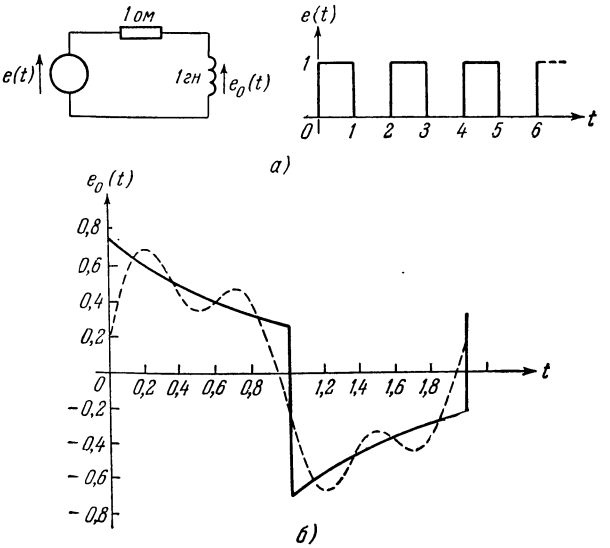


Рис. 3.2.2.

Комплексная форма рядов Фурье. Комплексную форму легко получить из тригонометрической на основе тождеств

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}(e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}), \qquad \sin\varphi = \frac{1}{2j}(e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}). \tag{3.2.5}$$

Уравнение (3.2.3) приводится к виду

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}, \tag{3.2.6}$$

где

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt. \qquad (3.2.7)$$

Уравнения (3.2.6) и (3.2.3) связаны соотношениями $c_0 = a_0$ и

$$c_n = \frac{A_n}{2} e^{j\theta_n} \qquad (n \neq 0),$$

так что величина c_n равна половине амплитуды n-й гармоники, а угол c_n равен фазовому углу данной гармоники относительно косинусоиды. Так как c_n полностью определяют $f(t)$ в виде составляющих частотной области, то их называют частотным спектром $f(t)$.

Пример 3.2.1. Для цепи на рис. 3.2.2, *а* найти установившуюся составляющую выходного напряжения $e_0(t)$.

Для вычисления установившейся реакции можно предположить, что прямоугольная волна входного напряжения существует как при положительных, так и при отрицательных значениях времени. Тогда частотный спектр входного сигнала, определенный из уравнения (3.2.7) при $\omega_0 = \pi$, равен

$$c_n = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-jn\pi t}\, dt = \frac{1 - e^{-jn\pi}}{2jn\pi},$$

$$c_0 = \frac{1}{2},$$

$$c_n = 0 \quad \text{при четных } n,$$

$$c_n = \frac{1}{jn\pi} \quad \text{при нечетных } n.$$

При этом

$$e(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=\pm 1,\ \pm 3,\ \ldots}^{\pm\infty} \frac{1}{jn\pi} e^{jn\pi t}.$$

На основе теории установившихся режимов цепей переменного тока реакция на $e^{j\omega t}$ равна

$$\left[\frac{j\omega}{1 + j\omega}\right] e^{j\omega t} = \frac{j\omega}{\sqrt{1 + \omega^2}}\, e^{j(\omega t - \operatorname{arctg} \omega)}.$$

Используя суперпозицию, а также уравнение (3.2.5), получим

$$e_0(t) = \sum_{n=1,\ 3,\ \ldots}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + (n\pi)^2}} \cos(n\pi t - \operatorname{arctg} n\pi).$$

Штриховой линией на рис. 3.2.2, *б* показана сумма первых двух ненулевых членов последнего выражения.

Точное выражение для установившегося значения выхода, представленное в виде бесконечного ряда, равно

$$e_0(t)=\begin{cases}\dfrac{e}{1+e}e^{-t} & \text{при} \quad 0<t<1,\\[2mm] \dfrac{-e^2}{1+e}e^{-t} & \text{при} \quad 1<t<2\end{cases}$$

и показано сплошной линией *).

Приведенный выше пример содержит три основных этапа: нахождение частотного спектра входного сигнала, умножение на передаточную функцию системы переменного тока в установившемся режиме для получения частотного спектра выходного сигнала и построение выходного сигнала как функции времени. Частотный спектр чаще обозначают не через c_n, а как $F(\omega)$. Тогда для линейной системы с постоянными параметрами с входом $v(t)$ и выходом $y(t)$ имеем

$$Y(\omega)=V(\omega)H(j\omega), \tag{3.2.8}$$

где $H(j\omega)$ — функция системы переменного тока в установившемся режиме, определяемая уравнением (2.6.23).

Методу рядов Фурье присущи два ограничения: $y(t)$ представляется в виде бесконечного ряда, а не в замкнутой форме; в результате решения получаются лишь составляющие установившегося режима. В связи с этим данный метод в общем случае используется лишь для определения частотного спектра (например, в волновых фильтрах) а не для вычисления выходного сигнала как функции времени.

Интеграл Фурье. Ряд Фурье, описываемый уравнениями (3.2.6) и (3.2.7), при $\omega=n\omega_0$ можно переписать в следующем виде:

$$\frac{c}{\Delta\omega}=\frac{1}{T\,\Delta\omega}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-j\omega t}\,dt=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-j\omega t}\,dt,$$

$$f(t)=\sum_{\omega=-\infty}^{\infty}\frac{cn}{\Delta\omega}e^{j\omega t}\,\Delta\omega.$$

Символ $\Delta\omega$ обозначает расстояние между линиями частотного спектра и равен $\omega_0=2\pi/T$.

Непериодическую функцию времени можно получить из периодической, устремив период T к бесконечности. Так как $\Delta\omega$

*) Указанная замкнутая форма решения не получена непосредственно из бесконечного ряда, а следует из решения примера 2.12.3 $e_0=di/dt$, где i задается уравнением (2.12.19).

стремится при этом к нулю, то ранее дискретный спектр становится непрерывным, содержащим все возможные частоты. Так как при стремлении T к бесконечности c_n стремится к нулю, то вводится величина $g(\omega)=c_n/\Delta\omega$. В пределе $\Delta\omega$ становится $d\omega$ и

$$g(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-j\omega t}\,dt,$$

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega.$$

Чтобы получить наиболее распространенную форму записи, положим $G(w)=2\pi g(\omega)$. Тогда

$$\begin{aligned} G(\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-j\omega t}\,d\omega=\mathscr{F}[f(t)],\\ f(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega=\mathscr{F}^{-1}[G(\omega)]. \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

Последние два уравнения являются соответственно прямым и обратным преобразованиями Фурье. $G(\omega)$ называют частотным спектром $f(t)$, а выражение для $f(t)$ часто называют интегралом Фурье. Читатель мог заметить, что интеграл Фурье имеет вид уравнения (1.3.3) при $\lambda=\omega$ и $k(t,\lambda)=e^{j\omega t}$.

Уравнения (3.2.9) могут использоваться для непериодических сигналов таким же образом, как и ряд Фурье в комплексной форме — для периодических сигналов. Условия, необходимые для существования ряда Фурье, переносятся на интеграл Фурье. Функция времени должна быть однозначной, содержать конечное число максимумов, минимумов и разрывов, а $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt$ должен быть ограничен.

Пример 3.2.2. Найти частотный спектр прямоугольного импульса, показанного на рис. 3.2.3, *а*.

$$G(\omega)=\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\frac{1}{L}\,e^{-j\omega t}\,dt=\frac{\sin(\omega L/2)}{\omega L/2}.$$

$G(\omega)$ является действительной функцией, так как $f(t)$ — четная функция, и изображена на рис. 3.2.3, *б*.

При стремлении L к нулю в пределе $f(t)$ становится единичным мгновенным импульсом. Соответствующая $G(\omega)$ показана на рис. 3.2.3, *в*. Таким образом, единичный мгновенный импульс обладает постоянным спектром.

Данный пример демонстрирует принцип взаимного соответствия между формой и полосой частот сигнала. Чем у́же функция времени, тем у нее более широкий спектр и тем бо́льшая полоса частот требуется для ее правильного воспроизведения. Если у функции времени сгладить острые углы, то высокочастотные компоненты ее спектра уменьшатся. Например, для функции Гаусса $f(t) = (1/\sqrt{2\pi})\, e^{-\frac{t^2}{2}}$ единичной площади, показанной на рис. 1.4.7, *а*, $G(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{2}}$.

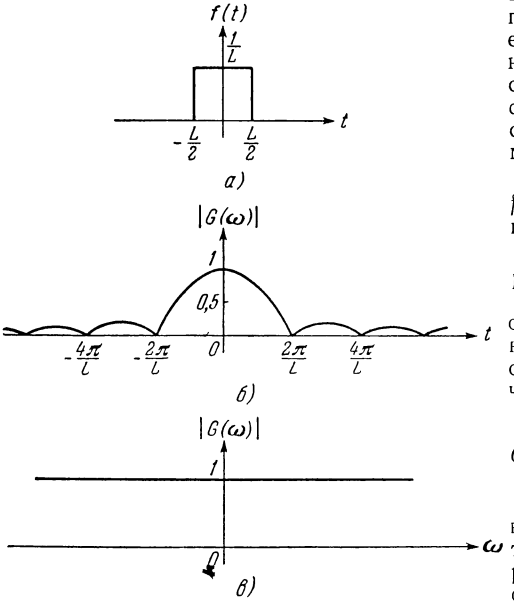


Рис. 3.2.3.

Пример 3.2.3. Найти преобразование Фурье единичной ступенчатой функции. На основе уравнения (3.2.9) вычислить

$$G(\omega) = \int_0^\infty e^{-j\omega t}\, dt = \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_0^\infty$$

не представляется возможным, так как верхний предел не определяется однозначно, т. е. определенный интеграл не сходится. Читатель, возможно, заметит (можно ожидать, что этот пример не решается, так как $\int_{-\infty}^{\infty} U_{-1}(t)\, dt$ неограничен),

$$\mathcal{F}\left[e^{-at} \text{ при } t \geqslant 0\right] = \int_0^\infty e^{-at} e^{-j\omega t}\, dt = \frac{1}{a + j\omega} \qquad (a \neq 0).$$

При стремлении a к нулю эта величина сходится к $1/j\omega$. Но строго математически этот предел не является преобразованием Фурье единичной ступенчатой функции. Чтобы определить функцию времени, соответствующую $G(\omega) = \frac{1}{j\omega}$, воспользуемся уравнением (3.2.9):

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega t}}{j\omega}\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\cos \omega t}{j\omega} + \frac{\sin \omega t}{\omega}\right] d\omega =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \omega t}{\omega}\, d\omega = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{при } t < 0, \\ \frac{1}{2} & \text{при } t > 0. \end{cases}$$

Цель приведенного примера состояла в том, чтобы показать, что для многих широко распространенных функций времени не существует преобразования Фурье. Попытка использовать множитель сходимости $e^{-\alpha t}$ служит эвристическим началом преобразования Лапласа, рассматриваемого в следующем параграфе.

При анализе линейных систем с постоянными параметрами удобно преобразование Фурье входного $v(t)$ и выходного $y(t)$

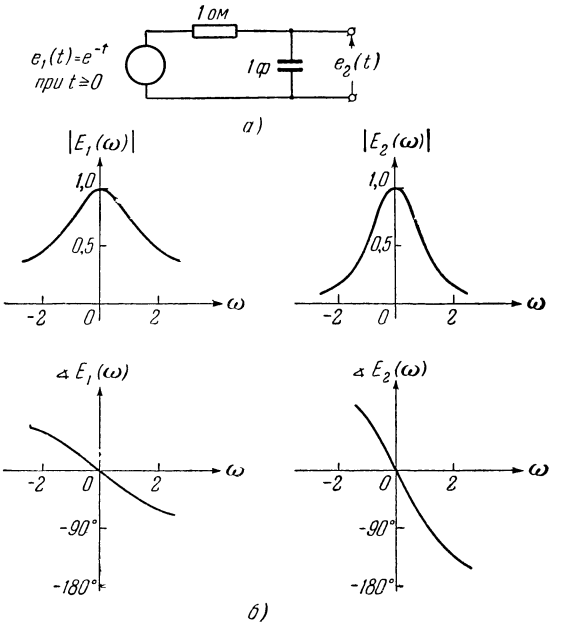


Рис. 3.2.4.

сигналов обозначать соответственно через $V(\omega)$ и $Y(\omega)$. На основе характеристики системы, описываемой уравнением (2.6.23), реакция на $v(t)=e^{j\omega t}$ равна $y(t)=H(j\omega)e^{j\omega t}$. Тогда, используя принцип суперпозиции, получим

$$Y(\omega)=V(\omega)H(j\omega), \tag{3.2.10}$$

$$y(t)=\mathscr{F}^{-1}[V(\omega)H(j\omega)]. \tag{3.2.11}$$

В отличие от ряда Фурье, интеграл Фурье (3.2.11) дает выражение для реакции системы в замкнутой форме при условии, что система не обладает начальным запасом энергии.

Пример 3.2.4. Для цепи на рис. 3.2.4, *а* начертить частотный спектр входа и выхода и найти $e_2(t)$. Предполагаем, что емкость в момент $t=0$ не заряжена;

$$E_1(\omega) = \int_0^\infty e^{-t} e^{-j\omega t}\, dt = \frac{1}{1+j\omega},$$

$$E_2(\omega) = E_1(\omega)\frac{1}{1+j\omega} = \frac{1}{(1+j\omega)^2}.$$

Частотный спектр показан на рис. 3.2,4, *б*. Вычисление

$$e_2(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega t}}{(1+j\omega)^2}\, d\omega$$

встречает значительные трудности. Существуют поэтому таблицы преобразования Фурье [1]; зачастую полезно использовать и методы теории комплексного переменного. На основе § 3.6 можно получить

$$e_2(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{e^{j\omega t}}{(1+j\omega)^2}\, d(j\omega) = \frac{1}{2\pi j}\oint \frac{e^{st}}{(1+s)^2}\, ds = te^{-t} \quad \text{при} \quad t \geqslant 0,$$

где интегрирование проводилось по комплексной переменной s. Не вдаваясь в подробности интегрирования, читатель должен понять, что непосредственное вычисление обратного преобразования Фурье осуществляется лишь в редких случаях.

§ 3.3. Преобразование Лапласа

Преобразование Лапласа в значительной мере преодолевает трудности, присущие преобразованию Фурье. Сходимость прямого преобразования можно обеспечить путем замены $e^{-j\omega t}$ в уравнении (3.2.9) на $e^{-(\sigma+j\omega)t}$. Введение в подынтегральное выражение $G(\omega)$ множителя сходимости $e^{-\sigma t}$ позволяет вычислить интеграл для ряда случаев, когда без этого множителя он не существует. К подобной модификации приходим в предыдущем параграфе при стремлении найти преобразование Фурье единичной ступенчатой функции.

Двухстороннее преобразование Лапласа. Пусть в уравнении (3.2.9) $G(\omega) = F(j\omega)$; запишем

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt,$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-j\infty}^{j\infty} F(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d(j\omega),$$

Во втором выражении переменная интегрирования заменена на $j\omega$. Заменив $j\omega$ на $s = \sigma + j\omega$, получим

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt = \mathscr{L}_{II}[f(t)] \tag{3.3.1}$$

и

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s)\, e^{st}\, ds = \mathscr{L}_{II}^{-1}[F(s)], \tag{3.3.2}$$

где $\mathscr{L}_{II}$ и $\mathscr{L}_{II}^{-1}$ обозначают прямое и обратное двухсторонние преобразования Лапласа.

Подобное представление носит эвристический характер, иллюстрируя связь между преобразованиями Лапласа и Фурье, и лишено математической строгости. Величина $\sigma = \operatorname{Re} s$ в уравнении (3.3.1) выбирается таким образом, чтобы интеграл сходился (если это возможно). Понятно, что интегрирование в уравнении (3.3.2) производится по той же области σ, для которой сходится (3.3.1). Так как s является комплексной переменной, то уравнение (3.3.2) содержит интегрирование в комплексной плоскости. Детальное рассмотрение этого вопроса отложим до знакомства с теорией комплексного переменного. Ниже приводятся два примера, в которых используется уравнение (3.3.1).

Пример 3.3.1. Определить преобразование Лапласа

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ e^{at} & \text{при } t > 0 \text{ для действительных } a; \end{cases}$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-st}\, dt = \left[\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{s-a}$$

для области сходимости $\sigma > a$. При положительном a для данной функции не существует преобразования Фурье, однако существует преобразование Лапласа.

Пример 3.3.2. Определить преобразование Лапласа

$$f(t) = \begin{cases} -e^{at} & \text{при } t < 0 \text{ для действительных } a, \\ 0 & \text{при } t > 0; \end{cases}$$

$$F(s) = -\int_{-\infty}^{0} e^{at} e^{-st}\, dt = \left[\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a}\right]_{-\infty}^{0} = \frac{1}{s-a}$$

для области сходимости $\sigma < a$.

Из приведенных двух примеров следует, что двум различным функциям времени отвечает одно и то же преобразование Лапласа. Однако существующие две области сходимости взаимно исключают одна другую. Поэтому чтобы

определить, какая из функций времени соответствует функции $(s-a)^{-1}$, необходимо указать область ее сходимости.

Очевидно, что преобразования Лапласа и Фурье непериодических функций идентичны, если область сходимости σ содержит $\sigma = 0$. В этом случае преобразование Фурье получается из преобразования Лапласа заменой s на $j\omega$. Не существует двух различных функций времени, имеющих одно и то же преобразование Фурье.

Если a положительная величина, то $\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{(j\omega - a)}\right]$ будет функцией примера 3.3.2 (а не примера 3.3.1). Для неограниченных функций преобразования Фурье не существует. Введение множителя сходимости $e^{-\sigma t}$ приводит к однозначности задачи.

Одностороннее преобразование Лапласа. Обычно можно ограничиться функциями, которые равны нулю при $t < 0$. Последнее объясняется тем, что реакция линейной системы при $t > 0$ определяется на основе знаний о входном сигнале при $t > 0$ и начальной энергии, запасенной в системе к моменту $t = 0$. При рассмотрении поведения системы, начиная с заданного

Таблица 3.3.1

$f(t)$ при $t \geqslant 0$	$F(s)$	Область сходимости
$U_0(t)$	1	$\sigma > -\infty$
$U_{-1}(t)$	$\frac{1}{s}$	$\sigma > 0$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\sigma > 0$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\sigma > -a$
$\sin \beta t$	$\frac{\beta}{s^2+\beta^2}$	$\sigma > 0$
$\cos \beta t$	$\frac{s}{s^2+\beta^2}$	$\sigma > 0$
$e^{-at} \sin \beta t$	$\frac{\beta}{(s+a)^2+\beta^2}$	$\sigma > -a$
$e^{-at} \cos \beta t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\beta^2}$	$\sigma > -a$
$\frac{e^{-at} t^{n-1}}{(n-1)!}$ $n = 1, 2, \ldots$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\sigma > -a$

момента времени, ее предыстория эквивалентна запасенной к этому моменту времени энергии. Поэтому двухстороннее преобразование Лапласа, описываемое уравнением (3.3.1), заменяется обычно нормальным или односторонним преобразованием Лапласа в виде уравнения (3.3.3), которое указывает на то, что $f(t)=0$ при $t<0$ или что при $t<0$ значения $f(t)$ не принимаем во внимание, а потому полагаем их равными нулю,

$$F(s)=\int_0^\infty f(t)\,e^{-st}\,dt=\mathscr{L}[f(t)]. \tag{3.3.3}$$

Индекс I здесь не используется, так как, если не указывается противное, считаем преобразование Лапласа односторонним. В результате применения уравнения (3.3.3) к ряду распространенных функций времени получим таблицу 3.3.1 *).

Выражение для обратного преобразования остается прежним вне зависимости от использования одно или двухстороннего преобразований.

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)\,e^{st}\,ds=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]. \tag{3.3.4}$$

Интегрирование следует ввести в области σ, обеспечивающей сходимость (3.3.3).

§ 3.4. Свойства преобразования Лапласа

Ряд важных теорем существования и единственности одностороннего преобразования Лапласа можно найти в соответствующих монографиях; их сущность частично сводится к следующему [3]. Для того чтобы существовало преобразование $F(s)$ от функции $f(t)$, она должна быть определена при всех $t>0$, за исключением, возможно, счетного множества точек. Для произвольной кусочно-непрерывной функции $f(t)$ экспоненциального порядка **) существует преобразование Лапласа.

Две функции времени имеют одинаковое преобразование Лапласа в том и только в том случае, если они тождественны

*) Весьма обширная таблица приведена в [2]. Таблицы меньшего объема даются в ряде других указанных в конце главы книг.

**) Функция $f(t)$ имеет экспоненциальный порядок, если существует такое действительное k, что

$$\lim_{t\to\infty} f(t)\,e^{kt}=0.$$

Примерами функций неэкспоненциального порядка служат e^{t^2} и t^t. Для подобных функций преобразование Лапласа может и не существовать.

при всех $t > 0$, за исключением, возможно, счетного множества точек. На рис. 3.4.1 все три функции имеют преобразование Лапласа $(s+1)^{-1}$. За исключением этих тривиальных случаев существует, однако, однозначное соответствие между $f(t)$ и $F(s)$. Поэтому таблица 3.3.1 может использоваться для нахождения как обратного, так и прямого преобразований, что во

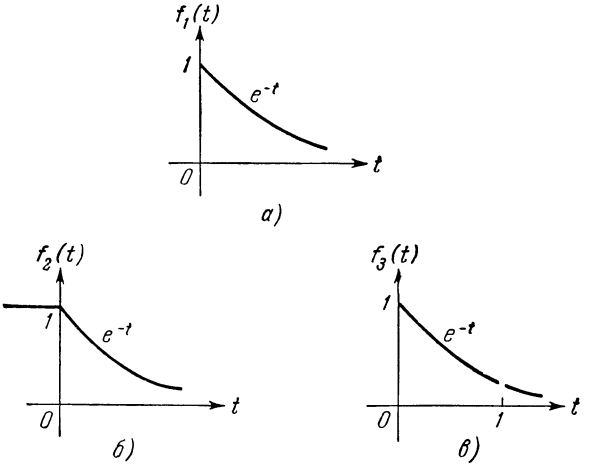


Рис. 3.4.1.

многих, но не во всех случаях, избавляет от применения уравнения (3.3.4). Заметим, что в примерах 3.3.1 и 3.3.2 решение будет различным, так как заданные там функции не имеют одного и того же одностороннего преобразования.

Использование теории вычетов совместно с уравнением (3.3.4) позволяет получить действенный и сравнительно простой метод нахождения $f(t)$. Как показано в § 3.7, использование уравнения (3.3.4) при одностороннем преобразовании приводит к функциям времени, равным нулю при $t < 0$ и непрерывным (за исключением специальных функций) при $t \geqslant 0$. Таким образом, $\mathscr{L}^{-1}[1/(s+1)]$ тождественно функции $f_1(t)$ на рис. 3.4.1, а не $f_2(t)$ или $f_3(t)$.

Встречающиеся в теории систем управления функции часто содержат разрывы при $t = 0$. Обычно удобно определять значения $f(t)$ в момент $t = 0$ как предел $f(t)$ при стремлении t к нулю справа. Этот предел обозначается через $f(0+)$; для функции $f_1(t)$ на рис. 3.4.1 он равен единице. Хотя во введении этого предположения нет необходимости, оно применяется в инженерной практике, так как связано с меньшими трудностями. В соответствии с введенным предположением, а также учитывая тот

Таблица 3.4.1

Свойство	Номер уравнения
$\mathscr{L}[f_1(t)+f_2(t)]=\mathscr{L}[f_1(t)]+\mathscr{L}[f_2(t)]=F_1(s)+F_2(s)$	(3.4.2)
$\mathscr{L}[af(t)]=a\mathscr{L}[f(t)]=aF(s)$	(3.4.3)
$\mathscr{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right]=sF(s)-f(0+)$	(3.4.4)
$\mathscr{L}\left[\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right]=s^nF(s)-s^{n+1}f(0+)-s^{n-2}\frac{df}{dt}(0+)-\ldots-\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(0+)$	(3.4.5)
$\mathscr{L}\left[\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right]=\frac{F(s)}{s}$	(3.4.6)
$\mathscr{L}\left[\int_{-\infty}^t f(\tau)\,d\tau\right]=\frac{F(s)}{s}+\frac{f^{-1}(0+)}{s}$, где $f^{-1}(0+)=\lim_{t\to 0+}\int_{-\infty}^t f(\tau)\,d\tau$	(3.4.7)
$\mathscr{L}[e^{-at}f(t)]=F(s+a)$	(3.4.8)
$\mathscr{L}[tf(t)]=-\frac{d}{ds}F(s)$	(3.4.9)
$\mathscr{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]=\int_s^\infty F(r)\,dr$	(3.4.10)
$\mathscr{L}[f(t-a)\,U_{-1}(t-a)]=e^{-as}F(s)$	(3.4.11)
$\mathscr{L}\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right]=aF(as)$	(3.4.12)
$\mathscr{L}\left[\int_0^t f_1(t-\lambda)\,f_2(\lambda)\,d\lambda\right]=F_1(s)\,F_2(s)$	(3.4.13)

Продолжение таблицы 3.4.1

Свойство	Номер уравнения
$\mathscr{L}[f_1(t) f_2(t)] = \frac{1}{2\pi j} \int\limits_{x-j\infty}^{x+j\infty} F_1(w) F_2(s-w)\, dw$, где $w = x + jy$ и где вдоль пути интегрирования x должна быть больше абсциссы абсолютной сходимости для $f_1(t)$	(3.4.14)
$\lim\limits_{t \to 0} f(t) = \lim\limits_{s \to \infty} sF(s)$ при условии существования предела	(3.4.15)
$\lim\limits_{t \to \infty} f(t) = \lim\limits_{s \to 0} sF(s)$ при условии, что $sF(s)$ — аналитическая функция на оси $j\omega$ и в правой полуплоскости s.	(3.4.16)

факт, что обычно рассматривается реакция при $t > 0$, прямое преобразование Лапласа можно определить как

$$F(s) = \lim_{\substack{R \to \infty \\ \Delta \to 0}} \int_{\Delta}^{R} f(t) e^{-st}\, dt, \quad R > 0, \quad \Delta > 0. \tag{3.4.1}$$

Другие свойства преобразования Лапласа. В таблице 3.4.1 сведены наиболее полезные свойства преобразования Лапласа. Их доказательство большей частью непосредственно следует из уравнения (3.4.1) и его можно найти в многочисленной литературе [4]. Уравнения (3.4.2)—(3.4.7) составляют основу решения интегро-дифференциальных уравнений с постоянными параметрами при помощи преобразования Лапласа, как это показано в следующем параграфе. Уравнения (3.4.8)—(3.4.12) служат для нахождения прямого и обратного преобразования от данных функций.

Пример 3.4.1. Найти $\mathscr{L}^{-1}[1/(s+2)^2]$.

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] = t \quad \text{при} \quad t \geqslant 0$$

из таблицы 3.3.1. На основе уравнения (3.4 8) при $a=2$ имеем

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)^2}\right] = te^{-2t} \quad \text{при} \quad t \geqslant 0.$$

Пример 3.4.2. Найти $\mathscr{L}[t \sin t]$ и $\mathscr{L}[(\sin t)/t]$

$$\mathscr{L}[\sin t] = \frac{1}{s^2+1}$$

из таблицы 3.3.1. На основе уравнения (3.4.9) имеем

$$\mathscr{L}[t \sin t] = -\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] = \frac{2s}{(s^2+1)^2}.$$

Из уравнения (3.4.10) следует, что

$$\mathscr{L}\left[\frac{\sin t}{t}\right]=\int_s^\infty \frac{1}{r^2+1}\,dr=[\operatorname{arctg} r]_s^\infty=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} s=\operatorname{arctg}\left[\frac{1}{s}\right].$$

Пример 3.4.3. На рис. 3.4.2 изображена периодическая функция времени $f(t)$ с периодом T. Пусть $f_1(t)$ описывает только первый период, $f_2(t)$ — только второй период и т. д. При условии, что

$$F_1(s)=\mathscr{L}[f_1(t)]=\int_0^T f(t)\,e^{-st}\,dt,$$

найти выражение для

$$F(s)=\mathscr{L}[f(t)]=\int_0^\infty f(t)\,e^{-st}\,dt.$$

Поскольку

$$f(t)=f_1(t)+f_2(t)+f_3(t)+\ldots,$$

а также

$$f_2(t)=f_1(t-T)\,U_{-1}(t-T),$$
$$f_3(t)=f_1(t-2T)\,U_{-1}(t-2T),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

из уравнения (3.4.11) следует, что

$$F(s)=F_1(s)+e^{-Ts}F_1(s)+e^{-2Ts}F_1(s)+\ldots=$$
$$=F_1(s)\left[1+e^{-Ts}+e^{-2Ts}+\ldots\right].$$

С учетом

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots \quad \text{при} \quad |x|<1$$

выражение для $F(s)$ можно записать в виде

$$F(s)=\frac{F_1(s)}{1-e^{-Ts}} \quad \text{при} \quad \operatorname{Re} s>0.$$

Этот результат очень полезен для нахождения реакции системы на периодические функции. В отличие от метода рядов Фурье, можно получить в замкнутой форме как установившуюся, так и переходную реакции системы [5].

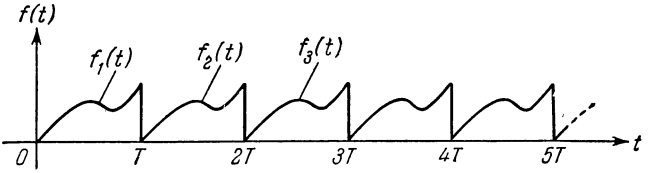


Рис. 3.4.2.

Уравнение (3.4.12) полезно для понимания пересчетов масштабов времени и частоты. Уравнения (3.4.13) и (3.4.14) являются формулами свертывания; из них следует

$$\mathscr{L}[f_1(t)\,f_2(t)]\neq F_1(s)\,F_2(s).$$

Два последние свойства в таблице 3.4.1 известны как теоремы соответственно о начальном и конечном значениях. Значение слов «аналитическая функция» поясняется в § 3.6.

Мгновенные импульсы в $f(t)$. Присутствие мгновенных импульсов в $f(t)$ приводит к некоторым трудностям при трактовке теории преобразования Лапласа. Как указывалось в § 1.4, мгновенные импульсы не являются функциями в обычном математическом смысле. Ранее обсуждаемое свойство единственности перестает быть справедливым в случае присутствия в одной из двух функций мгновенных импульсов в «счетном множестве точек». Это, однако, не вызывает затруднений, потому что легко определить, содержит ли обратное преобразование мгновенные импульсы. По-видимому, наибольшее затруднение встречается при операциях с мгновенными импульсами во временной области. Таблица 3.3.1 начинается с того, что $\mathscr{L}[U_0(t)] = 1$ соответствует мгновенному импульсу, действующему сразу же после $t = 0$. Преобразование от мгновенного импульса, действующего непосредственно перед $t = 0$, равно нулю. Эти утверждения согласуются с уравнением (3.4.4). Так как единичный мгновенный импульс является производной от единичной ступени, то преобразование от мгновенного импульса, действующего сразу же после $t = 0$, следует из $\mathscr{L}[U_0(t)] = s(1/s) - 0 = 1$, а для мгновенного импульса, действующего непосредственно перед $t = 0$ —

$$\mathscr{L}[U_0(t)] = s(1/s) - 1 = 0.$$

При анализе систем любая используемая последовательно точка зрения приводит к правильным результатам. Мгновенный импульс служит для мгновенной передачи системе запасенной энергии. Если $\mathscr{L}[U_0(t)]$ считать равным единице, что наиболее распространено, то начальная запасенная в системе энергия должна определяться без учета действия мгновенного импульса. Подобная точка зрения распространяется и на специальные функции более высокого порядка при рассмотрении их поведения в начале координат. $\mathscr{L}[U_n(t)] = s^n$, а начальная запасенная энергия определяется без учета действия специальной функции.

Разложение на элементарные дроби. Во многих случаях $F(s)$ представляется в виде отношения двух многочленов с действительными коэффициентами. В подобных случаях обратное преобразование всегда можно определить из таблицы 3.3.1, воспользовавшись разложением на элементарные дроби [4].

Предположим, что

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{(s - s_1)^r (s - s_{r+1}) \ldots (s - s_n)}, \qquad (3.4.17)$$

где многочлен знаменателя $Q(s)$ имеет различные корни $s_{r+1}, \ldots, s_n$, и корень s_1 кратности r. При условии, что порядок $Q(s)$ выше, чем $P(s)$, имеем

$$F(s)=\frac{K_1}{(s-s_1)}+\ldots+\frac{K_{r-1}}{(s-s_1)^{r-1}}+\frac{K_r}{(s-s_1)^r}+\frac{K_{r+1}}{s-s_{r+1}}+\ldots+\frac{K_n}{s-s_n},$$

где

$$K_i=[(s-s_i)F(s)]_{s=s_i} \qquad (i=r+1, \ldots, n),$$

$$K_r=[(s-s_1)^r F(s)]_{s=s_1},$$

$$K_{r-1}=\left[\frac{d}{ds}(s-s_1)^r F(s)\right]_{s=s_1}$$

или, в общем случае,

$$K_{r-k}=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{ds^k}(s-s_1)^r F(s)\right]_{s=s_1} \qquad (k=0, 1, 2, \ldots, r-1).$$

При таком определении разложения на элементарные дроби обратное преобразование для каждого из слагаемых следует из таблицы 3.3.1.

Пример 3.4.4. Найти обратное преобразование

$$F(s)=\frac{s^3+1}{s^3+s}.$$

Так как порядок многочлена в знаменателе не превосходит порядка многочлена в числителе, необходимо предварительно произвести деление, т. е.

$$F(s)=1+\frac{-s+1}{s(s^2+1)}.$$

Второе слагаемое можно разложить на элементарные дроби, как указано выше, откуда получим

$$F(s)=1+\frac{1}{s}-\frac{(\sqrt{2}/2)\,e^{-j\pi/4}}{s-j}-\frac{(\sqrt{2}/2)\,e^{j\pi/4}}{s+j}.$$

Согласно таблице 3.3.1 и уравнению (3.2.5) имеем

$$f(t)=U_0(t)+\left[1-\sqrt{2}\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\right]U_{-1}(t).$$

Разложение $F(s)$ на элементарные дроби должно быть математическим тождеством при всех s. Правильность разложения легко проверить, приводя отдельные слагаемые к общему знаменателю. Разложение в последнем примере, конечно, перестанет быть справедливым без учета единицы, полученной непосредственным делением; при больших значениях s $F(s)$ стремится к единице. Вне зависимости от того, равен или превосходит порядок числителя порядок знаменателя, члены, получающиеся при непосредственном делении, служат для описания свойств функции при больших значениях s.

Связь между преобразованиями Фурье и Лапласа. Дальнейшее сравнение преобразования Фурье и одностороннего преобразования Лапласа представляет интерес отчасти потому, что таблицы для одного из преобразований могут использоваться и для другого. Рассмотрим преобразуемую функцию $f(t)$; $\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$ и $\mathscr{F}[f(t)] = G(\omega)$. Как определить прямое преобразование Фурье из таблицы преобразований Лапласа? Чтобы

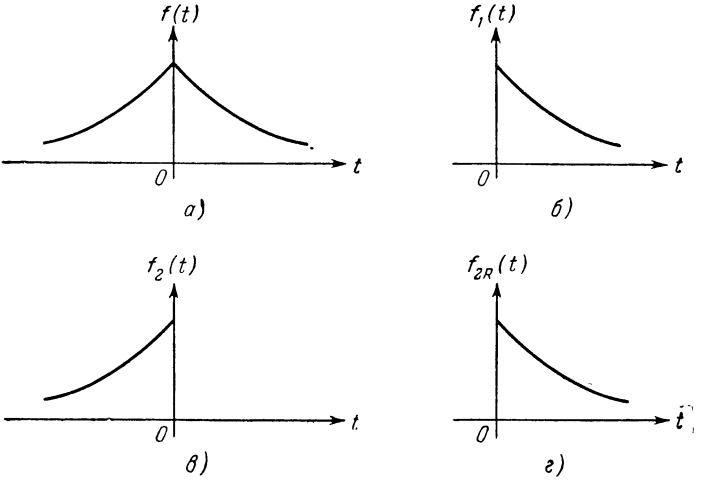


Рис. 3.4.3.

ответить на этот вопрос, рассмотрим следующие три случая. Если $f(t) = 0$ при $t < 0$, то $G(\omega) = F(j\omega)$. Если $f(t) = 0$ при $t > 0$, то

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{0} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt.$$

Положив $\gamma = -t$, получим

$$G(\omega) = \int_{0}^{\infty} f(-\gamma)\, e^{j\omega\gamma}\, d\gamma = \int_{0}^{\infty} f_R(t)\, e^{j\omega t}\, dt = F_R(-j\omega),$$

где $f_R(t) = f(-t)$, т. е. равна первоначальной функции, отраженной относительно вертикальной оси. Если $f(t)$ отлична от нуля как при положительных, так и при отрицательных t, то ее можно разложить на две составляющие, каждая из которых соответствует одному из рассмотренных выше случаев.

Пример 3.4.5. Найти преобразование Фурье функции, изображенной на рис. 3.4.3, *а* и описываемой выражением

$$f(t)=\begin{cases} e^{t} & \text{при} \quad t<0, \\ e^{-t} & \text{при} \quad t>0. \end{cases}$$

Пусть

$$f(t)=f_1(t)+f_2(t),$$

где последние две функции показаны на рис. 3.4.3, *б*, 3.4.3, *в*,

$$G_1(\omega)=F_1(j\omega)=\left[\frac{1}{s+1}\right]_{s=j\omega}=\frac{1}{j\omega+1},$$

$$G_2(\omega)=F_{2R}(-j\omega)=\left[\frac{1}{s+1}\right]_{s=-j\omega}=\frac{1}{-j\omega+1}.$$

Окончательно имеем

$$G(\omega)=G_1(\omega)+G_2(\omega)=\frac{2}{\omega^2+1}.$$

§ 3.5. Применение преобразования Лапласа для стационарных систем

Существуют два основных метода анализа линейных стационарных систем на основе преобразования Лапласа. Подобные системы описываются интегро-дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Эти уравнения можно преобразовать в алгебраические при помощи выражений (3.4.2)—(3.4.7). Данный подход иллюстрируется на приводимом ниже примере. Второй метод, связанный с понятием передаточной функции системы, описывается в последующих частях этого параграфа.

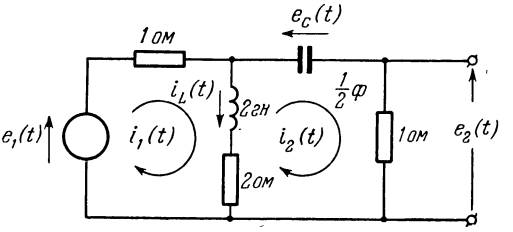


Рис. 3.5.1.

Пример 3.5.1. Найти выражение для реакции $e_2(t)$ при $t>0$ в цепи на рис. 3.5.1. Источник $e_1(t)$ — известная функция времени; предполагаются известными ток i_L и напряжение e_C в момент $t=0$.

Цепь описывается уравнениями для двух контуров:

$$\left(2\frac{di_1}{dt}+3i_1\right)-\left(2\frac{di_2}{dt}+2i_2\right)=e_1,$$

$$-\left(2\frac{di_1}{dt}+2i_1\right)+\left(2\frac{di_2}{dt}+3i_2+2\int i_2\,dt\right)=0.$$

Пусть $I_1(s)$, $I_2(s)$ и $E_1(s)$ являются соответственно преобразованиями $i_1(t)$, $i_2(t)$ и $e_1(t)$. Преобразуя последовательно отдельные составляющие дифференциальных уравнений, получим следующие алгебраические выражения:

$$(2s+3)\,I_1(s)-(2s+2)\,I_2(s)=E_1(s)+2\,[i_1(0+)-i_2(0+)],$$

$$-(2s+2)\,I_1(s)+\left(2s+3+\frac{2}{s}\right)I_2(s)=-\frac{2}{s}\,i_2^{-1}(0+)-2\,[i_1(0+)-i_2(0+)].$$

Заметим, что

$$i_1(0+)-i_2(0+)=i_L(0+)$$

и

$$2i_2^{-1}(0+)=2\lim_{t\to 0+}\int_{-\infty}^{t} i_2(\tau)\,d\tau=e_C(0+).$$

Так как единственными неизвестными являются $I_1(s)$, $I_2(s)$, то два алгебраических уравнения можно разрешить относительно $I_2(s)$. Получим

$$E_2(s)=I_2(s)=\frac{(2s^2+2s)\,E_1(s)-2i_L(0+)\,s-(2s+3)\,e_C(0+)}{4s^2+9s+6}.$$

Если цепь не содержит запасенной энергии при $t=0$, то $i_L(0+)=e_C(0+)=0$ и

$$e_2(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2s^2+2s}{4s^2+9s+6}\,E_1(s)\right].$$

Составляющие, связанные с начальной запасенной энергией, подытоживают предысторию цепи при $t<0$. Часто такие составляющие появляются в результате подключения добавочных элементов или отключения ряда из них в момент времени $t=0$. Лучше всего непосредственно применять преобразование Лапласа к исходным дифференциальным уравнениям, не прибегая предварительно к дифференцированию одного из них или к совместному их решению. При непосредственном преобразовании дифференциальных уравнений составляющие с индексом $(0+)$ всегда непосредственно связаны с начальной запасенной энергией и они исчезают, если система не содержит начальной энергии.

Импульсная характеристика. Преобразование Лапласа предлагает удобный метод нахождения импульсной характеристики системы по описывающим ее дифференциальным уравнениям.

Пример 3.5.2. Система описывается дифференциальным уравнением примера 2.8.1,

$$\frac{d^2y}{dt^2}+3\,\frac{dy}{dt}+2y=\frac{1}{2}\,\frac{dv}{dt}+v.$$

Определим ее импульсную характеристику.

Предположим, что система предварительно не возбуждена.

v — единичный мгновенный импульс, приложенный сразу же после $t=0$. Тогда

$$\frac{dy}{dt}(0+)=y(0+)=0$$

и уравнение преобразуется к виду

$$s^2Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = \frac{s}{2} + 1,$$

так что

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{2}(s+2)}{s^2+3s+2} = \frac{\frac{1}{2}}{s+1}$$

и

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{-t}.$$

Результат согласуется с импульсной характеристикой, определенной в примере 2.8.1.

С другой стороны, если v — единичный мгновенный импульс, приложенный непосредственно перед $t=0$, то преобразование от правой части дифференциального уравнения равно нулю, но $(dy/dt)(0+) = -1/2$ и $y(0+) = 1/2$, как и в примере 2.8.1. Окончательно, преобразованное уравнение равно

$$s^2Y(s) - \frac{s}{2} + \frac{1}{2} + 3sY(s) - \frac{3}{2} + 2Y(s) = 0,$$

что приводит к тому же решению для $y(t)$, как и раньше. Подобный подход не рекомендуется употреблять из-за трудности определения необходимых начальных условий.

Системы, не содержащие начальной запасенной энергии. Предположение об отсутствии начальной запасенной энергии в системе неоднократно дается в этой книге. В подобных случаях нет необходимости первоначально записывать дифференциальные уравнения, описывающие систему, а затем преобразовать их. Рассмотрим типичный элемент электрической цепи, данный в таблице 2.6.1. При отсутствии запасенной энергии $E(s)/I(s) = Z(s)$ представляет просто алгебраическую величину, приведенную в последнем столбце. Таким образом, каждый элемент характеризуется импедансом $Z(s)$, который не зависит от напряжения, тока или времени. Поэтому анализ цепей постоянного тока и установившихся режимов в цепях переменного тока, образованных путем связи отдельных элементов, сводится к анализу на основе преобразования Лапласа. Взаимосвязь между преобразованиями входа и выхода находится из решения алгебраических уравнений.

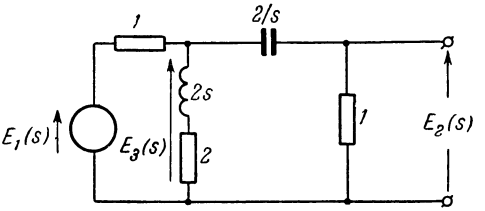


Рис. 3.5.2.

Пример 3.5.3. Найти выражение для $e_2(t)$ при $t>0$ в цепи на рис. 3.5.1, предполагая отсутствие начальной запасенной энергии.

Цепь приведена повторно на рис. 3.5.2, где указаны импедансы каждого из элементов, а токи и напряжения записаны в преобразовании Лапласа.

Можно использовать любой из методов теории цепей постоянного тока. По-видимому, наиболее просто записать уравнение для узла 3:

$$E_3(s)\left[1+\frac{1}{2s+2}+\frac{1}{1+2/s}\right]=E_1(s)$$

или

$$E_3(s)=\frac{(2s+2)(s+2)}{4s^2+9s+6}E_1(s).$$

Тогда

$$E_2(s)=\frac{1}{1+2/s}E_3(s)$$

или

$$e_2(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2s^2+2s}{4s^2+9s+6}E_1(s)\right],$$

что согласуется с результатом примера 3.5.1.

Приведенный метод определения преобразования выхода можно распространить на системы с начальной запасенной энергией. Произвольную начальную энергию, как указывалось в § 1.4, можно представить в виде дополнительного источника. На рис. 1.4.6 показывается, как учесть запасенную энергию в емкости или индуктивности. В результате такой операции каждый пассивный элемент можно снова характеризовать его импедансом.

Передаточная функция системы $H(s)$. Для линейной системы, не содержащей начальной энергии, существует непосредственная взаимосвязь между входом $v(t)$ и выходом $y(t)$. Характеристику (или «передаточную функцию») системы с постоянными параметрами определяют как отношение преобразования Лапласа выходной величины к соответствующему преобразованию входной величины при нулевых начальных условиях:

$$H(s)=\frac{Y(s)}{V(s)} \tag{3.5.1}$$

или

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}[V(s)H(s)]. \tag{3.5.2}$$

Сопоставление с § 2.6 указывает, что $Z(s)$ и $H(s)$ в том параграфе совпадают с импедансом и передаточной функцией, определенными в настоящем параграфе. Вспомним, что $H(s)e^{st}$ — вынужденная реакция (или частное решение) на входной сигнал e^{st}. Из уравнений (2.6.21) и (2.6.22) следует:

$$H(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\left[\frac{y_p(t)}{v(t)}\right]_{v(t)=e^{st}}, \tag{3.5.3}$$

где $A(s)$ и $B(s)$ получены из операторов $A(p)$ и $B(p)$ дифференциального уравнения. Для системы в примере 3.5.2

$$A(p)y(t)=B(p)v(t). \tag{3.5.4}$$

Поэтому $H(s)$ можно написать непосредственно по дифференциальному уравнению системы. Для системы из примера 3.5.2

$$H(s)=\frac{\frac{1}{2}s+1}{s^2+3s+2}=\frac{\frac{1}{2}}{s+1}.$$

Читатель заметит, что это преобразование Лапласа импульсной характеристики.

Применение уравнения (3.5.2) предполагает ту же трехэтапную процедуру, как и для ряда и интеграла Фурье. Входной сигнал преобразуется (из временно́й в комплексную частотную область) и затем умножается на передаточную функцию системы. Результирующее преобразование выходного сигнала подвергается затем обратному преобразованию во временну́ю область. Действительно, при замене s на $j\omega$ в передаточной функции системы получим $H(j\omega)$, которая являлась характеристикой системы при рассмотрении рядов и интеграла Фурье. Из уравнения (2.6.23) следует, что

$$H(j\omega)=\left[\frac{y_P(t)}{v(t)}\right]_{v(t)=e^{j\omega t}}=|H(j\omega)|e^{j\theta}. \tag{3.5.5}$$

Вынужденная реакция на $v(t)=\cos\omega t$ равна

$$y_P(t)=|H(j\omega)|\cos(\omega t+\theta).$$

Другая полезная трактовка передаточной функции следует из рассмотрения уравнения (3.5.2) для частного случая

$$v(t)=U_0(t),\quad y(t)=h(t).$$

Так как $\mathscr{L}[U_0(t)]=1$, то

$$h(t)=\mathscr{L}^{-1}[H(s)]. \tag{3.5.6}$$

Таким образом, обратным преобразованием передаточной функции служит импульсная характеристика. Поэтому принято

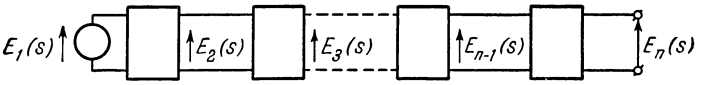


Рис. 3.5.3.

импульсную характеристику обозначать через $h(t)$. Подобным образом, используя уравнение (3.5.2) при $v(t)=U_{-1}(t)$ и $y(t)=r(t)$, получим

$$r(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{H(s)}{s}\right]. \tag{3.5.7}$$

Пример 3.5.4. Решить пример 1.6.3 на основе преобразования Лапласа. В примере рассматриваются n последовательно соединенных идентичных

усилителей, как это показано на рис. 3.5.3, причем временна́я характеристика каждого из них равна $r(t) = -Ae^{-t/RC}$ при $t \geqslant 0$.

Так как

$$\mathscr{L}[r(t)] = \frac{-A}{s + \frac{1}{RC}},$$

то передаточная функция каждого усилителя равна

$$-\frac{As}{s + \frac{1}{RC}}.$$

Предполагая, что на отдельные усилители не воздействуют последующие ступени, передаточная функция последовательного соединения примет вид

$$\frac{E_n(s)}{E_1(s)} = \frac{E_2(s)}{E_1(s)} \frac{E_3(s)}{E_2(s)} \cdots \frac{E_n(s)}{E_{n-1}(s)} = \left[\frac{-As}{s + \frac{1}{RC}}\right]^n.$$

Временна́я характеристика последовательного соединения равна

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\left(\frac{-As}{s + \frac{1}{RC}}\right)^n\right].$$

Обратное преобразование имеет вид [6]

$$(-A)^n e^{-\frac{t}{RC}}\left[1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-1)!\left(-\frac{t}{RC}\right)^k}{(n-k-1)!\,(k!)^2}\right],$$

что согласуется с полученным в примере 1.6.3 результатом.

Интегралы свертывания. Как следует из уравнений (3.5.2), (3.4.13) и (3.5.6),

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}[V(s)H(s] = \int_0^t v(\lambda)h(t-\lambda)d\lambda = \int_0^t v(t-\lambda)h(\lambda)d\lambda. \tag{3.5.8}$$

Этот результат тождествен с интегралами сверки для систем без упреждения при $v(t) = 0$ для $t < 0$, задаваемыми уравнениями (1.6.2) и (1.6.4). Справедливо также

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[sV(s)\frac{H(s)}{s}\right].$$

Обратное преобразование от последнего множителя в скобках является временно́й характеристикой $r(t)$, как это следует из уравнения (3.5.7). На основе уравнения (3.4.4)

$$\mathscr{L}^{-1}[sV(s)] = \frac{dv}{dt},$$

если $v(0+)=0$. Используя уравнение (3.4.13), получим

$$y(t)=\int_0^t \frac{dv(\lambda)}{d\lambda} r(t-\lambda)\,d\lambda=\int_0^t \frac{dv(t-\lambda)}{d(t-\lambda)} r(\lambda)\,d\lambda.$$

Если $v(0+)\neq 0$, то к полученному результату следует прибавить реакцию на ступенчатую функцию $v(0+)U_1(t)$, т. е.

$$y(t)=v(0+)r(t)+\int_0^t \frac{dv(\lambda)}{d\lambda} r(t-\lambda)\,d\lambda=$$

$$=v(0+)r(t)+\int_0^t \frac{dv(t-\lambda)}{d(t-\lambda)} r(\lambda)\,d\lambda. \qquad (3.5.9)$$

Так как при одностороннем преобразовании $v(t)$ считается равной нулю при $t<0$, то $v(0+)$ равна величине разрыва функции в начале координат. Тогда $dv(\lambda)/d\lambda$ будет содержать мгновенный импульс $v(0+)$ при $\lambda=0$. Однако в соответствии с определением одностороннего преобразования согласно уравнению (3.4.1) более правильно записать уравнение (3.5.9) в виде

$$y(t)=v(0+)r(t)+\int_{0+}^t \frac{dv(\lambda)}{d\lambda} r(t-\lambda)\,d\lambda,$$

так что этот мгновенный импульс не войдет в интеграл. Уравнение (3.5.9) эквивалентно интегралам свертывания (1.6.3) и (1.6.5) для систем без упреждения при $v(t)=0$ для $t<0$. Следует помнить, что мгновенный импульс в dv/dt в начале координат должен входить в подынтегральное выражение уравнений (1.6.3) и (1.6.5), но отсутствовать в подынтегральном выражении уравнения (3.5.9). Если читатель не разобрался глубоко с мгновенными импульсами в dv/dt, ему следует вернуться к рассуждениям, связанным с уравнением (1.5.9).

§ 3.6. Обзор теории комплексного переменного

Существуют многочисленные доступные учебники, посвященные комплексным переменным [7]. В настоящем параграфе излагаются, без детальных доказательств, только основные положения части теории, необходимые для понимания методов преобразования. Читателю, не знакомому с теорией комплексного переменного, по-видимому, следует ознакомиться с одним из указанных ниже литературных источников.

Функции комплексного переменного. Рассматривая приложение теории к преобразованию Лапласа, выберем независимую переменную

$$s = \sigma + j\omega, \tag{3.6.1}$$

где σ и ω — соответственно действительная и мнимая части s. Как всякую комплексную величину, s можно представить графически на комплексной плоскости, изображенной на рис. 3.6.1. Иногда удобно представить «расширенную s-плоскость», как сферическую поверхность бесконечного радиуса, причем «точка в бесконечности» диаметрально противоположна началу координат. Однако подобная интерпретация не используется в данной книге.

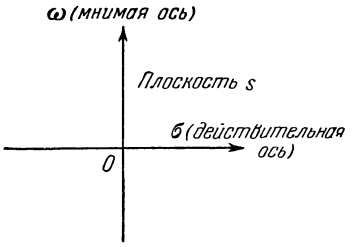


Рис. 3.6.1.

Зависимую переменную обозначим через

$$F(s) = R + jX. \tag{3.6.2}$$

R и X — соответственно действительная и мнимая части $F(s)$ и являются действительными функциями двух действительных переменных σ и ω.

Аналитические функции. Производную от $F(s)$ определяют как

$$\frac{dF(s)}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta F(s)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{F(s + \Delta s) - F(s)}{\Delta s}. \tag{3.6.3}$$

Δs означает малое расстояние на s-плоскости и может выбираться в произвольном направлении. Целесообразность введения понятия производной в значительной степени возрастает, если окажется, что производная не зависит от направления.

Уравнение (3.6.3) не зависит от направления Δs в точке s_0 в том и только в том случае, если

$$\frac{\partial R}{\partial \sigma} = \frac{\partial X}{\partial \omega}, \tag{3.6.4}$$

$$\frac{\partial R}{\partial \omega} = -\frac{\partial X}{\partial \sigma}, \tag{3.6.5}$$

и если $F(s)$ и эти частные производные непрерывны в окрестности s_0. Последние два уравнения известны как условия Коши — Римана существования единственной производной.

Говорят, что функция $F(s)$ является аналитической в произвольной точке s-плоскости в том и только в том случае, если функция однозначна и имеет единственную ограниченную произ-

водную в этой точке и ее окрестности*). Подавляющее большинство обычно встречающихся функций являются аналитическими, за исключением конечного числа точек. Например, отношение двух многочленов от s является аналитической функцией, за исключением тех значений s, при которых знаменатель равен нулю. Для аналитических функций справедливы все обычные правила дифференцирования.

Интегрирование в комплексной плоскости. Интегрирование по контуру C в s-плоскости (названное контурным интегралом) можно трактовать в виде интегралов от действительных переменных, записав

$$\int_C F(s)\,ds = \int_C (R + jX)(d\sigma + j\,d\omega) =$$

$$= \int_C (R\,d\sigma - X\,d\omega) + j\int_C (X\,d\sigma + R\,d\omega).$$

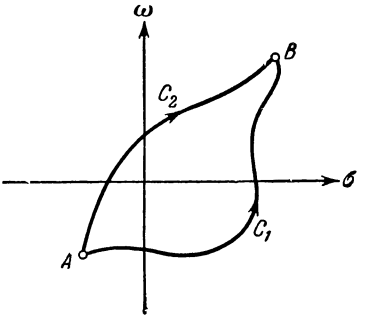


Рис. 3.6.2.

Величины σ и ω связаны между собой контуром интегрирования.

Контурный интеграл от $F(s)$ между двумя фиксированными точками s-плоскости в общем случае зависит от пути интегрирования. $\int_{C_1} F(s)\,ds$ и $\int_{C_2} F(s)\,ds$ на рис. 3.6.2 не обязательно равны между собой. Если путем интегрирования служит замкнутый контур, то это обозначается кружком на знаке интегрирования. Стрелка на кружке употребляется иногда для указания, что интегрирование производится в определенном направлении, по или против часовой стрелки. Знак интеграла положительный, если направление интегрирования таково, что заключенная площадь лежит слева от контура. Для рис. 3.6.2

$$\oint F(s)\,ds = \int_{C_1} F(s)\,ds - \int_{C_2} F(s)\,ds.$$

Знак интеграла по контуру C_2 отрицательный, так как при изменении на противоположное направление вдоль пути интегрирования изменяется и знак контурного интеграла. Так как интегралы вдоль контуров C_1 и C_2 не обязательно равны, то и интеграл по замкнутому контуру не обязательно равен нулю.

*) Выражение «аналитическая в точке s-плоскости и ее окрестности» математически наиболее корректно, однако несколько громоздко.

Основу практического вычисления контурных интегралов составляют две теоремы Коши. Из первой теоремы следует, что если $F(s)$ — аналитическая функция на и внутри контура C в s-плоскости, то

$$\oint_C F(s)\,ds = 0. \tag{3.6.6}$$

Следствием теоремы служит выражение

$$\int_{C_1} F(s)\,ds = \int_{C_2} F(s)\,ds \tag{3.6.7}$$

при условии, что $F(s)$ (см. рис. 3.6.2) — аналитическая функция на и между контурами интегрирования. Другое следствие относится к многосвязным областям. На рис. 3.6.3, *а* $F(s)$ считается

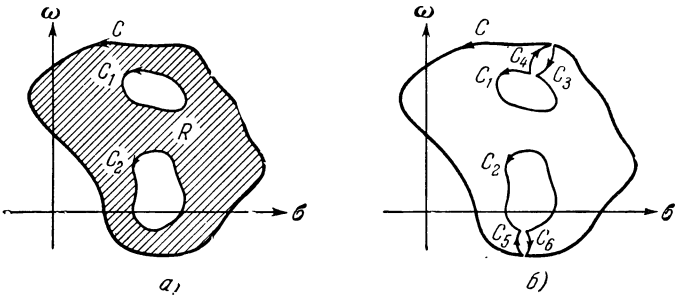


Рис. 3.6.3.

аналитической на замкнутых контурах C, C_1 и C_2 и внутри заштрихованной области R. Однако она не обязательно является аналитической внутри контуров C_1 и C_2. На рис. 3.6.3, *б* указанные области связаны между собой простейшим образом при помощи разрезов C_3—C_6.

Расстояние между соответствующими концами C_3 и C_4, а также C_5 и C_6, предполагается бесконечно малым. На основе теоремы Коши

$$\int_C F(s)\,ds + \int_{C_3} F(s)\,ds - \int_{C_1} F(s)\,ds +$$
$$+ \int_{C_4} F(s)\,ds + \int_{C_5} F(s)\,ds - \int_{C_2} F(s)\,ds + \int_{C_6} F(s)\,ds = 0,$$

так как $F(s)$ является аналитической на и внутри замкнутого контура, образованного суммой этих отдельных контуров. На

основе уравнения (3.6.7) интегралы вдоль C_3 и C_4, а также C_5 и C_6, равны нулю, так что

$$\oint_C F(s)\,ds = \oint_{C_1} F(s)\,ds + \oint_{C_2} F(s)\,ds. \tag{3.6.8}$$

Из второй теоремы Коши следует, что если $F(s)$ является аналитической функцией на и внутри замкнутого контура C и если s_0 — произвольная точка внутри C, то

$$F(s_0) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{F(s)}{s-s_0}\,ds \tag{3.6.9}$$

и

$$\left.\frac{d^nF}{ds^n}\right|_{s=s_0} = \frac{n!}{2\pi j}\oint_C \frac{F(s)}{(s-s_0)^{n+1}}\,ds. \tag{3.6.10}$$

Так как подынтегральная функция не является аналитической в точке s_0, то эти уравнения можно использовать для вычисления интегралов, не удовлетворяющих уравнению (3.6.6). Однако их основная значимость в том, что они породили ряды Тэйлора и Лорана, а также теорему вычетов. Отметим также, что из уравнения (3.6.9) следует замечательный вывод о том, что для функции $F(s)$, заданной на замкнутом контуре, аналитической на и внутри этого контура, ее значения во всех внутренних точках определяются автоматически.

Ряд Тэйлора. Если $F(s)$ является аналитической в точке, то в окрестности s_0 ее можно представить в виде следующего бесконечного ряда:

$$F(s) = b_0 + b_1(s-s_0) + b_2(s-s_0)^2 + \ldots + b_n(s-s_0)^n + \ldots, \tag{3.6.11}$$

где

$$b_0 = F(s_0),$$
$$b_n = \left(\frac{1}{n!}\right)\left.\frac{d^nF(s)}{ds^n}\right|_{s=s_0}. \tag{3.6.12}$$

Как видно, уравнение (3.6.11) совпадает по форме с рядом Тэйлора для функций действительной переменной. При $s_0=0$ данный ряд называют рядом Маклорена.

Ряд Тэйлора сходится к $F(s)$ во всех точках s-плоскости, принадлежащих *кругу сходимости*. Он образуется наибольшей из окружностей, которую можно провести вокруг s_0, не включая какую-либо из точек, в которой $F(s)$ перестает быть аналитической. Во всех точках вне круга сходимости ряд расходится.

Ввиду существования производных от аналитической функции коэффициенты ряда Тэйлора всегда можно вычислить на

основе уравнения (3.6.12). Если $F(s)$ и ее первые $k-1$ производные равны нулю при $s=s_0$, то первые k членов в уравнении (3.6.11) исчезают; тогда говорят, что в точке s_0 $F(s)$ имеет *нуль* порядка k.

Теорема единственности предполагает, что если в окрестности $s_0F(s)$ представляется в виде двух степенных рядов, то последние должны совпадать. Поэтому коэффициенты ряда не обязательно вычислять на основе (3.6.12); для этого можно использовать любой другой удобный путь. В приводимом ниже примере применяется последовательное деление.

Из указанной в предыдущем абзаце теоремы единственности следуют и другие полезные выводы. Если ряд описывает $F(s)$ в произвольной малой области, то данное представление единственно для всех значений, при которых ряд сходится. Точно так же, если аналитическая функция задана в произвольной малой области, то она единственным образом определяется и на всей s-плоскости. Последнее утверждение известно, как принцип *аналитического продолжения.*

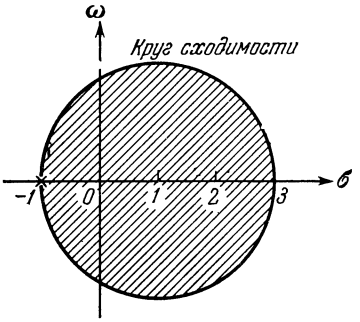


Рис. 3.6.4.

Пример 3.6.1. Разложить $F(s) = 1/(s+1)$ в степенной ряд около $s=1$, т. е. по степеням $s-1$.

Путем последовательного деления получим

$$\frac{1}{s+1}=\frac{1}{2+(s-1)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(s-1)+$$
$$+\frac{1}{8}(s-1)^2-\frac{1}{16}(s-1)^3+\ldots.$$

Такой же ряд получается на основе уравнений (3.6.11) и (3.6.12) при $s_0=1$. Функция $F(s)$ — аналитическая, за исключением точки $s=-1$, показанной на рис. 3.6.4 крестиком. Круг сходимости указывает на то, что ряд сходится при $|s-1|<2$.

Пример 3.6.2. Разложить $F(s) = s/[(s-1)(s-3)]$ около $s=1$.

Хотя $F(s)$ не является аналитической функцией в точке $s=1$, функция $s/(s-3)$ аналитическая в этой точке и раскладывается в ряд Тэйлора. Путем последовательного деления получим ряд

$$\frac{s}{s-3}=\frac{1+(s-1)}{-2+(s-1)}=-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}(s-1)-\frac{3}{8}(s-1)^2-\ldots,$$

который сходится при $|s-1|<2$. Разделив каждый из членов ряда на $s-1$, получим ряд

$$\frac{s}{(s-1)(s-3)}=\frac{-\frac{1}{2}}{s-1}-\frac{3}{4}-\frac{3}{8}(s-1)-\ldots,$$

который сходится при $0<|s-1|<2$.

Ряд Лорана. Даже если $F(s)$ не является аналитической в точке s_0, то ее можно представить в виде бесконечного ряда по степеням $s - s_0$. Однако в этом случае ряд содержит $s - s_0$ как в положительной, так и в отрицательной степени,

$$F(s) = b_0 + b_1(s - s_0) + b_2(s - s_0)^2 + \ldots + b_{-1}(s - s_0)^{-1} + \\ + b_{-2}(s - s_0)^{-2} + \ldots, \quad (3.6.13)$$

где

$$b_k = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{F(s)\,ds}{(s - s_0)^{k+1}} \quad \text{для всех } k. \quad (3.6.14)$$

Первая часть ряда известна как восходящая часть, а вторая — как *основная* или нисходящая часть. Ряд сходится в области между двумя кругами сходимости с центрами в точке s_0. $F(s)$ должна быть аналитической между окружностями, которые обозначены на рис. 3.6.5 через C_1 и C_2. Если в точке s_0 $F(s)$ имеет «*изолированную особенность*», то окружность C_2 сокращается до бесконечно малых размеров, а ряд Лорана описывает при этом $F(s)$ в окрестности s_0. Как показано ниже в данном параграфе, особенное значение имеет коэффициент b_{-1}, который называется *вычетом* $F(s)$ в точке s_0.

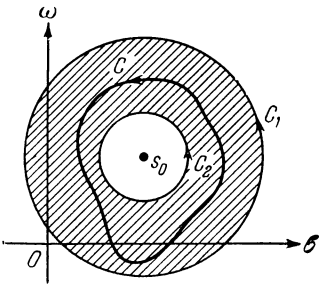


Рис. 3.6.5.

При использовании уравнения (3.6.14) контуром может служить произвольный замкнутый контур, заключенный между C_1 и C_2, как показано на рис. 3.6.5. Однако, поскольку это уравнение трудно для вычисления, обычно коэффициенты ряда Лорана находят несколько иным путем. Можно использовать при этом любой удобный метод, так как представление $F(s)$ по степеням $(s - s_0)$ в произвольной заданной области единственно. Пример 3.6.2 служит примером ряда Лорана, где C_2 — окружность малого радиуса, а C_1 — окружность радиуса, стремящегося к 2.

Классификация особых точек. Особенности $F(s)$, называемые также особыми точками, являются точками s-плоскости, в которых $F(s)$ становится неаналитической. Если вокруг каждой особой точки можно провести непересекающиеся окружности (вне зависимости от малости их размеров), то эти точки называют также изолированными особенностями. У функции $F(s) = (s+1)/[s^3(s^2+1)]$ особыми точками служат $s=0$, $+j$ и $-j$. Для функции $F(s) = 1/[\sin(\pi/s)]$ изолированные особенности —

в точках $s=1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$, а неизолированная особенность — в начале координат. К счастью, обычно встречаемые функции имеют лишь изолированные особенности. Читатель должен помнить, что в окрестности любой изолированной особой точки $F(s)$ раскладывается в ряд Лорана.

Изолированные особые точки далее классифицируются по виду разложения ряда Лорана вокруг них. Если основная или нисходящая часть ряда содержит бесконечное число членов, то особую точку называют *существенно особой точкой*. В противном случае особую точку называют *полюсом*. Порядок полюса равен числу членов в основной части ряда. Если $F(s)$ имеет в точке s_0 полюс порядка n, тогда в основной части степенного ряда не содержится членов $(s-s_0)^n F(s)$, так что $(s-s_0)^n F(s)$ является аналитической в точке s_0.

Теорема вычетов. Положив в уравнении (3.6.14) $k=-1$, получим

$$\oint_C F(s)\,ds = 2\pi j b_{-1}, \tag{3.6.15}$$

где b_{-1} является вычетом $F(s)$ в точке s_0. Контур интегрирования, показанный на рис. 3.6.5, выбран таким образом, чтобы он не содержал иных особенностей, кроме изолированной особой точки s_0. Если s_0 не является особой точкой, то b_{-1} равен нулю и это уравнение сводится к уравнению (3.6.6). Если в примере 3.6.2 C — окружность, проведенная вокруг начала координат, с радиусом равным 2, то

$$\oint_C F(s)\,ds = 2\pi j\left(-\frac{1}{2}\right) = -\pi j.$$

Предположим, что контур интегрирования содержит несколько изолированных особых точек. Так как вокруг каждой из них можно провести непересекающиеся окружности, то интеграл по контуру C можно заменить суммой интегралов по отдельным окружностям, как показано в уравнении (3.6.8) и на рис. 3.6.3. Применяя уравнения (3.6.15) к каждой из отдельных окружностей, получим

$$\oint_C F(s)\,ds = 2\pi j \sum \text{вычетов}, \tag{3.6.16}$$

где суммирование производится по вычетам во всех особых точках внутри контура C.

Вычисление вычетов. В связи с большой значимостью уравнения (3.6.16) в нахождении обратного преобразования Лап-

ласа, особое значение приобретает умение быстро и легко определять вычеты функции. Вычеты находятся из записи ряда Лорана в окрестности каждой из особых точек и выделения коэффициентов при членах $(s-s_0)^{-1}$. Однако для определения вычетов оказывается полезным ряд специальных формул, которые выводятся ниже.

Если $F(s)$ имеет полюс порядка n в точке $s=s_0$, то функция $g(s)=(s-s_0)^nF(s)$ будет аналитической в s_0 и ее можно разложить в ряд Тэйлора в окрестности s_0,

$$g(s)=g(s_0)+g'(s_0)(s-s_0)+\ldots$$
$$\ldots+\left[\frac{g^{(n-1)}(s_0)}{(n-1)!}\right](s-s_0)^{n-1}+\left[\frac{g^{(n)}(s_0)}{n!}\right](s-s_0)^n+\ldots,$$

где штрихи и верхние индексы в скобках обозначают дифференцирование по s. Тогда

$$F(s)=\frac{g(s)}{(s-s_0)^n}=g(s_0)(s-s_0)^{-n}+g'(s_0)(s-s_0)^{-n+1}+\ldots$$
$$\ldots+\left[\frac{g^{(n-1)}(s_0)}{(n-1)!}\right](s-s_0)^{-1}+\left[\frac{g^{(n)}(s_0)}{n!}\right]+\ldots$$

Данное выражение представляет ряд Лорана для $F(s)$; поэтому вычет в s_0 равен

$$b_{-1}=\frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}(s-s_0)^nF(s)\right]_{s=s_0}. \tag{3.6.17}$$

Для полюса первого порядка при $n=1$ выражение для этого вычета принимает вид

$$b_{-1}=[(s-s_0)F(s)]_{s=s_0}. \tag{3.6.18}$$

Излагаемый ниже подход справедлив лишь в том случае, если $F(s)$ представляется как

$$F(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}, \tag{3.6.19}$$

где как $P(s)$, так и $Q(s)$ являются аналитическими в точке s_0, а $P(s_0)\neq 0$. Если $F(s)$ содержит полюс первого порядка в s_0, то $Q(s_0)=0$, но $Q'(s_0)\neq 0$. Записывая ряды Тэйлора для $P(s)$ и $Q(s)$ и производя согласно (3.6.19) последовательное деление, получим

$$F(s)=\frac{P(s_0)+P'(s_0)(s-s_0)+\ldots}{Q'(s_0)(s-s_0)+\frac{1}{2!}Q''(s_0)(s-s_0)^2+\ldots}=\frac{P(s_0)}{Q'(s_0)}(s-s_0)^{-1}+\ldots$$

Вычет в точке s_0 равен

$$b_{-1} = \frac{P(s_0)}{Q'(s_0)}. \tag{3.6.20}$$

Применительно к полюсам более высокого порядка использование данного подхода становится затруднительным.

§ 3.7. Интеграл обратного преобразования

При известном преобразовании Лапласа $F(s)$ функция времени находится на основе уравнений (3.3.2) и (3.3.4), записанных ниже:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \lim_{R \to \infty} \int_{c-jR}^{c+jR} F(s) e^{st} ds. \tag{3.7.1}$$

Так как данное уравнение применимо как при одностороннем, так и при двухстороннем преобразовании, удобно рассматривать оба преобразования совместно.

Вспомним из § 3.3, что выражение для прямого преобразования $F(s)$ сходится только при определенных значениях σ, т. е. только внутри определенной области s-плоскости. Однако на основе принципа аналитического продолжения этого достаточно, чтобы единственным образом определить $F(s)$ на всей s-плоскости, за исключением ее особых точек. Так как множитель e^{st} является аналитической функцией во всей s-плоскости, то функция $F(s)e^{st}$ без труда интегрируется вдоль любого пути, не содержащего особые точки $F(s)$. При использовании понятия расширенной s-плоскости, отображенной на поверхности сферы бесконечного радиуса, следует исключить из рассмотрения точки «в бесконечности», так как e^{st} имеет в ней существенно особую точку. Применительно к уравнению (3.7.1) бесконечно удаленная точка должна быть окружена при этом полуокружностью. Однако более простая интерпретация уравнения (3.7.1) состоит в рассмотрении лишь ограниченной s-плоскости и применении предельного перехода $R \to \infty$ после вычисления интеграла. Данная процедура и используется здесь.

Как указано в § 3.3, путь интегрирования в уравнении (3.7.1) ограничен значениями σ, при которых формула прямого преобразования сходится. В случае двухстороннего преобразования Лапласа область сходимости должна строго задаваться с целью однозначного определения обратного преобразования. При двухстороннем преобразовании области сходимости для функций времени, которые равны нулю при $t < 0$ или при $t > 0$, или не принадлежащие этим классам, имеют соответственно вид $\sigma > \sigma_c$, $\sigma < \sigma_c$ или $\sigma_{c_1} < \sigma < \sigma_{c_2}$. При одностороннем преобразовании область сходимости всегда задается в виде $\sigma > \sigma_c$, где σ_c называют абсциссой абсолютной сходимости.

Строго математически уравнения (3.3.1) и (3.3.3) должны рассматриваться как формальное определение преобразования Лапласа. Корректность уравнения (3.7.1), а также выше указанные ограничения на путь интегрирования нуждаются в доказательстве. Доказательство в сущности показывает, что в результате последовательного применения уравнений (3.3.1) и (3.7.1) к функции $f(t)$ в конечном счете получается функция, совпадающая с $f(t)$ во всех ее непрерывных точках [8]. Если $f(t)$ разрывна в начале координат, то получим $\frac{1}{2}[f(0+)+f(0-)]$. В случае одностороннего преобразования Лапласа последовательное применение уравнений (3.3.3) и (3.7.1) дает $f(t)$ при $t>0$, нуль при $t<0$ и $\frac{1}{2}f(0+)$ при $t=0$.

В качестве пути интегрирования в уравнении (3.7.1) обычно выбирают прямую вертикальную линию, обозначенную на рис. 3.7.1 через ABD. EFG и DHA — полуокружности, радиус которых устремляется к бесконечности. Из-за трудности непосредственного интегрирования $F(s)e^{st}$ вдоль ABD обычно используется другая процедура. Для наиболее часто встречаемых функций

$$\lim_{R\to\infty}\int_{DEFGA} F(s)e^{st}\,ds=0$$

при $t>0$ и

$$\lim_{R\to\infty}\int_{DHA} F(s)e^{st}\,ds=0$$

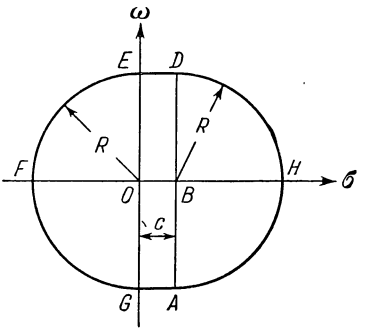


Рис. 3.7.1.

при $t<0$. В связи с этим путь ABD можно заменить путями $ABDEFGA$ при $t>0$ и $ABDHA$ при $t<0$. На основе теоремы вычетов из уравнения (3.6.16) следует

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\lim_{R\to\infty}\oint_{ABDEFGA} F(s)e^{st}\,ds=$$

$$=\sum[\text{вычетов } F(s)e^{st} \text{ в особых точках слева от } ABD] \text{ при } t>0, \tag{3.7.2}$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\lim_{R\to\infty}\oint_{ABDHA} F(s)e^{st}\,ds=$$

$$=-\sum[\text{вычетов } F(s)e^{st} \text{ в особых точках справа от } ABD] \text{ при } t<0. \tag{3.7.3}$$

Необходимо установить, в каких случаях можно использовать уравнения (3.7.2) и (3.7.3) вместо (3.7.1). Следующая ниже теорема помогает ответить на этот вопрос [9].

Теорема 3.7.1. Уравнения (3.7.2) и (3.7.3) справедливы в том случае, если при замене s действительной величиной R $\lim\limits_{R\to\infty} F(R)$ стремится к нулю так же, как N/R, где N — конечное число*). Заметим, что этой теореме отвечает частный случай отношения двух многочленов при условии, что степень знаменателя превосходит степень числителя.

При использовании уравнений (3.7.2) и (3.7.3) оказываются полезными формулы вычетов, приведенные в § 3.6. Для полюса порядка n в точке s_0 вычет $F(s)e^{st}$ равен

$$\frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}(s-s_0)^n F(s)e^{st}\right]_{s=s_0}. \quad (3.7.4)$$

Для полюса первого порядка в s_0 вычет $F(s)e^{st}$ задается в виде

$$[(s-s_0)F(s)e^{st}]_{s=s_0} \quad (3.7.5)$$

или

$$\left[\frac{P(s)e^{st}}{(d/ds)Q(s)}\right]_{s=s_0}, \quad (3.7.6)$$

где $F(s)=P(s)/Q(s)$, а $P(s)$ и $Q(s)$ являются аналитическими в точке s_0.

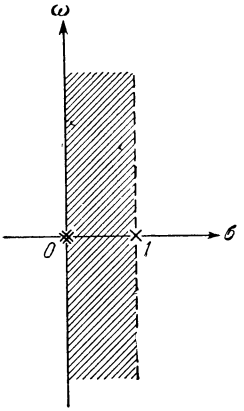


Рис. 3.7.2.

Пример 3.7.1. $F(s)=-1/[s^2(s-1)]$. Область сходимости задается в виде $0<\sigma<1$ и заштрихована на рис. 3.7.2. Найти $f(t)$.

Ввиду справедливости теоремы 3.7.1 можно использовать уравнения (3.7.2) и (3.7.3). При $t>0$

$$f(t)=[\text{вычету } F(s)e^{st} \text{ в } s=0]=\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{-e^{-st}}{s-1}\right)\right]_{s=0}=t+1.$$

При $t<0$

$$f(t)=-[\text{вычету } F(s)e^{st} \text{ в } s=1]=\left[\frac{e^{st}}{s^2}\right]_{s=1}=e^t.$$

Окончательный вид функции изображен на рис. 3.7.3. Область сходимости в этом примере указывает на то, что для получения $F(s)$ необходимо использо-

*) Данная формулировка теоремы без необходимости ограничена. Например, уравнения (3.7.2) и (3.7.3) справедливы, если $F(s)$ является мероморфной функцией (отношением двух аналитических на ограниченной s-плоскости функций), стремящейся равномерно к нулю при $|s|\to\infty$. При возникновении каких-либо сомнений можно пользоваться уравнениями (3.7.2) и (3.7.3) формально. Если преобразование от этой функции окажется исходной $F(s)$, то справедливость результата установлена.

вать двухстороннее преобразование Лапласа. Полюсы слева и справа от этой области отвечают соответственно составляющим $f(t)$ при $t>0$ и $t<0$.

Пример 3.7.2. $F(s)=(s+a)/[(s+a)^2+\beta^2]=(s+a)/[(s+a-j\beta)(s+a+j\beta)]$. Найти $f(t)$ при области сходимости $\sigma>-a$.

Снова можно воспользоваться уравнениями (3.7.2) и (3.7.3).

При $t>0$

$$f(t)=\sum [\text{вычетам } F(s)e^{st} \text{ в } s=-a\pm j\beta]=$$

$$=\left[\frac{(s+a)e^{st}}{s+a+j\beta}\right]_{s=-a+j\beta}+\left[\frac{(s+a)e^{st}}{s+a-j\beta}\right]_{s=-a-j\beta}=$$

$$=\frac{1}{2}e^{(-a+j\beta)t}+\frac{1}{2}e^{(-a-j\beta)t}=e^{-at}\cos\beta t.$$

При $t<0$ $f(t)=0$, так как внутри контура $ABDHA$ на рис. 3.7.1 не содержится ни одной особой точки.

При использовании одностороннего преобразования Лапласа область сходимости, как это и следовало ожидать из уравнения (3.3.1), задается в виде $\sigma>\sigma_c$. Абсцисса абсолютной сходимости σ_c должна лежать справа от всех полюсов $F(s)$. В противном случае область сходимости включала бы особую точку, в которой $F(s)$, естественно, не существует. По этой причине для одностороннего преобразования область сходимости обычно не указывается. В связи с этим интеграл обратного преобразования сводится к $f(t)=0$ при $t<0$. Остальная часть параграфа ограничивается рассмотрением одностороннего преобразования.

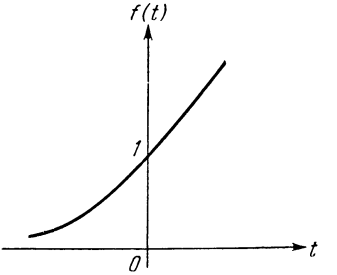


Рис. 3.7.3.

В случае равенства $F(s)$ отношению двух многочленов (при этом степень многочлена числителя меньше степени многочлена знаменателя) методы разложения на элементарные дроби и вычетов в сущности идентичны. В отличие от более действенного метода вычетов, метод разложения на элементарные дроби ограничивается рациональными функциями s. Несколько типичных примеров с отличными от рациональных функциями рассматриваются ниже.

Пример 3.7.3. На рис. 3.7.4 изображен RC-фильтр, состоящий из m каскадов T-звеньев, возбуждаемый единичным скачком напряжения. Найти ток $i_r(t)$ в произвольном звене фильтра ($r=0, 1, 2, \ldots, m$). Предполагается, что цепь не содержит начальной запасенной энергии.

Характеризуя каждый элемент его импедансом, получим преобразованное уравнение для r-й ячейки в виде

$$-\frac{1}{sC}I_{r-1}(s)+\left(R+\frac{2}{sC}\right)I_r(s)-\frac{1}{sC}I_{r+1}(s)=0.$$

Это — алгебраическое уравнение второго порядка. Как указывалось во второй главе необходимо знать два граничных условия. Их можно получить из исследования первой и последней ячеек:

$$\left(\frac{R}{2}+\frac{1}{sC}\right)I_0(s)-\frac{1}{sC}I_1(s)=\frac{1}{s},$$

$$I_m(s)=0.$$

На основе метода, изложенного в примере 2.19.1, решение дифференциального уравнения при выше упомянутых граничных условиях имеет вид

$$I_r(s)=\frac{C\,\mathrm{sh}\,[(m-r)\,\theta]}{(\mathrm{sh}\,\theta)\,(\mathrm{ch}\,m\theta)},$$

где $\mathrm{ch}\,\theta=1+(RC/2)s$. Гиперболическая функция является аналитической при всех ограниченных значениях комплексной переменной θ. При $\mathrm{sh}\,\theta=0$ величина

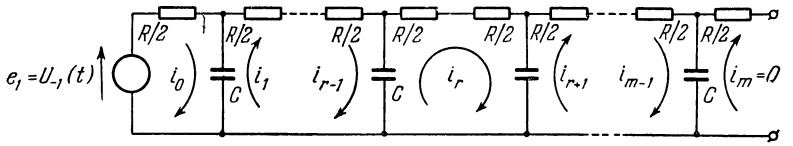


Рис. 3.7.4.

$[\mathrm{sh}\,(m-r)\,\theta]/\mathrm{sh}\,\theta$ ограничена, так что $I_r(s)$ содержит лишь полюсы, соответствующие $\mathrm{ch}\,m\,\theta=0$. Положив $\theta=\alpha+j\beta$, имеем

$$\mathrm{ch}\,m\theta=\mathrm{ch}\,m\,\alpha\cos m\beta+j\,\mathrm{sh}\,m\,\alpha\sin m\,\beta.$$

Это выражение равно нулю лишь при $m\beta=\pm(2k-1)(\pi/2)$ и $m\alpha=0$, где $k=1, 2, 3, \ldots$. Полюсы имеем при

$$\theta=\pm j\frac{(2k-1)\,\pi}{2m},$$

$$\mathrm{ch}\,\theta=\cos\frac{(2k-1)\,\pi}{m},$$

$$s=\frac{2}{RC}\left[-1+\cos\frac{(2k-1)\,\pi}{2m}\right].$$

В знаке $\pm$ нет необходимости, так как $\cos(-\varphi)=\cos\varphi$. Значения s в последнем уравнении повторяются после $k=m$. Таким образом, содержится m полюсов; это можно было ожидать из того, что на рис. 3.7.4 изображены m элементов, способных накапливать энергию. Полюсы расположены на действительной оси s-плоскости между началом координат и точкой $-4/RC$.

Можно показать, что интеграл $F(s)e^{st}$ вдоль пути $DEFGA$ на рис. 3.7.1 равен нулю при $t>0$ и $R\to\infty$, так что $f(t)$ равна сумме вычетов $F(s)e^{st}$ в m полюсах.

Определим

$$P(s)=C\,\mathrm{sh}\,(m-r)\,\theta,\quad Q(s)=(\mathrm{sh}\,\theta)\,(\mathrm{ch}\,m\theta).$$

Заметим, что

$$\frac{dQ(s)}{ds}=\frac{dQ}{d\theta}\frac{d\theta}{ds}=[(\mathrm{sh}\,\theta)\,(m\,\mathrm{sh}\,m\theta)+(\mathrm{ch}\,\theta)\,(\mathrm{ch}\,m\theta)]\left[\frac{RC}{2\,\mathrm{sh}\,\theta}\right].$$

В полюсах, где $\operatorname{ch} m\theta = 0$ и $\operatorname{sh} m\theta = j \sin[(2k-1)(\pi/2)] = j(-1)^{k+1}$,

$$\left.\frac{dQ}{ds}\right|_{s=s_0} = j(-1)^{k+1}\left(\frac{RCm}{2}\right).$$

Из отличия от нуля последнего уравнения следует, что полюсы простые; поэтому можно использовать уравнение (3.7.6)

$$P(s_0) = jC \sin\left[(m-r)\frac{(2k-1)\pi}{2m}\right] = jC(-1)^{k+1}\cos\frac{(2k-1)r\pi}{2m}.$$

Тогда

$$f(t) = \frac{2}{Rm}\sum_{k=1}^{m}\cos\frac{(2k-1)\pi}{2m}\, e^{\frac{2}{RC}\left[-1+\cos\frac{(2k-1)\pi}{2m}\right]t}.$$

Пример 3.7.4. Найти

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{s^2(s^2+s+1)}\right].$$

Наиболее часто используемая процедура состоит в определении обычным способом

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s^2+s+1)}\right] = t - 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\, e^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\pi}{6}\right)$$

при $t>0$. Тогда на основе уравнения (3.4.11)

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{s^2(s^2+s+1)}\right] =$$

$$= \left[t - 2 + \frac{2}{\sqrt{3}}\, e^{-(t-1)/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}\right)\right] U_{-1}(t-1).$$

Данная функция совпадает с предыдущей функцией времени, смещенной вдоль оси t на единицу в положительном направлении.

При использовании же непосредственно обратного преобразования имели бы

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int\limits_{ABD}\frac{e^{s(t-1)}}{s^2(s+1-j)(s+1+j)}\,ds,$$

где путь ABD на рис. 3.7.1 проходит справа от всех полюсов;

$$\int\frac{e^{s(t-1)}}{s^2(s+1-j)(s+1+j)}\,ds$$

вдоль пути $DEFGA$, как следовало ожидать, равен нулю лишь при $t-1>0$, а вдоль пути DHA — только при $t-1<0$, так как действительная часть $s(t-1)$ должна быть отрицательной. Читателю следует убедиться, что это соответствует действительности.

Следовательно, при $t<1$ $f(t)=0$, а при $t>1$

$$f(t) = \sum[\text{вычетов } F(s)e^{st} \text{ в } s=0,\ -1\pm j] =$$

$$= \left[\frac{d}{ds}\,\frac{e^{s(t-1)}}{s^2+s+1}\right]_{s=0} + \left[\frac{e^{s(t-1)}}{s^2(s+1+j)}\right]_{s=-1+j} + \left[\frac{e^{s(t-1)}}{s^2(s+1-j)}\right]_{s=-1-j} =$$

$$= t - 2 + \frac{2}{\sqrt{3}}\, e^{-(t-1)/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}\right).$$

Пример 3.7.5. Найти $\mathscr{L}^{-1}\left[s^{-\frac{1}{2}}\right]$.

Функция $F(s)=\frac{1}{\sqrt{s}}$ принимает два значения, так как она содержит операцию извлечения квадратного корня.

Если s представлена в полярной форме $re^{j\theta}$, то $re^{j(\theta+2\pi)}$ — ее другая возможная запись. Однако $\sqrt{re^{j(\theta+2\pi)}}=-\sqrt{re^{j\theta}}$, что приводит к двум различным значениям для $\sqrt{s}$. Двухзначная функция не является аналитической и основные теоремы теории комплексной переменной в этом случае неприменимы.

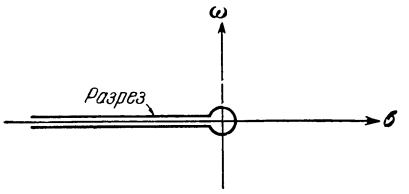


Рис. 3.7.5.

Для того чтобы сделать функцию аналитической, произвольно ограничим угол s интервалом $-\pi<\theta<\pi$, а также исключим точку $s=0$. Формально это производится, как показано на рис. 3.7.5, построением контура формы петли вдоль отрицательных значений действительной оси. Конец разреза в виде контура в форме петли, являющийся в данном случае началом координат, называют точкой разветвления.

Невозможность пересечения данного разреза обеспечивает выполнение $-\pi<\theta<\pi$, делая таким образом $F(s)$ однозначной. Как и ранее, используем интеграл обратного преобразования:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\lim_{R\to\infty}\int_{ABD}F(s)\,e^{st}\,ds,$$

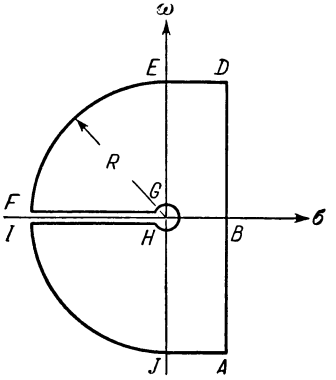


Рис. 3.7.6.

однако рис. 3.7.1 следует при этом видоизменить, как показано на рис. 3.7.6.

На основе теоремы вычетов

$$\int_{ABD}F(s)\,e^{st}\,ds+\int_{DEF}F(s)\,e^{st}\,ds+$$
$$+\int_{FGHI}F(s)\,e^{st}\,ds+\int_{IJA}F(s)\,e^{st}\,ds=0,$$

так как контур интегрирования не содержит особых точек. Можно показать, что при стремлении R к бесконечности и $t>0$ второй и четвертый интегралы равны нулю. Тогда

$$f(t)=-\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi j}\int_{FGHI}F(s)\,e^{st}\,ds.$$

Пусть на окружности бесконечно малого радиуса GH $s=re^{j\theta}=r\cos\theta+jr\sin\theta$, а

$$\int_{GH}F(s)\,e^{st}\,ds=\int_{\pi}^{-\pi}\frac{e^{r(\cos\theta)t}e^{jr(\sin\theta)t}}{r^{1/2}e^{j\theta/2}}\,jre^{j\theta}\,d\theta.$$

При стремлении r к нулю интеграл тоже стремится к нулю. Пусть на прямой FG $s=-u$, $s^{1/2}=ju^{1/2}$ и $ds=-du$, где u и $u^{1/2}$ действительные положительные величины. Подчеркнем, что вдоль этого пути $\sqrt{-1}=j$, а не $-j$. Тогда

$$\int\limits_{FG} F(s)\,e^{st}\,ds=-\int\limits_{\infty}^{0}\frac{e^{-ut}}{ju^{1/2}}\,du=\frac{1}{j}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{e^{-ut}}{u^{1/2}}\,du.$$

Пусть для пути HI $s=-u$, $s^{1/2}=-ju^{1/2}$ (а не $+ju^{1/2}$) и $ds=-du$.

$$\int\limits_{HI} F(s)\,e^{st}\,ds=-\int\limits_{0}^{\infty}\frac{e^{-ut}}{-ju^{1/2}}\,du=$$

$$=\frac{1}{j}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{e^{-ut}}{u^{1/2}}\,du.$$

С учетом этого получим

$$f(t)=-\frac{1}{2\pi j}\left[\frac{2}{j}\int\limits_{0}^{\infty}u^{-1/2}e^{-ut}\,du\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\left(\frac{\gamma}{t}\right)^{-1/2}e^{-\gamma}\left(\frac{1}{t}\,d\gamma\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}.$$

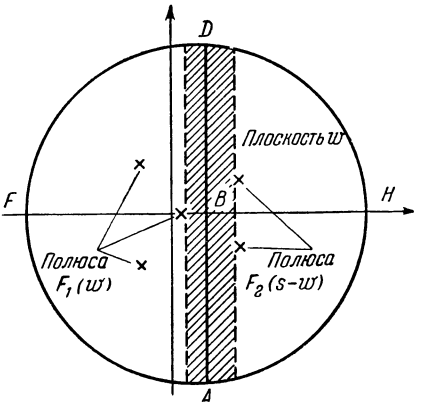


Рис. 3.7.7.

При вычислении последнего интеграла производилась подстановка $\gamma=ut$, а его величина получается или из определения гамма-функции или на основе стандартной таблицы определенных интегралов.

Примеры нахождения обратного преобразования от двухзначных функций, когда путь интегрирования, показанный на рис. 3.7.6, содержит полюс $F(s)$, разбираются в [10].

Важное приложение теоремы вычетов основывается на теореме свертывания в комплексной области, описываемой уравнением (3.4.14). Если $F_1(s)$ и $F_2(s)$ служат односторонними преобразованиями соответственно от $f_1(t)$ и $f_2(t)$, то

$$\mathscr{L}[f_1(t)f_2(t)]=\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{C}F_1(w)\,F_2(s-w)\,dw, \qquad (3.7.7)$$

где w — комплексная переменная, а s при интегрировании рассматривается как независимый параметр. Очевидно, что для того чтобы все полюсы $F_2(s-w)$ в w-плоскости лежали справа от полюсов $F_1(w)$, действительная часть s должна быть достаточно большой величины*). Контуром интегрирования служит произвольный путь в заштрихованной полосе на рис. 3.7.7.

*) Подобное ограничение, накладываемое на s, обеспечивает сходимость прямых преобразований от $f_1(t)$, $f_2(t)$ и $f_1(t)f_2(t)$.

Если интеграл вдоль полуокружности бесконечно большого радиуса DFA и DHA стремится к нулю, то контур ABD можно заменить любым из двух показанных на рисунке замкнутых контуров. Тогда на основе теоремы вычетов имеем

$$\mathscr{L}[f_1(t)f_2(t)] = \sum [\text{вычетов } F_1(w)F_2(s-w) \text{ в полюсах } F_1(w)] = \\ = -\sum [\text{вычетов } F_1(w)F_2(s-w) \text{ в полюсах } F_2(s-w)]. \tag{3.7.8}$$

Пример 3.7.6. Найти $\mathscr{L}[te^{at}]$, используя теорему свертывания в комплексной области. Если $f_1(t)=t$ и $f_2(t)=e^{at}$, то из уравнения (3.7.8) имеем

$$\mathscr{L}[te^{at}] = \left[\text{вычету } \frac{1}{w^2(s-w-a)} \text{ в } w=0\right] = \\ = \left[\frac{d}{dw}\left(\frac{1}{s-w-a}\right)\right]_{w=0} = \frac{1}{(s-a)^2},$$

или

$$\mathscr{L}[te^{at}] = -\left[\text{вычету } \frac{1}{w^2(s-w-a)} \text{ в } w=s-a\right] = \left[\frac{1}{w^2}\right]_{w=s-a} = \frac{1}{(s-a)^2}.$$

Очень важное применение уравнение (3.7.8) находит в § 3.11 в связи с рассмотрением z-преобразования.

§ 3.8. Значение нулей и полюсов

Определение нулей и полюсов дано в § 3.6, а именно: нули и полюсы $F(s)$ являются значениями s, при которых соответственно $F(s)$ или $1/F(s)$ становятся равными нулю.

Предположим, что $F(s)$ можно записать в виде отношения двух разложенных на множители выражений:

$$F(s) = \frac{K(s-z_1)(s-z_2)\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)}. \tag{3.8.1}$$

Тогда $z_1 \div z_m$ — нули $F(s)$, а $p_1 \div p_n$ — ее полюсы. Если множитель $(s-z_i)$ или $(s-p_i)$ повторяется r раз, то $F(s)$ содержит соответственно нуль или полюс r-го порядка. При $m<n$ $F(s)$ имеет в бесконечности нуль $(n-m)$-го порядка.

На s-плоскости полюсы обозначаются крестиками, а нули — окружностями. Полюс или нуль второго порядка обозначаются соответственно двойными крестиками и окружностями. Нули и полюсы функции

$$F(s) = \frac{10(s^2-2s+2)}{s(s+1)^2}$$

изображены на рис. 3.8.1. Наличие в ограниченной s-плоскости трех полюсов и двух нулей указывает на то, что $F(s)$ содержит

один нуль в бесконечности. Диаграмма нулей и полюсов полностью описывает $F(s)$ (не считая постоянного множителя $K = 10$).

Наибольший интерес представляют диаграммы нулей и полюсов входных и выходных сигналов, а также передаточных функций систем. Для реализуемых сигналов и систем обратные преобразования от $V(s)$, $Y(s)$ и $H(s)$ должны быть действительными функциями времени. Из этого в свою очередь следует, что для любого комплексного нуля или полюса должен существовать комплексно сопряженный. Следовательно, вычеты в комплексно сопряженных полюсах сами должны быть комплексно сопряженными.

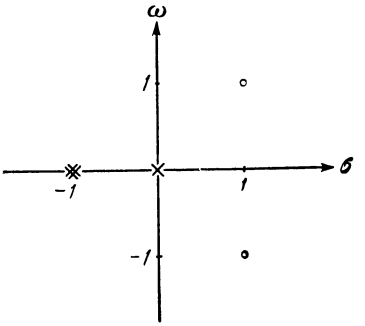


Рис. 3.8.1.

Каждый полюс $F(s)$ обусловливает составляющую в обратном преобразовании $f(t) = \mathscr{L}^{-1}[F(s)]$. Вид этой составляющей полностью определяется расположением и порядком полюса, в то время как ее величина зависит от расположения других нулей и полюсов $F(s)$.

Полюсы в правой полуплоскости порождают неограниченно возрастающие с ростом t составляющие, тогда как полюсы в левой полуплоскости приводят к составляющим, стремящимся к нулю. Это справедливо также и для полюсов более высокого порядка. Например, полюс порядка r в точке $s = -a$ порождает в $f(t)$ член $t^{r-1}e^{-at}$, но $\lim\limits_{t\to\infty} t^{r-1}e^{-at} = 0$. Расстояние полюсов от мнимой оси указывает, насколько быстро составляющая возрастает или затухает с ростом t.

Для простых полюсов в левой полуплоскости это расстояние является обратной величиной от постоянной времени. Простые полюсы, лежащие на мнимой оси, соответствуют синусоидальным составляющим постоянной амплитуды; однако полюсы более высокого порядка порождают неограниченно возрастающие с ростом t составляющие. Расстояние простых комплексно сопряженных корней от действительной оси равно угловой частоте колебаний соответствующей составляющей $f(t)$.

Свободное и вынужденное движение. Запишем ниже еще раз уравнение (3.5.2) для выходного сигнала предварительно невозбужденной линейной системы с постоянными параметрами:

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}[V(s)H(s)]. \tag{3.8.2}$$

Полюсы $V(s)$ зависят только от входного сигнала и обусловливают вынужденное движение, которое является частным решением на «классическом языке» второй главы. Полюсы $H(s)$ зависят только от самой системы и порождают свободное или «естественное» движение, которое тождественно вспомогательному решению, описанному во второй главе, при условии, что вычислены все произвольные постоянные этого решения. Так как величина составляющих свободного движения зависит от нулей и полюсов как $V(s)$, так и $H(s)$, то произвольные постоянные зависят как от входного сигнала, так и самой системы, о чем указывалось в § 2.6.

Пример 3.8.1. Найти выходное напряжение $e(t)$ в цепи, изображенной на рис. 3.8.2, если она не содержит начальной запасенной энергии, а $i(t) = (1+\sin t)U_{-1}(t)$.

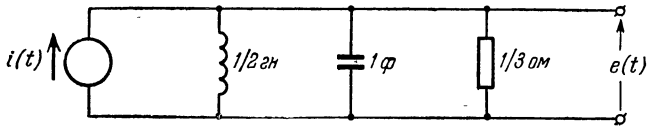


Рис. 3.8.2.

Передаточной функцией системы служит полное входное сопротивление цепи:

$$Z(s) = \frac{1}{2/s + s + 3} = \frac{s}{(s+1)(s+2)}.$$

Преобразование Лапласа входного сигнала равно

$$I(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2+1} = \frac{s^2+s+1}{s(s^2+1)}.$$

Следовательно,

$$E(s) = \frac{s^2+s+1}{(s+1)(s+2)(s^2+1)}.$$

Тогда

$$e(t) = \mathscr{L}^{-1}[E(s)] = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{3}{5}e^{-2t} + \frac{1}{\sqrt{10}}\cos\left(t - \frac{\pi}{2{,}5}\right).$$

Первые два члена в выражении для выходного сигнала образуют свободную составляющую и обусловлены полюсами $Z(s)$. Последний член является вынужденной составляющей, вызываемой полюсами $I(s)$ в точке $s=\pm j$. В вынужденном движении не содержится член, связанный с полюсом в начале координат, так как последний сокращается с нулем числителя $Z(s)$. Это можно объяснить физически, заметив, что индуктивность цепи для постоянной составляющей источника равносильна короткому замыканию. Свободное и вынужденное движение в данном примере являются соответственно переходной и установившейся составляющими. Подобная картина характерна для случаев, когда все полюсы $H(s)$ расположены в левой полуплоскости, а входной сигнал не стремится к нулю при стремлении t к бесконечности.

Устойчивость. Так как $\mathscr{L}^{-1}[H(s)] = h(t)$, то полюсы определяют вид импульсной характеристики. В связи с тем, что входной мгновенный импульс мгновенно сообщает системе некоторую энергию, вид $h(t)$ характеризует устойчивость системы. Система является неустойчивой, если $h(t)$ неограниченно возрастает при стремлении t к бесконечности. Поэтому система неустойчива, если $H(s)$ содержит полюсы в правой полуплоскости или кратные полюсы на мнимой оси. Если на мнимой оси расположены простые корни, то свободная составляющая содержит колебания постоянной амплитуды. Обычно, но не всегда, такую систему считают устойчивой. Если $H(s)$ имеет полюсы только в левой полуплоскости, то система, несомненно, является устойчивой. Эти выводы согласуются с полученными в § 2.6. Как следует из уравнения (3.5.3), полюсы $H(s)$ служат корнями характеристического уравнения $A(s) = 0$.

§ 3.9. Применение преобразования Лапласа для нестационарных систем

В предыдущих параграфах этой главы обсуждались некоторые аспекты использования методов преобразований и передаточной функции $H(s)$ для анализа систем с постоянными параметрами. В настоящем параграфе исследуется применение этих методов для нестационарных систем.

Первый из двух основных методов преобразований для систем с постоянными параметрами состоял в преобразовании дифференциальных уравнений системы в алгебраические уравнения. Несмотря на то, что любое дифференциальное уравнение можно преобразовывать почленно, алгебраическое уравнение получается лишь в том случае, если коэффициенты дифференциального уравнения постоянные. В противном случае приходим к другому интегральному или дифференциальному уравнению. При решении однородных дифференциальных уравнений, коэффициенты которых являются многочленами от t, полезно использовать уравнения (3.4.9) и (3.4.10).

Пример 3.9.1. Решить уравнение

$$t\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - (t-1)\,y = 0$$

при $y(0+) = 1$.

Преобразуя почленно данное уравнение, на основе уравнения (3.4.9) получим

$$-\frac{d}{ds}\left[s^2Y(s) - s - \dot{y}(0+)\right] + \left[sY(s) - 1\right] + \frac{dY(s)}{ds} + Y(s) = 0.$$

После упрощений имеем дифференциальное уравнение первого порядка относительно $Y(s)$

$$(s+1)\frac{dY(s)}{ds}+Y(s)=0.$$

Его легко решить разделением переменных или на основе метода § 2.5, откуда

$$Y(s)=\frac{K}{s+1}.$$

Тогда

$$y(t)=Ke^{-t}.$$

Начальному условию $y(0+)=1$ удовлетворяет $K=1$, поэтому

$$y(t)=e^{-t}.$$

Пример 3.9.2. Несколько видоизменим дифференциальное уравнение в предыдущем примере $t\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}+ty=0$, $y(0+)=1$.

Читатель узнает в этом уравнении уравнение Бесселя нулевого порядка, решение которого равно $y=J_2(t)$. Преобразованное уравнение имеет вид

$$-\frac{d}{ds}\left[s^2Y(s)-s-\dot{y}(0+)\right]+\left[sY(s)-1\right]-\frac{dY(s)}{ds}=0.$$

После упрощений получим уравнение

$$(s^2+1)\frac{dY(s)}{ds}+sY(s)=0,$$

решение которого

$$Y(s)=\frac{K}{\sqrt{s^2+1}}.$$

Постоянная K, удовлетворяющая условию $y(0+)=1$, находится на основании теоремы о начальном значении согласно уравнению (3.4.15):

$$\lim_{s\to\infty}\frac{sK}{\sqrt{s^2+1}}=K,$$

так что $K=1$ и

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\right].$$

Не прибегая к стандартным таблицам для обратного преобразования, заметим, что из полученного решения для $J_0(t)$ следует

$$\mathscr{L}\left[J_0(t)\right]=\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}.$$

Последний пример дает простейший метод нахождения преобразования Лапласа функции Бесселя. В общем случае использование уравнения (3.4.9) приводит к дифференциальному уравнению относительно $Y(s)$, порядка равного наивысшей степени многочлена от t. Необходимо подчеркнуть, что результирующее уравнение не всегда легко решить; выше приведенный пример не типичен с точки зрения встречающихся трудностей.

Каждый член дифференциального уравнения с переменными коэффициентами представляет собой произведение одной известной и одной неизвестной функции времени. При преобразовании Лапласа подобного члена можно использовать уравнение (3.4.14). В результате получим сложное интегральное уравнение относительно $Y(s)$. Так как результирующее уравнение в редких случаях оказывается проще для решения, чем исходное, то этот метод в дальнейшем не затрагивается.

В связи с упомянутым, для решения дифференциальных уравнений, к которым неприменимо преобразование Лапласа, можно искать любое другое эффективное интегральное преобразование. Действительно, подобные преобразования разработаны для определенных специальных случаев. Наиболее известны преобразования Меллина и Ганкеля [11]. Общий вид интегральных преобразований рассматривается далее в § 3.10.

Передаточная функция системы. Второй из основных методов преобразований для систем с постоянными параметрами основывался на передаточной функции системы $H(s)$. Для систем, не содержащих начальной запасенной энергии, реакция на произвольный входной сигнал задается выражением

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}[V(s)H(t,\ s)].$$

Л. Заде показал, что понятие передаточной функции можно распространить и на нестационарные системы [12]. Если свойства системы изменяются во времени, то и ее передаточная функция должна зависеть непосредственно как от s, так и от t. Можно ожидать, что реакция не содержащей начальной запасенной энергии системы с переменными параметрами будет задаваться выражением

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}[V(s)\ H(t,\ s)].$$

Чтобы понять, каким образом из обобщения $H(s)$ приходим к передаточной функции системы с переменными параметрами, прежде всего исследуем таблицу 3.9.1. В уравнениях (3.9.1)—(3.9.8) «суммируются» три основных метода, служащие для характеристики систем с постоянными параметрами. Они непосредственно следуют из уравнения (2.2.6), определения импульсной характеристики, уравнений (1.6.2), (1.6.4), (3.5.6), а также рассуждений, приведенных после уравнений (2.6.20) и (3.5.2). Для систем с переменными параметрами уравнения (3.9.9)—(3.9.13) отвечают непосредственно уравнениям (2.2.7), (1.7.1), (1.7.1), (1.7.2) и (1.7.4). Уравнения (3.9.14)—(3.9.17) выводятся в настоящем параграфе.

В дифференциальных уравнениях (3.9.1) и (3.9.9) $p = d/dt$. Если для систем с постоянными параметрами операторы A и B

Таблица 3.9.1

	Стационарные системы	Номер уравнения	Нестационарные системы	Номер уравнения
Дифференциальное уравнение	$A(p)\,y(t) = B(p)\,v(t)$	(3.9.1)	$A(p,\ t)\,y(t) = B(p,\ t)\,v(t)$	(3.9.9)
Импульсная характеристика	$A(p)\,h(t-\lambda) = B(p)U_0(t-\lambda)$	(3.9.2)	$A(p, t)\,h(t, \lambda) = B(p, t)\,U_0(t-\lambda)$ $A(p, t)\,h_*(t, \tau) = B(p, t)\,U_0(\tau)$	(3.9.10) (3.9.11)
Интегралы совмещения	$y(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} v(\lambda)\,h(t-\lambda)\,d\lambda$	(3.9.3)	$y(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} v(\lambda)\,h(t,\ \lambda)\,d\lambda$	(3.9.12)
	$y(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} v(t-\tau)\,h(\tau)\,d\tau$	(3.9.4)	$y(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} v(t-\tau)\,h_*(t,\ \tau)\,d\tau$	(3.9.13)
Взаимосвязь передаточной функции системы и импульсной характеристики	$H(s) = \mathscr{L}[h(\tau)]$ $h(\tau) = \mathscr{L}^{-1}[H(s)]$	(3.9.5) (3.9.6)	$H(t,\ s) = \mathscr{L}[h(t,\ \tau)]$ $h_*(t,\ \tau) = \mathscr{L}^{-1}[H(t,\ s)]$	(3.9.14) (3.9.15)
Реакция на экспоненциальную функцию	$A(p)\,[H(s)\,e^{st}] = B(p)\,e^{st}$	(3.9.7)	$A(p,\ t)\,[H(t,\ s)\,e^{st}] = B(p,\ t)\,e^{st}$	(3.9.16)
Реакция на основе преобразования Лапласа	$y(t) = \mathscr{L}^{-1}[V(s)\,H(s)]$	(3.9.8)	$y(t) = \mathscr{L}^{-1}[V(s)\,H(t,\ s)]$	(3.9.17)

являются функциями только p, то в системах с переменными параметрами они зависят непосредственно как от p, так и от t. Например,

$$A(p, t)y(t) = [a_n(t)p^n + \ldots + a_1(t)p + a_0(t)]y(t).$$

Уравнения (3.9.2), (3.9.10) и (3.9.11) определяют импульсную характеристику. Как указывалось в § 1.7, необходимо четко различать символы h и h_*. $h(t, \lambda)$ является реакцией в момент времени t на единичный мгновенный импульс, приложенный в момент времени λ, тогда как $h_*(t, \lambda)$ означает реакцию в момент времени t на единичный мгновенный импульс, действовавший на τ секунд раньше. Фиктивные переменные λ и τ в этих уравнениях связаны соотношением $\tau = t - \lambda$. Пределы в интегралах совмещения (3.9.3), (3.9.4), (3.9.12) и (3.9.13) при желании обычно можно изменить. Для систем без упреждения при $v(t) = 0$ при $t < 0$ возможны пределы интегрирования нуль и t.

Для систем с постоянными параметрами $H(s) = \mathscr{L}[h(t)]$, где преобразование проводится относительно t. Так как $h(t)$ представляет собой реакцию в момент времени t на единичный мгновенный импульс, приложенный при $t = 0$ (т. е. на t секунд раньше), то в уравнении (3.9.5) использовалась переменная τ

$$H(s) = \mathscr{L}[h(\tau)]. \tag{3.9.5}$$

В данном случае преобразование записывается относительно τ. По аналогии передаточная функция системы с переменными параметрами определяется как

$$H(t, s) = \mathscr{L}[h_*(t, \tau)], \tag{3.9.14}$$

где преобразование берется по-прежнему относительно τ, а t рассматривается как независимый параметр. Передаточная функция не равна преобразованию $h(t, \lambda)$ относительно λ:

$$H(t, s) = \int_0^\infty h_*(t, \tau)e^{-st}\,d\tau = \int_0^\infty h(t, t-\tau)e^{-st}\,d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{t} h(t, \lambda)e^{-s(t-\lambda)}\,d\lambda \neq \mathscr{L}[h(t, \lambda)].$$

Определение (3.9.14) образует мост между временными методами преобразований. Реакция на входной сигнал

$$v(t) = e^{st} \quad \text{при} \quad -\infty < t < \infty$$

находится на основе уравнения (3.9.13)

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{s(t-\tau)} h_*(t, \tau)\, d\tau.$$

Для систем без памяти нижний предел можно заменить нулем, так что

$$y(t)=e^{st}\int_{0}^{\infty} h_*(t, \tau)\, e^{-st}\, d\tau = e^{st} H(t, s).$$

Так как показано, что реакция на e^{st} равна $e^{st}H(t, s)$, то

$$A(p, t)[H(t, s)e^{st}] = B(p, t)e^{st}. \qquad (3.9.16)$$

Поскольку предполагалось, что экспоненциальный входной сигнал существует при всех t, то $H(t, s)$ определяет в действительности лишь вынужденную реакцию или частное решение. Подобные рассуждения применимы и к уравнению (3.9.7), полученному на основе уравнения (3.5.3).

Из уравнения (3.9.12) следует, что реакция на произвольный входной сигнал равна

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} v(\lambda)\, h(t, \lambda)\, d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi j}\int_{C} V(s)\, e^{s\lambda}\, ds\right] h(t, \lambda)\, d\lambda,$$

где C — контур интегрирования, рассматриваемый в § 3.7 при вычислении интегралов обратного преобразования. Предполагая возможным изменение порядка интегрирования, получим

$$y(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{C} V(s)\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{s\lambda} h(t, \lambda)\, d\lambda\right] ds.$$

Как следует из уравнения (3.9.12), выражение в скобках является реакцией на e^{st}, а именно $H(t, s)e^{st}$. Поэтому

$$y(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{C} V(s)\, H(t, s)\, e^{st}\, ds = \mathscr{L}^{-1}[V(s)\, H(t, s)]. \qquad (3.9.17)$$

При известной $H(t, s)$ реакцию на произвольный входной сигнал можно определить на основе стандартных таблиц и методов теории преобразования Лапласа. При определении обратного преобразования относительно s величина t рассматривается как независимый параметр. Заметим, что

$$Y(s) \neq V(s)H(t, s),$$

так как $Y(s) = \mathscr{L}[y(t)]$, несомненно, не может быть функцией t.

Пример 3.9.3. При $H(t, s) = 1/t^2 s^2$ найти реакцию на сигнал $v(t) = te^{-t}U_{-1}(t)$. Как видно из последующего примера, эта передаточная функция соответствует дифференциальному уравнению

$$t^2 \frac{d^2y}{dt^2} + 4t\frac{dy}{dt} + 2y = v.$$

Запишем

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}[V(s)H(t, s)] = \frac{1}{t^2}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s+1)^2}\right].$$

Вычет $e^{st}/[s^2(s+1)^2]$ в точке $s=0$ равен

$$\left[\frac{d}{ds}\frac{e^{st}}{(s+1)^2}\right]_{s=0} = t-2,$$

а в $s=-1$

$$\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{e^{st}}{s^2}\right)\right]_{s=-1} = (t+2)e^{-t}.$$

Таким образом,

$$y(t) = \frac{1}{t}\left[\left(1-\frac{2}{t}\right) + \left(1+\frac{2}{t}\right)e^{-t}\right],$$

что совпадает с приведенным в примере 1.7.1.

Получение передаточной функции из дифференциального уравнения. Уравнение (3.9.17) дает сравнительно простой метод вычисления реакций при известной передаточной функции системы. Определение передаточной функции обычно представляет наиболее трудную часть всей процедуры. Дифференциальные уравнения, импульсная характеристика и передаточная функция образуют три метода описания свойств системы. Если задана передаточная функция системы, то никакой проблемы, естественно, не возникает. Подобным образом по заданной импульсной характеристике легко определить $H(t, s)$ на основе уравнения (3.9.14). Если задано дифференциальное уравнение, то существует способ, посредством которого на основе методов, рассмотренных в § 2.8, можно в начале определить импульсную характеристику.

Пример 3.9.4. Найти $H(t, s)$ для системы, описываемой

$$t^2 \frac{d^2y}{dt^2} + 4t\frac{dy}{dt} + 2y = v.$$

Импульсная характеристика найдена в примере 2.8.2:

$$h(t, \lambda) = \frac{t-\lambda}{t^2} \quad \text{при} \quad t \geqslant \lambda.$$

Тогда

$$h_*(t, \tau) = h(t, t-\tau) = \frac{\tau}{t^2} \quad \text{при} \quad t \geqslant 0,$$

$$H(t, s) = \frac{1}{t^2}\mathscr{L}[\tau] = \frac{1}{t^2 s^2}.$$

Отличный от упомянутого метод основан на использовании уравнения (3.9.16). Это — дифференциальное уравнение с изменяющимися во времени коэффициентами; его можно разрешить непосредственно относительно передаточной функции системы. Порядок этого уравнения такой же, как и дифференциального уравнения, используемого при нахождении импульсной характеристики. Однако в ряде случаев решение его проще. Ввиду простоты повторного дифференцирования величины e^{st}, выражение (3.9.16) можно несколько упростить. Типичный член $B(p, t)e^{st}$ равен

$$b_k(t)\,p^k e^{st} = b_k(t)\,s^k e^{st},$$

поэтому

$$B(p, t)\,e^{st} = e^{st}B(s, t), \tag{3.9.18}$$

где $B(s, t)$ является функцией s и t, а не оператором. Типичный член $A(p, t)[H(t, s)e^{st}]$ равен

$$a_k(t)\,p^k[H(t, s)\,e^{st}].$$

Если f и g — две функции времени, то

$$p^k(fg) = \sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}(p^{k-r}f)(p^r g),$$

где $\binom{k}{r}$ являются биномиальными коэффициентами, т. е.

$$(c+d)^k = \sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}c^{k-r}d^r.$$

Положив $f = H(t, s)$, а $g = e^{st}$, получим

$$p^k[H(t, s)\,e^{st}] = \sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}[p^{k-r}H(t, s)]\,[s^r e^{st}] =$$

$$= e^{st}\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}p^{k-r}s^r(t, s) = e^{st}(p+s)^k H(t, s).$$

Таким образом,

$$A(p, t)[H(t, s)\,e^{st}] = e^{st}A(p+s, t)\,H(t, s), \tag{3.9.19}$$

где $A(p+s, t)$ — оператор, зависящий от s и t. Подставив в уравнение (3.9.16) уравнения (3.9.18) и (3.9.19), имеем

$$A(p+s, t)\,H(t, s) = B(s, t). \tag{3.9.20}$$

При решении этого уравнения часто полезно использовать методы, рассмотренные в § 2.7 и 2.8.

Пример 3.9.5. Найти $H(t, s)$ для системы, описываемой уравнением

$$t^2 \frac{d^2y}{dt^2} + 4t\frac{dy}{dt} + 2y = v.$$

В операторной форме

$$(t^2p^2+4tp+2)\,y=v.$$

Используя уравнение (3.9.20), получим

$$[t^2(p+s)^2+4(t+s)+2]H(t, s)=1$$

или

$$[t^2p^2+(2st^2+4t)p+(t^2s^2+4ts+2)]H(t, s)=1.$$

Читателю следует убедиться, что решение

$$H(t, s)=\frac{1}{t^2s^2}$$

удовлетворяет последнему уравнению, а также согласуется с результатом предыдущего примера. Для подобного примера решение дифференциального уравнения относительно $H(t, s)$ труднее, чем решение исходного дифференциального уравнения для определения импульсной характеристики. Однако для других систем это может оказаться проще.

Читатель должен понять, что найденная в последнем примере $H(t, s)$ является лишь вынужденным или частным решением уравнения (3.9.20). Из вывода уравнения (3.9.16), однако, следует, что именно это нас и интересует. Несмотря на то, что при учете вспомогательного решения получим различные $H(t, s)$, можно показать, что реакция, вычисленная на основе уравнения (3.9.17), при этом не изменится [12].

Во многих случаях определить точно $H(t, s)$ настолько трудно, что необходимо прибегать к приближенным методам. Стандартные приближенные методы используются в тех случаях, когда параметры изменяются во времени медленно или при малых отклонениях параметров от них среднего значения [13].

§ 3.10. Разложение сигналов в ряды по элементарным функциям

Изложенные в первой главе интегралы совмещения, а также методы обратного преобразования из данной главы можно рассматривать как частные случаи разложения сигналов в ряды элементарных функций [14]. В дополнение к этому параграфу читателю желательно вернуться к § 1.3.

Уравнения (1.3.3) и (1.3.4) выражают входной и выходной сигналы предварительно невозбужденной системы в виде

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_C a(\lambda)\,k(t, \lambda)\,d\lambda, \\ y(t) &= \int_C a(\lambda)\,K(t, \lambda)\,d\lambda. \end{aligned} \tag{3.10.1}$$

Если λ является действительной переменной, интегрирование в общем виде производится от $\lambda = -\infty$ до $+\infty$. При комплексном λ интегрирование ведется вдоль контура в комплексной плоскости. $k(t, \lambda)$ представляет собой семейство элементарных функций, в виде которого представляется $v(t)$. Спектральная функция $a(\lambda)$ служит мерой относительного влияния элементарных функций, составляющих $v(t)$. $K(t, \lambda)$ является реакцией системы на $k(t, \lambda)$.

Чтобы уравнение (3.10.1) было действенным, необходим простой метод нахождения $a(\lambda)$ для произвольного входного сигнала. В виду линейности уравнения (3.10.1) можно полагать, что $a(\lambda)$ выражается в следующем виде:

$$a(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) k^{-1}(\lambda, t)\, dt. \tag{3.10.2}$$

Функция $k^{-1}(\lambda, t)$ известна как обратное преобразование $k(t, \lambda)$. Найти ее не всегда просто. Полезная взаимосвязь между $k(t, \lambda)$ и $k^{-1}(\lambda, t)$ получается путем подстановки в уравнение (3.10.2) $v(t) = U_0(t - z)$. $a(\lambda)$ соответственно равна

$$\int_{-\infty}^{\infty} k^{-1}(\lambda, t)\, U_0(t - z)\, dt = k^{-1}(\lambda, z).$$

Подставляя это выражение в первое уравнение (3.10.1), получим

$$U_0(t - z) = \int_C k^{-1}(\lambda, z)\, k(t, \lambda)\, d\lambda. \tag{3.10.3}$$

Чтобы данный выбор $k(t, \lambda)$ был эффективен, необходимо уметь находить $k^{-1}(\lambda, z)$, удовлетворяющую этому уравнению.

Материал § 1.5—1.7 в основном основывался на $k(t, \lambda) = U_0(t - \lambda)$, где λ — действительная переменная. При этом $k^{-1}(\lambda, t) = U_0(\lambda - t)$ и уравнения (3.10.2) и (3.10.1) сводятся к

$$a(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)\, U_0(\lambda - t)\, dt = v(\lambda),$$

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\lambda)\, U_0(t - \lambda)\, d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} v(\lambda)\, U_0(t - \lambda)\, d\lambda. \tag{3.10.4}$$

Последний довольно тривиальный результат совпадает с выражением (1.5.4).

Обратное двухстороннее преобразование Лапласа*) основывается на выборе $k(t, \lambda) = e^{\lambda t}/2\pi j$ при $-\infty < t < \infty$ и $k^{-1}(\lambda, t) = e^{-\lambda t}$, где λ — переменная комплексной частоты, ранее обозначаемая через s. Уравнения (3.10.2) и (3.10.1) преобразуются к виду

$$a(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} v e^{-\lambda t}\, dt = \mathscr{L}_{\text{II}}[v(t)],$$

$$v(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_C a(\lambda)\, e^{\lambda t}\, d\lambda = \mathscr{L}_{\text{II}}^{-1}[a(\lambda)], \qquad (3.10.5)$$

что совпадает с обычными уравнениями для прямого и обратного преобразований. Выбор контура интегрирования C в λ-плоскости описывался в § 3.7. Правая часть уравнения (3.10.3) при подстановке в него выбранных выше $k(t, \lambda)$ и $k^{-1}(t, \lambda)$ принимает вид

$$\frac{1}{2\pi j} \int_C e^{-\lambda z} e^{\lambda t}\, d\lambda = \mathscr{L}_{\text{II}}^{-1}\left[e^{-\lambda z}\right].$$

Как и требовалось, она равна $U_0(t - z)$.

$K(t, \lambda)$, являющуюся реакцией на $k(t, \lambda)$, где λ рассматривается как параметр, называют обычно характеристической функцией. При $k(t, \lambda) = U_0(t - \lambda)$, $K(t, \lambda)$ служит импульсной характеристикой $h(t, \lambda)$. На основе уравнений (3.10.1) и (3.10.4) выражение для $y(t)$ становится равным

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} v(\lambda)\, h(t, \lambda)\, d\lambda, \qquad (3.10.6)$$

что совпадает с уравнением (1.5.7). При $k(t, \lambda) = e^{\lambda t}/2\pi j$ из уравнения (3.9.16) следует $K(t, \lambda) = (1/2\pi j) H(t, \lambda) e^{\lambda t}$. Таким образом, при использовании преобразования Лапласа имеем

$$y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_C a(\lambda)\, H(t, \lambda)\, e^{\lambda t}\, d\lambda = \mathscr{L}_{\text{II}}^{-1}[a(\lambda)\, H(t, \lambda)], \qquad (3.10.7)$$

где $a(\lambda) = \mathscr{L}_{\text{II}}[v(t)]$, что согласуется с уравнением (3.9.17).

Если известна импульсная характеристика $h(t, \lambda)$, то при произвольно выбранных элементарных функциях $k(t, \lambda)$ можно

---

*) Для преобразования Фурье $k(t, \lambda) = e^{j\lambda t}/2\pi$ при $-\infty < t < \infty$, где λ — действительная переменная, ранее обозначаемая через ω. Для одностороннего преобразования Лапласа $k(t, \lambda) = e^{\lambda t}/2\pi j$ при $0 < t < \infty$. Обсуждение для общности проводится применительно к двухстороннему преобразованию Лапласа.

определить характеристическую функцию $K(t, \lambda)$. Используя уравнение (3.10.6) при $v(t) = k(t, z)$ и $y(t) = K(t, z)$, получим

$$K(t, z) = \int_{-\infty}^{\infty} k(\lambda, z) h(t, \lambda) d\lambda. \tag{3.10.8}$$

Обратно,

$$h(t, z) = \int_{C} k^{-1}(\lambda, z) K(t, \lambda) d\lambda. \tag{3.10.9}$$

В частном случае $k(t, \lambda) = e^{\lambda t}/2\pi j$ и $k^{-1}(\lambda, t) = e^{-\lambda t}$ эти два уравнения должны связывать передаточную функцию $H(t, s)$, описанную в § 3.9, с импульсной характеристикой. При этом в соответствии с уравнением (3.9.16) $K(t, z) = (1/2\pi j) H(t, z) e^{zt}$. Подстановка этих величин в уравнение (3.10.8) дает

$$\frac{1}{2\pi j} H(t, z) e^{zt} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} e^{z\lambda} h(t, \lambda) d\lambda.$$

Таким образом,

$$H(t, z) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \lambda) e^{-z(t-\lambda)} d\lambda = \int_{-\infty}^{8} h_*(t, t-\lambda) e^{-z(t-\lambda)} d\lambda.$$

Положив $\xi = t - \lambda$, получим

$$H(t, z) = \int_{-\infty}^{\infty} h_*(t, \xi) e^{-z\xi} d\xi = \mathscr{L}_{\text{II}}[h_*(t, \xi)], \tag{3.10.10}$$

что согласуется с уравнением (3.9.14). Уравнение (3.10.9) принимает вид

$$h(t, z) = \frac{1}{2\pi j} \int_{C} e^{-z\lambda} H(t, \lambda) e^{\lambda t} d\lambda = \frac{1}{2\pi j} \int_{C} H(t, \lambda) e^{\lambda(t-z)} d\lambda.$$

Тогда

$$h_*(t, z) = h(t, t-z) = \frac{1}{2\pi j} \int_{C} H(t, \lambda) e^{\lambda z} d\lambda =$$

$$= \mathscr{L}_{\text{II}}[H(t, \lambda)], \tag{3.10.11}$$

что соответствует уравнению (3.9.15).

Уравнения (3.10.1)—(3.10.3), (3.10.8) и (3.10.9) применимы при произвольном выборе элементарных функций $k(t, \lambda)$. Не-

смотря на то, что в данной книге рассмотрены лишь отдельные частные случаи, такие как интегралы совмещения (в первой главе), а также наиболее известные интегральные преобразования, в ряде случаев оказываются полезными и менее известные интегральные преобразования (преобразования Меллина, Ганкеля, Гильберта, Эйлера и Уиттекера). Заслуживающим внимания может показаться проведение систематического исследования различных видов элементарных функций $k(t, \lambda)$ с целью получения новых преобразований. Однако подобное исследование ограничено общей трудностью нахождения обратных функций $k^{-1}(t, \lambda)$ удовлетворяющих уравнению (3.10.3). При этом для эффективности новых преобразований нахождение характеристической функции $K(t, \lambda)$ должно быть относительно простым.

Спектральная функция $a(\lambda)$ входного сигнала $v(t)$ часто обозначается через $V(\lambda)$. С учетом сказанного уравнения (3.10.2) и (3.10.3) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} V(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} v(t)\, k^{-1}(\lambda, t)\, dt, \\ v(t) &= \int_C V(\lambda)\, k(t, \lambda)\, d\lambda, \\ y(t) &= \int_C V(\lambda)\, K(t, \lambda)\, d\lambda = \\ &= \int_C Y(\lambda)\, k(t, \lambda)\, d\lambda, \end{aligned}\right\} \qquad (3.10.12)$$

где $Y(\lambda)$ — спектральная функция или преобразование выходного сигнала $y(t)$ на множестве элементарных функций $k(t, \lambda)$. Для характеристической функции $K(t, \lambda)$ вида $K(t, \lambda) = H(\lambda) k(t, \lambda)$ связь между $Y(\lambda)$ и $V(\lambda)$ становится особенно простой. В этом случае элементарные функции $k(t, \lambda)$ называют «собственными функциями» рассматриваемой системы.

$$H(\lambda) = \frac{\text{реакция на } k(t, \lambda)}{k(t, \lambda)}$$

называют передаточной функцией системы по отношению к $k(t, \lambda)$. В этом случае

$$y(t) = \int_C V(\lambda)\, H(\lambda)\, k(t, \lambda)\, d\lambda.$$

Следовательно, $Y(\lambda) = V(\lambda) H(\lambda)$. Тогда уравнения (3.10.12) можно переписать в виде

$$\left.\begin{aligned} V(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} v(t)\, k^{-1}(\lambda, t)\, dt, \\ Y(\lambda) &= V(\lambda) H(\lambda), \\ y(t) &= \int_C Y(\lambda)\, k(t, \lambda)\, d\lambda. \end{aligned}\right\} \qquad (3.10.13)$$

Эти выражения наглядно описывают три этапа, сопровождающие использование преобразований Фурье и Лапласа: прямое преобразование, умножение на передаточную функцию системы и обратное преобразование.

Вынужденная реакция линейной системы с постоянными параметрами на $e^{\lambda t}$, как показано в уравнении (2.6.22) *), имеет вид $H(\lambda) e^{\lambda t}$.

Для таких систем приведенные выше уравнения принимают следующий вид:

$$\begin{gathered} V(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)\, e^{-\lambda t}\, dt = \mathscr{L}_{\text{II}}[v(t)], \\ Y(\lambda) = V(\lambda) H(\lambda), \qquad (3.10.14) \\ y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_C Y(\lambda)\, e^{\lambda t}\, d\lambda = \mathscr{L}_{\text{II}}^{-1}[Y(\lambda)]. \end{gathered}$$

Для линейных систем с переменными параметрами передаточная функция системы H, как указано в предыдущем параграфе, зависит как от t, так и от λ.

§ 3.11. z-преобразование

Преобразование Лапласа, используемое в предыдущих параграфах для решения дифференциальных уравнений и определения реакции системы на непрерывные сигналы, применимо также для решения разностных уравнений и определения реакции на дискретные сигналы [16]. Однако для последних целей наиболее удобным оказывается применение z-преобразования. Несмотря на то, что подобный подход использовался ранее исследователями, в том числе и самим Лапласом, только недавно z-преобразование привлекло к себе широкое внимание инже-

*) Л. Заде указал, что подобное утверждение справедливо и для определенного класса нелинейных систем [15].

неров, главным образом в связи с приложением к импульсным системам автоматического управления.

Для целостности изложения вначале рассматривается связь z-преобразования с более знакомым преобразованием Лапласа и дискретными сигналами, описанными в § 1.8. После этого лучше рассмотреть дискретные сигналы в виде последовательности взвешенных мгновенных импульсов, а не в виде ряда ограниченных чисел, так как преобразование Лапласа от последнего тождественно равно нулю. Решение любой задачи, включающей в себя последовательности ограниченных чисел, непосредственно получается из решения соответствующей задачи для мгновенных импульсов.

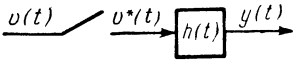


Рис. 3.11.1.

На рис. 3.11.1 изображена линейная система, стоящая после идеального импульсного элемента с периодом T. Из уравнения (1.8.4) следует

$$v^*(t) = v(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_0(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v(nT)\, U_0(t - nT), \qquad (3.11.1)$$

где нижний предел становится равным нулю, если $v(t) = 0$ при $t < 0$. Двухстороннее и одностороннее преобразования Лапласа уравнения (3.11.1) равны

$$\begin{aligned} V_{\text{II}}^*(s) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} v(nT)\, e^{-nTs}, \\ V^*(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} v(nT)\, e^{-nTs}. \end{aligned} \qquad (3.11.2)$$

Так как в обоих случаях переменной величиной, по сути, является e^{-nTs}, то удобно ее обозначить через

$$z = e^{sT}. \qquad (3.11.3)$$

Несмотря на противоречие общепринятой математической терминологии, стало привычным обозначать

$$V(z) = [V^*(s)]_{e^{sT}=z}. \qquad (3.11.4)$$

$V(z)$ не равно $V(s)$ при замене s на z, а равно $V^*(s)$ при замене s на $(1/T)\ln z$. Уравнения (3.11.2) тогда принимают вид

$$\begin{aligned} V_{\text{II}}(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} v(nT)\, z^{-n}, \\ V(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} v(nT)\, z^{-n}. \end{aligned} \qquad (3.11.5)$$

Рассмотрение выходной реакции для структуры на рис. 3.11.1, а также для более сложных схем откладывается до изучения свойств z-преобразования. В дальнейшем читатель должен заметить сходство между свойствами преобразования Лапласа и z-преобразования.

Двухстороннее z-преобразование. Формально двухстороннее преобразование определяется как

$$F(z) = \mathfrak{Z}_{\text{II}}[f(t)] = \mathfrak{Z}_{\text{II}}[f^*(t)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\, z^{-n} \qquad (3.11.6)$$

или, что то же самое,

$$F(z) = \{\mathscr{L}_{\text{II}}[f^*(t)]\}_{e^{sT}=z}, \qquad (3.11.7)$$

где T — известная постоянная. Так как $F(z)$ зависит только от значений $f(t)$ в моменты $t=nT$, то его можно считать преобразованием как от $f(t)$, так и от $f^*(t)$.

Альтернативная трактовка основывается на том факте, что показатель степени z в уравнении (3.11.6) определяет место элемента бесконечной последовательности..., $f(-T)$, $f(0)$, $f(T)$, ..., $f(nT)$... Переменную z часто считают основанием бесконечной последовательности.

Уравнение (3.11.6) определяет $F(z)$ только для тех значений z, при которых бесконечный ряд сходится. Для других значений комплексной переменной $zF(z)$ определяется на основе принципа аналитического продолжения. Если $F(z)$ записывается в виде бесконечного ряда (3.11.6), то из формы записи непосредственно видны величины $f(nT)$. Если $F(z)$ представлена в замкнутой форме, то $f(nT)$ можно определить на основе методов, описываемых в следующем параграфе.

Пример 3.11.1. Найти z-преобразование от

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ e^{at} & \text{при } t \geqslant 0. \end{cases}$$

На основе уравнения (3.11.6) имеем

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{anT} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^{aT}}{z}\right)^n.$$

Этот бесконечный ряд сходится при

$$\left|\frac{e^{aT}}{z}\right| < 1, \text{ т. е. } |z| > e^{aT},$$

и записывается в замкнутой форме

$$F(z)=\frac{1}{1-(e^{aT}/z)}=\frac{z}{z-e^{aT}}.$$

Пример 3.11.2. Найти z-преобразование от

$$f(t)=\begin{cases}-e^{at} & \text{при} \quad t<0,\\ 0 & \text{при} \quad t\geqslant 0.\end{cases}$$

Снова используя основное определение, получим

$$F(z)=-\sum_{n=-\infty}^{-1} e^{anT}z^{-n}=-\sum_{m=1}^{\infty}(e^{-aT}z)^{m}=$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}(e^{-aT}z)^{n+1}=-e^{-aT}z\sum_{n=0}^{\infty}(e^{-at}z)^{n}.$$

Бесконечный ряд сходится при $|z|<e^{aT}$ и записывается в замкнутой форме

$$F(z)=-e^{-aT}z\,\frac{1}{1-e^{-aT}z}=\frac{z}{z-e^{aT}}.$$

Если $F(z)$ задается в замкнутой форме, как это показано в предыдущих примерах, то для определения функции времени, соответствующей данной функции z, следует определить область ее сходимости. Заметим, что две области сходимости взаимно исключают друг друга, и что только одна из двух функций времени является ограниченной.

Одностороннее z-преобразование. Если предыстория системы относительно $t=0$ учитывается соответствующими граничными условиями, то можно полагать $f(t)$ равной нулю при $t<0$. Одностороннее преобразование, используемое в том случае, если не утверждается противное, определяется как

$$F(z)=\mathcal{Z}\,[f(t)]=\sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\,z^{-n}, \tag{3.11.8}$$

или, что то же самое,

$$F(z)=\{\mathscr{L}\,[f^{*}(t)]\}_{e^{sT}=z}. \tag{3.11.9}$$

На основе этого выражения можно построить таблицу z-преобразований типа таблицы 3.11.1. Ограниченность уравнения (3.11.8) состоит в том, что могут возникнуть некоторые трудности при представлении бесконечного ряда в замкнутой форме. В следующем параграфе обсуждается один метод, позволяющий преодолеть эти трудности.

В ряде случаев необходимо найти двухстороннее преобразование по таблице одностороннего преобразования.

Таблица 3.11.1

$f(t)$	$F(z)$	Область сходимости
$U_{-1}(t)$	$\frac{z}{z-1}$	$\lvert z\rvert > 1$
t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$	$\lvert z\rvert > 1$
t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$	$\lvert z\rvert > 1$
e^{at}	$\frac{z}{z-e^{aT}}$	$\lvert z\rvert > e^{aT}$
$\sin\beta t$	$\frac{z\sin\beta T}{z^2-2z\cos\beta T+1}$	$\lvert z\rvert > 1$
$\cos\beta t$	$\frac{z(z-\cos\beta T)}{z^2-2z\cos\beta T+1}$	$\lvert z\rvert > 1$

$$\mathfrak{Z}_{\text{II}}[f(t)] = \sum_{n=-\infty}^{0} f(nT)z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)z^{-n} - f(0).$$

Наличие последнего члена компенсирует присутствие $n=0$ в обеих операциях суммирования. Положив $m=-n$, получим

$$\mathfrak{Z}_{\text{II}}[f(t)] = \sum_{m=0}^{\infty} f(-mT)z^{m} + \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)z^{-n} - f(0) =$$
$$= \{\mathfrak{Z}[f(-t)]\}_{z\to z^{-1}} + \mathfrak{Z}[f(t)] - f(0). \qquad (3.11.10)$$

В частном случае четной функции $f(-t)=f(t)$ и

$$\mathfrak{Z}_{\text{II}}[f(t)] = F(z^{-1}) + F(z) - f(0), \qquad (3.11.11)$$

где $F(z)=\mathfrak{Z}[f(t)]$.

§ 3.12. Свойства z-преобразования

Одностороннее z-преобразование обладает свойствами, эквивалентными соответствующим свойствам одностороннего преобразования Лапласа. Доказывается несколько свойств, большинство доказательств предоставляется читателю в качестве упражнений.

Теорема 3.12.1. Для существования $F(z)$ необходимо, чтобы $f(t)$ была определена при всех $t=nT$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$.

Теорема 3.12.2. Выражение (3.11.8) сходится абсолютно при $|z|>c$, где величина c известна как радиус абсолютной сходимости.

Теорема 3.12.3. Две функции времени имеют одно и то же преобразование Лапласа тогда и только тогда, если они совпадают при всех $t=nT$ ($n=0, 1, 2 \ldots$). Таким образом, $F(z)$ содержит информацию только о значениях $f(t)$ в моменты квантования. Обратное преобразование $\mathscr{Z}^{-1}[F(z)]$ определяет единственным образом как $f^*(t)$, так и $f(nT)$; последнее определение используется в данной книге. При использовании таблиц 3.11.1 и 3.12.1 для нахождения обратного преобразования следует заменить на nT переменную t в левом столбце таблицы.

Теорема 3.12.4. z-преобразование $f(t/T)$ не зависит от интервала квантования T. Согласно определению (3.11.8)

$$\mathfrak{Z}\,[f(t/T)] = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\, z^{-n}$$

не зависит от T. Эта теорема полезна при нахождении обратного преобразования посредством разложения на элементарные дроби, особенно если имеющиеся таблицы составлены для $T=1$.

Другие свойства z-преобразования. В таблице 3.12.1 перечислены наиболее полезные свойства z-преобразования. Уравнения (3.12.1)—(3.12.5) составляют основу решения различных уравнений с постоянными параметрами, что рассматривается в следующем параграфе. Для доказательства, например, уравнения (3.12.3) положим $m = n + 1$ и запишем

$$\mathfrak{Z}\,[f(t+T)] = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT+T)\, z^{-n} = z \sum_{m=1}^{\infty} f(mT)\, z^{-m} =$$

$$= z \sum_{m=0}^{\infty} f(mT)\, z^{-m} - zf(0) = zF(z) - zf(0).$$

Из уравнения (3.12.6) вытекает метод суммирования конечных и бесконечных рядов. Уравнения (3.12.7)—(3.12.10) полезны для нахождения прямого и обратного преобразований от заданных функций. Уравнение (3.12.11) показывает влияние изменения масштаба в z-плоскости, а уравнения (3.12.12) и (3.12.13) являются формулами свертывания. Первое из них доказано и исследовано в § 3.13. Уравнения (3.12.14) и (3.12.15) известны соответственно как теоремы о начальном и конечном значениях.

В таблице 3.12.2 записаны три свойства, связывающие z-преобразования с преобразованием Лапласа. $F(s)$ и $F^*(s)$ представляют преобразование Лапласа соответственно $f(t)$ и $f^*(t)$. Для доказательства первого свойства перепишем уравнение (3.11.1) в виде

$$f^*(t) = f(t)\, i(t),$$

Таблица 3.12.1

Свойство	Номер уравнения
$\mathfrak{Z}[f_1(t)+f_2(t)]=\mathfrak{Z}[f_1(t)]+\mathfrak{Z}[f_2(t)]=F_1(z)+F_2(z)$	(3.12.1)
$\mathfrak{Z}[af(t)]=aF(z)$	(3.12.2)
$\mathfrak{Z}[f(t+T)]=zF(z)-zf(0)$	(3.12.3)
$\mathfrak{Z}[f(t+2T)]=z^2F(z)-z^2f(0)-zf(T)$	(3.12.4)
$\mathfrak{Z}[f(t+mT)]=z^mF(z)-z^mf(0)-z^{m-1}f(T)-\ldots-zf(mT-T)$	(3.12.5)
$\mathfrak{Z}\left[\sum_{k=0}^{n}f(kT)\right]=\frac{z}{z-1}F(z)$	(3.12.6)
$\mathfrak{Z}[e^{-at}f(t)]=F(e^{aT}z)$	(3.12.7)
$\mathfrak{Z}[tf(t)]=-Tz\frac{d}{dz}F(z)$	(3.12.8)
$\mathfrak{Z}\left[\frac{f(t)}{t}\right]=-\frac{1}{T}\int\frac{F(z)}{z}dz$	(3.12.9)
$\mathfrak{Z}[f(t-kT)U_{-1}(t-kT)]=z^{-k}F(z)$	(3.12.10)
$\mathfrak{Z}[a^tf(t)]=F\left(\frac{z}{a^T}\right)$	(3.12.11)
$\mathfrak{Z}\left[\sum_{k=0}^{n}f_1(t-kT)f_2(kT)\right]=F_1(z)F_2(z)$	(3.12.12)
$\mathfrak{Z}[f_1(t)f_2(t)]=\frac{1}{2\pi j}\oint_C\frac{F_1(w)F_2(z/w)}{w}dw,$ где контур интегрирования разделяет полосы $F_1(w)$ от полюсов $F_2(z/w)$.	(3.12.13)
$\lim_{t\to 0}f(t)=\lim_{z\to\infty}F(z)$ при условии, что предел существует,	(3.12.14)
$\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{z\to 1}\left(\frac{z-1}{z}\right)F(z)$ при условии, что $[(z-1)/z]F(z)$ является аналитической на и вне единичного круга.	(3.12.15)

где $i(t)$ означает последовательность мгновенных импульсов

$$i(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}U_0(t-nT).$$

Тогда

$$F^*(s)=\mathscr{L}[f(t)\,i(t)],$$

Таблица 3.12.2

Свойство	Номер уравнения
$F(z)=\sum\left[\text{вычетов}\ \frac{F(s)}{1-e^{sT}z^{-1}}\ \text{в полюсах}\ F(s)\right],$	(3.12.16)
$F^*(s)=\frac{1}{T}\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}F\left(s+j\frac{2\pi k}{T}\right)=F^*\left(s+j\frac{2\pi n}{T}\right).$	(3.12.17)
Если $F(s)=F_1(s)F_2^*(s)$, то $F(z)=F_1(z)F_2(z)$.	(3.12.18)

что позволяет использовать теорему свертывания в комплексной области, описываемую уравнениями (3.7.7) и (3.7.8). Используя результат примера 3.4.3, получим

$$I(s)=\frac{1}{1-e^{-Ts}}.$$

Это функция, имеющая простые полюсы при

$$e^{-Ts}=1,$$
$$Ts=\pm j2\pi k,$$
$$s=\pm j\frac{2\pi k}{T}\quad\text{при}\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

На основе уравнений (3.7.7) и (3.7.8) имеем

$$F^*(s)=\frac{1}{2\pi j}\int\limits_C\frac{F(w)}{1-e^{-T(s-w)}}\,dw=$$
$$=\sum\left[\text{вычетов}\ \frac{F(w)}{1-e^{-Ts}e^{wT}}\ \text{в полюсах}\ F(w)\right]. \qquad (3.12.19)$$

Заменив e^{Ts} на z, получим

$$F(z)=\sum\left[\text{вычетов}\ \frac{F(w)}{1-e^{wT}z^{-1}}\ \text{в полюсах}\ F(w)\right].$$

Это совпадает с уравнением (3.12.16), если фиктивную переменную w заменить снова на s. Из данного выражения следует метод определения $F(z)$ непосредственно в замкнутой форме, не прибегая к вычислению суммы бесконечного ряда. Более того, при анализе систем чаще оперируют с $F(s)$, чем с $f(t)$. В этом случае уравнение (3.12.6) позволяет вычислить $F(z)$, не требуя на промежуточной стадии нахождения $f(t)$.

Пример 3.12.1. Найти $\mathscr{Z}[te^{-at}]$.

$$F(z)=\left[\text{вычету } \frac{1}{(s+a)^2(1-e^{sT}z^{-1})} \text{ в } s=-a\right]=$$

$$=\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{1-e^{sT}z^{-1}}\right)\right]_{s=-a}=\frac{Te^{-aT}z}{(z-e^{-aT})^2}.$$

Подобный результат следует из таблицы 3.11.1 и уравнений (3.12.7) или (3.12.8).

Пример 3.12.2. Найти $F(z)$, соответствующую $F(s)=[s(2s+3)]/[(s+1)^2(s+2)]$.

Вычет $\dfrac{F(s)}{[1-e^{sT}z^{-1}]}$ в $s=-1$ равен

$$\left[\frac{d}{ds}\left\{\frac{s(2s+3)}{(s+2)(1-e^{sT}z^{-1})}\right\}\right]_{s=-1}=\frac{-Te^{-T}z}{(z-e^{-T})^2}.$$

Вычет в $s=-2$ равен

$$\left[\frac{s(2s+3)}{(s+1)^2(1-e^{sT}z^{-1})}\right]_{s=-2}=\frac{2z}{z-e^{-2T}}.$$

Следовательно,

$$F(z)=\frac{2z}{z-e^{-2T}}-\frac{Te^{-T}z}{(z-e^{-T})^2}.$$

Подобный результат можно получить нахождением

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s(2s+3)}{(s+1)^2(s+2)}\right]=2e^{-2t}-te^{-t},$$

определяя z-преобразование этих двух функций по таблицам.

Доказательство уравнения (3.12.17) следует из простого видоизменения уравнения (3.12.19). Как показано в уравнении (3.7.8), сумму вычетов $F(w)/[1-e^{-T(s-w)}]$ в полюсах $F(w)$ можно заменить суммой вычетов со знаком минус от той же самой функции в полюсах $1/[1-e^{-T(s-w)}]$. Указанные полюсы расположены в точках

$$w=s\pm j\frac{2\pi k}{T} \quad \text{при} \quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

На основе уравнения (3.6.20) вычет $F(w)/[1-e^{-T(s-w)}]$ в одном из этих простых полюсов равен

$$\left\{\frac{F(w)}{(d/dw)[1-e^{-T(s-w)}]}\right\}_{w=s\pm j(2\pi k/T)}=-\frac{1}{T}F\left(s\pm j\frac{2\pi k}{T}\right).$$

Тогда

$$F^*(s)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}F\left(s+j\frac{2\pi k}{T}\right),$$

что совпадает с первой половиной уравнения (3.12.17). Другое доказательство этого результата предлагается в качестве задачи в конце данной главы. Если s заменить на $s+j(2\pi n/T)$, то

$$F^*\left(s+j\frac{2\pi n}{T}\right)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}F\left(s+j\frac{2\pi(k+n)}{T}\right).$$

Правую часть выражения можно переписать в виде

$$\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}F\left(s+j\frac{2\pi m}{T}\right)=F^*(s),$$

что и доказывает справедливость второй половины уравнения (3.12.17) *).

Несмотря на то, что наиболее важное применение уравнения (3.12.17), по-видимому, состоит в доказательстве других теорем, оно позволяет также глубже понять сущность квантования по времени непрерывных сигналов. Предположим, что спектр непрерывного сигнала $f(t)$ имеет вид, показанный на рис. 3.12.1, *а*. Считаем, что спектр сигнала ограничен, так что не встречаются составляющие частоты, превышающие ω_c радианов в секунду. Частотный спектр $F^*(s)$ задается выражением

$$|F^*(j\omega)|=\frac{1}{T}\left|\sum_{k=-\infty}^{\infty}F\left[j\left(\omega+\frac{2\pi k}{T}\right)\right]\right|$$

---

*) Уравнения (3.12.16) и (3.12.17) приведены в форме, обычно встречающейся в литературе; но они несовместны, если $f(t)$ терпит разрыв при $t=0$. Уравнение (3.12.16) справедливо, если значение функции в начале координат определено как $f(0+)$, тогда как в уравнении (3.12.17) оно предполагается равным $\frac{1}{2}[f(0-)+f(0+)]$. Для объяснения их несовместности напомним, что уравнение (3.7.8) требует, чтобы интеграл вдоль DFA и DHA на рис. 3.7.7 равнялся нулю; при этом следует тщательно проверить интегрирование вдоль этих полуокружностей. Если не утверждается противное, то обычно полагают $f(0+)$ равным значению функции при $t=0$. Так как для одностороннего преобразования $f(0-)=0$, то уравнение (3.12.17) следует читать как

$$F^*(s)=\frac{1}{2}f(0+)+\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}F\left(s+j\frac{2\pi k}{T}\right).$$

В доказательстве уравнения (3.12.17), предлагаемом в задаче 3.31, при записи ряда Фурье от последовательности мгновенных импульсов $i(t)$ считается четной функцией времени. Тогда одностороннее преобразование Лапласа учитывает действие только «половины мгновенного импульса» в начале координат, так что опять необходим член $\frac{1}{2}f(0+)$.

и показан на рис. 3.12.1, *б* и 3.12.1 *в* при двух различных значениях периода квантования T. Спектр непрерывного сигнала повторяется на чертеже каждые $\frac{2\pi}{T}$ радиан в секунду. При $\pi/T > \omega_c$ (см. рис. 3.12.1, *б*) процесс квантования не нарушает исходный вид $|F(j\omega)|$. Однако при $\pi/T < \omega_c$ (см. рис. 3.12.1 *в*) первоначальная форма $|F(j\omega)|$ не появляется больше в частотном

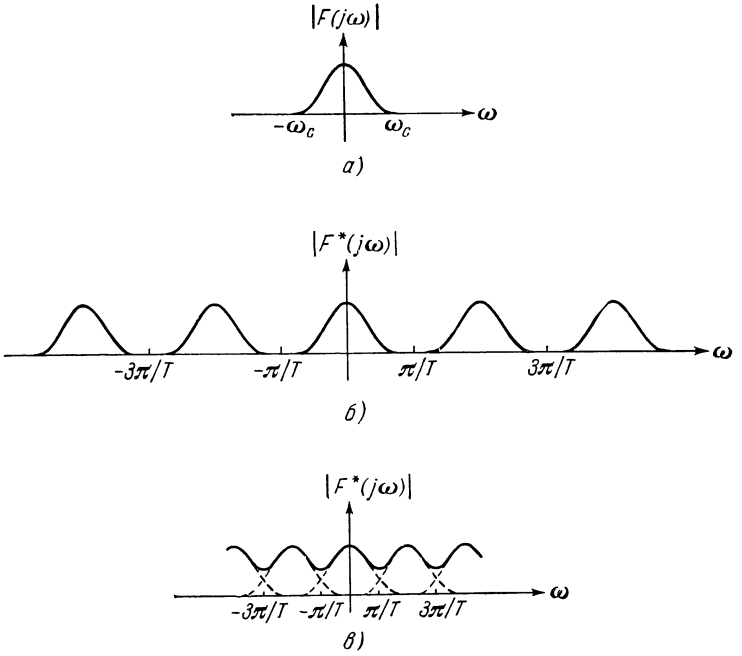


Рис. 3.12.1.

спектре квантованного сигнала. Таким образом, непрерывный сигнал теоретически можно получить из квантованного сигнала $f^*(t)$ путем линейной фильтрации в том и только в том случае, если $\pi/T > \omega_c$. Данное утверждение соответствует теореме Шеннона [17].

Восстановление непрерывного сигнала можно производить при помощи идеального низкочастотного фильтра. Однако приближенное построение идеального фильтра требует большого количества элементов, в результате чего получается большое время запаздывания. Во многих импульсных системах цепь, стоящая за импульсным элементом, по сути, ведет себя как

низкочастотный фильтр, уменьшающий высокочастотные составляющие и производящий сглаживание сигнала [18].

Если разделить s-плоскость на горизонтальные полосы, как показано на рис. 3.12.2, то из уравнения (3.17.17) следует, что расположение нулей и полюсов в каждой из полос одинаковое. Значения $F^*(s)$ в соответствующих точках различных полос совпадают. Таким образом, $F^*(s)$ однозначно описывается ее значениями в полосе $-\pi/T < \omega < \pi/T$.

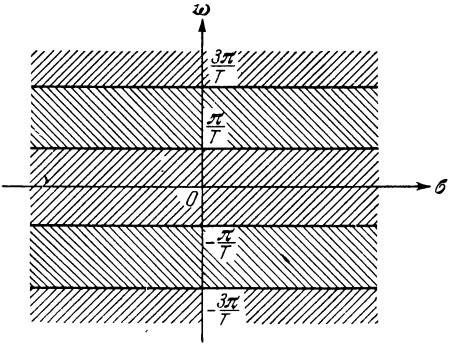


Рис. 3.12.2.

Полезно отметить, что левая часть s-плоскости отображается на z-плоскости внутрь единичного круга, как это показано на рис. 3.12.3. При $s=\sigma+j\omega$ и $z=\rho e^{j\theta}$, где z записана в полярной форме, преобразование $z=e^{sT}$ дает

$$\rho e^{j\theta} = e^{\sigma T} e^{j\omega T}. \tag{3.12.20}$$

Тогда $\rho = e^{\sigma T}$ и $\theta = \omega T$. При $\sigma < 0$, $\sigma = 0$ или $\sigma > 0$ величина z соответственно равна $\rho < 1$, $\rho = 1$ (единичный круг), или $\rho > 1$.

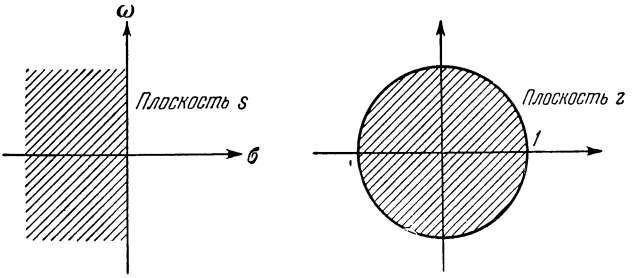


Рис. 3.12.3

Отметим также, что величина z не изменится при замене ω на $\omega + 2\pi/T$. Поэтому произвольная горизонтальная полоса на рис. 3.12.2 отображается на всю z-плоскость. Это, конечно, согласуется с предыдущим выводом о том, что значения $F^*(s)$ при $-\pi/T < \omega < \pi/T$ однозначно определяют $F^*(s)$, а значит, и $F(z)$, а также объясняет, почему $F(z)$ содержит конечное число полюсов, несмотря на их бесконечное число у $F^*(s)$.

Используемое в следующем параграфе уравнение (3.12.18) непосредственно вытекает из уравнения (3.12.17). Если $F(s) = F_1(s) F_2^*(s)$, то

$$F^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[F_1\left(s + j\frac{2\pi k}{T}\right) F_2^*\left(s + j\frac{2\pi k}{T}\right)\right].$$

Так как при всех целых значениях k

$$F_2^*\left(s + j\frac{2\pi k}{T}\right) = F_2^*(s),$$

то отсюда следует

$$F^*(s) = F_2^*(s)\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_1\left(s + j\frac{2\pi k}{T}\right) = F_2^*(s) F_1^*(s)$$

или

$$F(z) = F_2(z) F_1(z).$$

Обратное преобразование. При заданной $F(z)$ существуют три способа нахождения $f(nT)$ или $f^*(T)$ — в виде бесконечного ряда, разложением на элементарные дроби и при помощи интеграла обратного преобразования. Как показано в примерах 3.11.1 и 3.11.2, при использовании двухстороннего z-преобразования для однозначного определения $f(t)$ в моменты квантования необходимо точно задавать область сходимости. Это наилучшим образом разрешается путем применения третьего из трех методов обратного преобразования; поэтому первоначальное обсуждение ограничивается рассмотрением одностороннего преобразования.

Первый метод состоит в построении ряда, присутствующего в определении (3.11.8), повторяемом ниже,

$$F(z) = f(0) + f(T) z^{-1} + \ldots + f(nT) z^{-n} + \ldots. \quad (3.12.21)$$

Величины $f(nT)$ определяются при этом непосредственно по виду этого выражения. Уравнение (3.12.21) можно рассматривать как ряд Тэйлора, записанный около бесконечно удаленной точки. Если $\varphi(z)$ означает функцию, образованную из $F(z)$ путем замены z на $\frac{1}{z}$, то

$$\varphi(z) = f(0) + f(T) z + \ldots + f(nT) z^n + \ldots,$$

представляет ряд Тэйлора относительно начала координат. Из уравнения (3.6.12) имеем

$$f(nT) = \left(\frac{1}{n!}\right) \frac{d^n \varphi(0)}{dz^n}.$$

Однако, как указывалось в § 3.6, обычно проще найти эти коэффициенты непосредственным делением. Если $\varphi(z)$ представляет собой отношение двух многочленов, то для получения бесконечного ряда надлежащего вида многочлены следует записывать в порядке возрастания степеней. Оперируя непосредственно с $F(z)$, числитель и знаменатель следует записать по возрастающим степеням (z^{-1}).

Пример 3.12.3.

$$F(z)=\frac{2z}{(z-2)(z-1)^2}=\frac{2z^{-2}}{1-4z^{-1}+5z^{-2}-2z^{-3}}.$$

Определить $f(nT)$. Путем непосредственного деления получим

$$F(z)=2z^{-2}+8z^{-3}+22z^{-4}+\ldots$$

Отсюда

$$\begin{aligned} f(0)&=0,\\ f(T)&=0,\\ f(2T)&=2,\\ f(3T)&=8,\\ f(4T)&=22.\\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

Часто этот метод оказывается проще любого другого, если требуется определить $f(nT)$ лишь для нескольких значений n. Недостатком метода является то, что он не дает общего выражения для n-го члена в замкнутой форме.

Второй метод основывается на разложении $F(z)/z$ на элементарные дроби и использовании таблицы преобразования небольшого объема, типа таблицы 3.11.1. Непосредственно $F(z)$ на элементарные дроби не раскладывается, так как фигурирующие в таблице функции от z имеют в числителе множитель z.

Пример 3.12.4. $F(z)=\dfrac{2z}{(z-2)(z-1)^2}$. Найти $f(nT)$.

На основе методов § 3.4 имеем

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{2}{(z-2)(z-1)^2}=\frac{2}{z-2}-\frac{2}{(z-1)^2}-\frac{2}{z-1},$$

$$F(z)=2\left[\frac{z}{z-2}-\frac{z}{(z-1)^2}-\frac{z}{z-1}\right].$$

Полагая $T=1$, из таблицы 3.11.1 получим

$$f(n)=2[2^n-n-1] \quad \text{при } n\geqslant 0.$$

Если T не обязательно единица, то на основе теоремы 3.12.4 будет

$$f(nT)=2[2^n-n-1] \text{ при } n\geqslant 0.$$

Читателю следует проверить, что при $n=0, 1, 2, \ldots$ этот результат совпадает с полученным в предыдущем примере.

Пример 3.12.5. $F(z)=\dfrac{z(z^2-2z-1)}{(z^2+1)^2}$. Найти $f(nT)$.

Разложение на элементарные дроби имеет вид

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{A}{(z-j)^2}+\frac{B}{(z-j)}+\frac{C}{(z+j)^2}+\frac{D}{(z+j)},$$

где

$$A=\frac{1+j}{2},\quad C=\frac{1-j}{2},\quad B=D=0.$$

Тогда

$$F(z)=\frac{1+j}{2}\,\frac{-j(-jz)}{(-jz-1)^2}+\frac{1-j}{2}\,\frac{j(jz)}{(jz-1)^2}=$$

$$=\frac{1-j}{2}\,\frac{e^{-j\pi/2}z}{(e^{-j\pi/2}z-1)^2}+\frac{1+j}{2}\,\frac{e^{j\pi/2}z}{(e^{j\pi/2}z-1)^2}.$$

На основе таблицы 3.11.1 и уравнения 3.12.7 имеем

$$f(nT)=\frac{1}{2}\left[\sqrt{2}\,e^{-j\pi/4}ne^{j\pi n/2}+\sqrt{2}\,e^{j\pi/4}ne^{-j\pi n/2}\right]=$$

$$=\sqrt{2}\,n\cos\left(\frac{\pi}{2}n-\frac{\pi}{4}\right)\quad\text{при}\quad n\geqslant 0.$$

Процедура решения данного примера характерна для случая комплексно-сопряженных полюсов у $F(z)$.

Третий метод нахождения $f(nT)$ основан на интеграле обратного преобразования, который можно получить различным образом. Для общности выведем его в терминах двухстороннего преобразования. Как следует из § 3.7, интеграл обратного двухстороннего преобразования Лапласа

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int\limits_C F(s)\,e^{st}\,ds,$$

где контур C является произвольным путем от $c-j\infty$ до $c+j\infty$ внутри области сходимости $\sigma_{c_1}<\sigma<\sigma_{c_2}$. Для удобства контуром выбрана вертикальная прямая. На основе рассуждений, связанных с рис. 3.12.2 и 3.12.3, логично разбить контур на отдельные участки..., $-3\pi/T<\omega<-\pi/T$, $-\pi/T<\omega<\pi/T$, $\pi/T<\omega<3\pi/T$,... Ввиду того, что в результате вывода следует получить зависимость $f(nT)$ от $F(z)$, заменим t на nT

$$f(nT)=\frac{1}{2\pi j}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int\limits_{c+[j(2k-1)\pi]/T}^{c+[j(2k+1)\pi]/T}F(s)\,e^{nTs}\,ds. \qquad (3.12.22)$$

Правую часть этого уравнения следует переписать таким образом, чтобы включить в нее $F(z)$ или, что эквивалентно, $F^*(s)$, которая выражается через $F(z)$ посредством уравнения (3.12.17).

Это достигается путем замены фиктивной переменной s в уравнении (3.12.22) на $s + j(2\pi k/T)$. Учитывая $e^{j2\pi nk} = 1$, получим

$$f(nT) = \frac{1}{2\pi j} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{c-j\pi/T}^{c+j\pi/T} F\left(s + j\frac{2\pi k}{T}\right) e^{nTs}\, ds.$$

Изменив порядок операций суммирования и интегрирования, имеем

$$f(nT) = \frac{T}{2\pi j} \int_{c-j\pi/T}^{c+j\pi/T} \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F\left(s + j\frac{2\pi k}{T}\right) e^{nTs}\, ds =$$

$$= \frac{T}{2\pi j} \int_{c-j\pi/T}^{c+j\pi/T} F^*(s)\, e^{nTs}\, ds.$$

Полагая $z = e^{Ts}$ и $dz = Tzds$, а также вспомнив из уравнения (3.12.20), что вертикальная линия $\sigma = c\,(-\pi/T < \omega < \pi/T)$ соответствует на z-плоскости окружности радиуса e^{cT}, получим

$$f(nT) = \frac{1}{2\pi j} \oint F(z)\, z^{n-1}\, dz. \qquad (3.12.23)$$

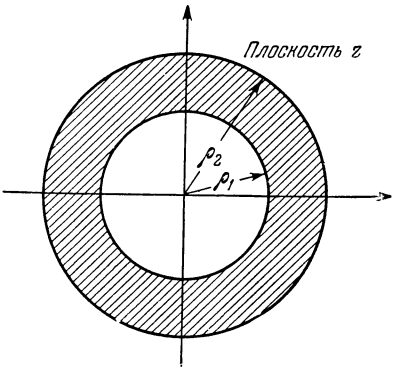


Рис. 3.12.4.

На рис. 3.12.4 изображены две окружности радиусов $\rho_1 = \exp(T\sigma_{c_1})$ и $\rho_2 = \exp(T\sigma_{c_2})$. Замкнутый контур в уравнении (3.12.24) должен содержать заштрихованную область, являющуюся областью сходимости для прямого z-преобразования. $F(z)$ является аналитической во всех точках этой области. На основе теоремы вычетов, задаваемой уравнением (3.6.16),

$$f(nT) = \sum [\text{вычетов } F(z)\, z^{n-1}] \qquad (3.12.24)$$

во всех полюсах области $|z| < \rho_1$. Уравнение достаточно общее и применимо как для положительных, так и отрицательных значений n.

Пример 3.12.6.

$$F(z) = z[(2-e)z-1]/[(z-e)(z-1)^2].$$

Область сходимости $1 < |z| < e$. Найти $f(nT)$.

$$F(z)\, z^{n-1} = \frac{z^n\,[(2-e)\,z-1]}{(z-e)\,(z-1)^2},$$

При $n \geqslant 0$ внутри контура интегрирования находится лищь один полюс $z = 1$ Вычет в этом полюсе равен

$$\left[\frac{d}{dz}\left(\frac{z^n[(2-e)z-1]}{z-e}\right)\right]_{z=1} = n+1.$$

Следовательно,

$$f(nT) = n+1 \text{ при } n \geqslant 0.$$

При $n=-1$ $F(z)z^{n-1}$ содержит дополнительно полюс $z=0$. Вычет в $z=1$ равен нулю, а вычет в $z=0$ равен

$$\left[\frac{(2-e)z-1}{(z-e)(z-1)^2}\right]_{z=0} = e^{-1}.$$

Поэтому

$$f(-T) = e^{-1}.$$

При $n=-2$ вычет в полюсе $z=1$ равен -1. Вычет в полюсе, лежащем в начале координат, второго порядка кратности, равен

$$\left[\frac{d}{dz}\frac{(2-e)z-1}{(z-e)\,)z-1)^2}\right]_{z=0} = 1+e^{-2},$$

так что $f(-2T) = e^{-2}$.

Описанная выше процедура вычисления $f(nT)$ при отрицательных n становится без необходимости громоздкой. Если $F(z)z^{n-1}$ содержит в бесконечности нули второго или более высокого порядка, то согласно [19]

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C F(z)z^{n-1}\,dz =$$

$$= -\sum[\text{вычетов } F(z)z^{n-1} \text{ в полюсах вне контура } C]. \quad (3.12.25)$$

В предыдущем примере вычет в единственном полюсе $z = e$, лежащем вне контура интегрирования, равен

$$\left[\frac{z^n[(2-e)z-1]}{(z-1)^2}\right]_{z=e} = -e^n.$$

Таким образом, при $n \leqslant 0$ $f(nT) = e^n$. Видно, что полюсы $F(z)$ в областях $|z| < \rho_1$ или $|z| > \rho_2$ (см. рис. 3.12.4) приводят к составляющим $f(nT)$ соответственно при $n > 0$ и $n < 0$. Как следует из рассуждений, приведенных в § 3.4.7, в случае одностороннего z-преобразования $\rho_2 \to \infty$ и $f(nT)$ при $n < 0$ становится равным нулю. При этом областью сходимости служит вся z-плоскость, лежащая вне круга радиуса ρ_1, включающего все полюсы $F(z)$.

Пример 3.12.7. Для одностороннего преобразования $F(z) = 2z/(z-2)(z-1)^2$. Найти $f(nT)$.

Вычет $F(z)z^{n-1}$ в $z=2$ равен

$$\left[\frac{2z^n}{(z-1)^2}\right]_{z=2} = 2(2^n),$$

а в $z=1$

$$\left[\frac{d}{dz}\left(\frac{2z^n}{z-2}\right)\right]_{z=1} = -2(n+1),$$

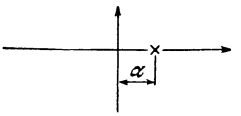
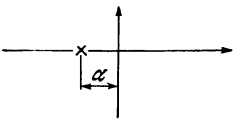
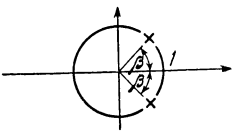
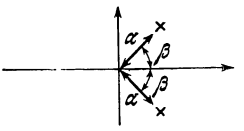
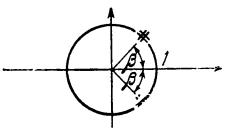
откуда

$$f(nT)=2[2^n-n-1] \text{ при } n\geqslant 0,$$

что совпадает с результатами примеров 3.12.3 и 3.12.4.

Значение нулей и полюсов. Характер членов $f(nT)$ зависит от расположения нулей и полюсов $F(z)$. Таблица 3.12.3,

Таблица 3.12.3

Расположение полюсов $F(z)$ на z-плоскости	Соответствующие члены $f(nT)$
	$A\alpha^n$
	$A(-1)^n\alpha^n$
	$A\cos(\beta n+\theta)$
	$A\alpha^n\cos(\beta n+\theta_1)$
	$An\cos(\beta n+\theta_1)+B\cos(\beta n+\theta_2)$

показывающая влияние расположения полюсов при одностороннем преобразовании, строится на основе уравнения (3.12.24) или ему эквивалентных. Полюсы, лежащие внутри или вне единичного круга, вызывают составляющие, стремящиеся при стремлении t к бесконечности соответственно к нулю или бесконечности. Простой полюс, лежащий на единичной окружности (за исключением $z=1$) соответствует синусоидальному члену постоянной амплитуды; полюсы же более высокого порядка вызывают члены, неограниченно возрастающие при стремлении t к бесконечности.

При использовании двухстороннего преобразования вид $f(nT)$ зависит как от расположения полюсов, так и от области сходимости. Если известно, что функция времени ограничена, то область сходимости должна содержаться внутри единичного круга. В этом случае полюсы вне и внутри единичного круга вызывают составляющие $f(nT)$ соответственно для «отрицательного» и «положительного» времени.

§ 3.13. Применение z-преобразования для дискретных систем

При анализе непрерывных систем с постоянными параметрами на основе преобразования Лапласа используются в основном два метода, базирующихся на преобразовании дифференциальных уравнений в алгебраические и на понятии передаточной функции системы. Подобные методы существуют и при анализе на основе z-преобразования систем с постоянными параметрами и дискретных сигналах.

Решение разностных уравнений. Произвольную линейную систему с постоянными параметрами, входной $v(t)$ и выходной $y(t)$ сигналы которой определены только в дискретные моменты времени $t=kT$, можно описать разностным уравнением

$$a_q y(kT+qT)+a_{q-1}y(kT+qT-T)+\ldots+a_1 y(kT+T)+a_0 y(kT)= \\ = b_m v(kT+mT)+\ldots+b_1 v(kT+T)+b_0 v(kT), \quad (3.13.1)$$

где a_i и b_i — постоянные величины. На основе уравнений (3.12.1)—(3.12.5) это разностное уравнение можно преобразовать в алгебраическое уравнение относительно z и разрешить относительно $Y(z)$. $y(kT)$ получается на основе изложенных в предыдущем параграфе методов обратного преобразования. Отметим, что в преобразованном уравнении будут присутствовать члены от $y(0)$ до $y(qT-T)$. Эти члены представляют q граничных условий, необходимых для определения произвольных постоянных в классическом решении.

Пример 3.13.1. Найти общее выражение для $Y(z)$, если

$$a_3y(k+3)+a_2y(k+2)+a_1y(k+1)+a_0y(k)=$$
$$=b_3v(k+3)+b_2v(k+2)+b_1v(k+1)+b_0v(k),$$

а $y(k)$ и $v(k)$ равны нулю при $k<0$.

На основе уравнений (3.12.1)—(3.12.5) при $T=1$ преобразованное уравнение принимает вид

$$[a_3z^3+a_2z^2+a_1z+a_0]\,Y(z)-z^3[a_3y(0)]-$$
$$-z^2[a_3y(1)+a_2y(0)]-z[a_3y(2)+a_2y(1)+a_1y(0)]=$$
$$=[b_3z^3+b_2z^2+b_1z+b_0]\,V(z)-z^3[b_3v(0)]-z^2[b_3v(1)+b_2v(0)]-$$
$$-z[b_3v(2)+b_2v(1)+b_1v(0)].$$

Постоянные величины $y(0)$, $v(0)$, ... $y(2)$, $v(2)$ не заданы непосредственно. Подставив $k=-3$, -2, -1 в исходное уравнение с учетом равенства нулю $y(k)$ и $v(k)$ при $k<0$, получим

$$a_3y(0)=b_3v(0),$$
$$a_3y(1)+a_2y(0)=b_2v(1)+b_2v(0),$$
$$a_3y(2)+a_2y(1)+a_1y(0)=b_3v(2)+b_2v(1)+b_1v(0).$$

Тогда преобразованное уравнение примет вид

$$Y(z)=\frac{b_3z^3+b_2z^2+b_1z+b_0}{a_3z^3+a_2z^2+a_1z+a_0}\,V(z).$$

Обобщая результат последнего примера, можно записать преобразование от выходного сигнала непосредственно по виду разностного уравнения для произвольной предварительно невозбужденной системы без упреждения. Для таких систем в уравнении (3.13.1) $m\leqslant q$, а $y(k)$ и $v(k)$ равны нулю при $k<0$. Члены, учитывающие граничные условия, исчезают и

$$Y(z)=\frac{b_mz^m+\ldots+b_1z+b_0}{a_qz^q+\ldots+a_1z+a_0}. \qquad (3.13.2)$$

Данное уравнение справедливо при любых T.

Пример 3.13.2. Решить уравнение

$$y(k+2)-3y(k+1)+2y(k)=2v(k+1)-2v(k),$$

если система предварительно невозбуждена и

$$v(k)=\begin{cases} k & \text{при} \quad k\geqslant 0,\\ 0 & \text{при} \quad k<0.\end{cases}$$

Из уравнения (3.13.2) и таблицы 3.11.1 следует

$$Y(z)=\frac{2(z-1)}{z^2-3z+2}\,V(z)=\left[\frac{2}{z-2}\right]\left[\frac{z}{(z-1)^2}\right].$$

На основе примера 3.12.7 имеем

$$y(n)=2[2^n-n-1] \text{ при } n\geqslant 0,$$

что совпадает с ответом примера 1.9.1.

Передаточная функция системы. Из уравнения (3.13.2) следует, что существует непосредственная связь между преобразованиями от входного и выходного сигнала предварительно невозбужденной системы. Передаточная функция системы *) определяется как

$$H(z)=\frac{Y(z)}{V(z)} \tag{3.13.3}$$

и может записываться непосредственно по разностному уравнению, как это сделано в уравнении (3.13.2). В § 2.12 показано, что $H(z)z^k$ является вынужденной реакцией на воздействие $v(kT)=z^k$. Из уравнений (2.12.37) и (2.12.38) следует

$$H(z)=\frac{b_m z^m+\ldots+b_1 z+b_0}{a_q z^q+\ldots+a_1 z+a_0}=\left[\frac{y_P(kT)}{v(kT)}\right]_{v(kT)=z^k}. \tag{3.13.4}$$

Уравнение (3.13.3) позволяет определять выход $y(nT)$ посредством такой же трехэтапной процедуры, которая использовалась для преобразований Фурье и Лапласа. Для дискретных систем, подверженных воздействию единичной дельта-функции,

$$v(kT)=\begin{cases}1 & \text{при} \quad k=0;\\ 0 & \text{при} \quad k\neq 0\end{cases} \qquad V(z)=1$$

и

$$d(nT)=\mathfrak{Z}^{-1}[H(z)], \tag{3.13.5}$$

где $d(nT)$ является реакцией на единичную дельта-функцию. Уравнения (3.13.4) и (3.13.5) позволяют находить импульсную характеристику системы по ее разностному уравнению.

Пример 3.13.3. Определить реакцию на дельта-функцию дискретной системы на рис. 1.9.1, *а*, описываемой разностным уравнением, приведенным в примере 3.13.2,

$$d(n)=\mathfrak{Z}^{-1}\left[\frac{2}{z-2}\right].$$

Данного вида выражение не фигурирует в таблице 3.11.1. Однако на основе теоремы о начальном значении, описываемой уравнением (3.12.14),

$$d(0)=\lim_{z\to\infty}\frac{2}{z-2}=0.$$

Из уравнения (3.12.3) следует, что

$$d(k+1)=\mathfrak{Z}^{-1}\left[\frac{2z}{z-2}\right].$$

Выражение этого вида содержится в таблице 3.11.1; следовательно, $d(k+1)=2^{k+1}$ при $k\geqslant 0$, или $d(k)=2^k$ при $k\geqslant 1$, что совпадает с ответом примера 2.12.6.

---

*) $H(z)$ иногда называют импульсной передаточной функцией, чтобы отличать ее от $H(s)$.

Для непрерывных систем с импульсным элементом на входе, как показано на рис. 3.11.1, преобразование Лапласа от выходного сигнала равно

$$Y(s) = H(s)\,V^*(s), \tag{3.13.6}$$

где $H(s)$ — изображение импульсной характеристики $h(t)$. На основе уравнения (3.12.18)

$$Y(z) = V(z)\,\mathcal{Z}\,[h(t)]. \tag{3.13.7}$$

Из сравнения с уравнением (3.13.3) следует

$$H(z) = \mathcal{Z}\,[h(t)] = \mathcal{Z}\,[h^*(t)]. \tag{3.13.8}$$

Важно отметить, что если уравнение (3.13.6) можно разрешить относительно выхода как непрерывной функции времени, то уравнение (3.13.7) определяет выход только в моменты квантования. Вычисление выходного сигнала в промежутке между моментами квантования описывается в следующем параграфе. Определение $H(z)$ для более сложных структурных схем иллюстрируется на следующих примерах.

Пример 3.13.4. Найти $H(z) = Y(z)/V(z)$ для структурных схем на рис. 3.13.1. Системы предварительно невозбуждены, а импульсные элементы работают синхронно.

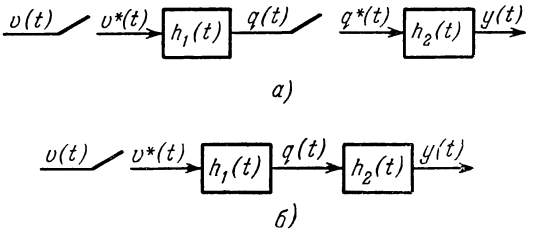


Рис. 3.13.1.

Для рис. 3.13.1, *а* $Q(z) = H_1(z)V(z)$ и $Y(z) = H_2(z)Q(z)$; откуда $H(z) = H_1(z)H_2(z)$. Для рис. 3.13.1, *б* $H(z)$ является z-преобразованием, соответствующим $H_1(s)H_2(s)$. Это можно записать как

$$H(z) = \mathcal{Z}\,[h(t)],$$

где $h(t) = \mathscr{L}^{-1}[H_1(s)H_2(s)]$, или, согласно уравнению (3.12.16),

$$H(z) = \sum \left[\text{вычетов } \frac{H_1(s)\,H_2(s)}{1 - e^{sT}z^{-1}} \text{ в полюсах } H_1(s)\,H_2(s)\right].$$

Часто используется обозначение

$$H(z) = H_1H_2(z),$$

но читатель должен помнить, что $H_1H_2(z) \neq H_1(z)H_2(z)$.

Пример 3.13.5. Используя данные предыдущего примера, найти $y(t)$ при $t = nT$, если $h_1(t) = h_2(t) = te^{-t}$ при $t \geqslant 0$, $T = 1$ и $v(t) = e^{-t}U_{-1}(t)$.

Для структурной схемы на рис. 3.13.1, *а*

$$H_1(z) = H_2(z) = \mathcal{Z}[te^{-t}] = \frac{ze}{(ze-1)^2},$$

$$V(z) = \frac{ze}{ze-1}, \qquad Y(z) = \frac{(ze)^3}{(ze-1)^5}.$$

На основе уравнений (3.12.7) и (3.12.24) имеем

$$y(n) = e^{-n}\left[\text{вычету } \frac{z^{n+2}}{(z-1)^5} \text{ в } z=1\right] = e^{-n}\left[\frac{1}{4!}\frac{d^4}{dz^4} z^{n+2}\right]_{z=1} =$$

$$= \frac{1}{24}(n+2)(n+1)(n)(n-1)e^{-n} \quad \text{при} \quad n \geqslant 0,$$

что совпадает с ответом примера 1.9.4 для моментов квантования.

Для структурной схемы на рис. 3.13.1, *б*

$$h(t) = t^3e^{-t}/6,$$

как следует из примера 1.6.2, так что

$$H(z) = \mathcal{Z}\left[\frac{t^3e^{-t}}{6}\right] = \frac{(ze)(ze^2+4ze+1)}{6(ze-1)^4}.$$

Тогда

$$Y(z) = \frac{(ze)^2(z^2e^2+4ze+1)}{6(ze-1)^5}$$

и

$$y_n = \frac{e^{-n}}{6}\left[\frac{1}{4!}\frac{d^4}{dz^4}\left(z^{n+3}+4z^{n+2}+z^{n+1}\right)\right]_{z=1} = \frac{n^2(n+1)^2}{24}e^{-n} \quad \text{при} \quad n \geqslant 0,$$

что совпадает с ответом примера 1.9.3.

Пример 3.13.6. На рис. 3.13.2 показана обычная импульсная система, причем изображения величин даны в форме преобразования Лапласа. Найти выражение для $Y(z)$

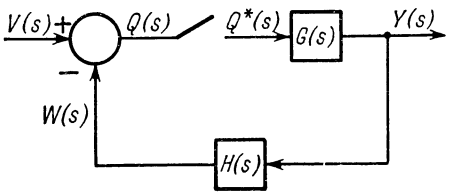


Рис. 3.13.2.

$$Q(s) = V(s) - G(s)H(s)Q^*(s).$$

Используя уравнение (3.12.18), получим

$$Q(z) = V(z) - GH(z)Q(z),$$

$$Y(z) = G(z)Q(z) = \frac{G(z)V(z)}{1+GH(z)},$$

где символ $GH(z)$ объясняется в примере 3.13.4.

Суммы свертывания. Записанное ниже уравнение (3.12.12) устанавливает мост между временными методами и методами преобразования. Если $F(z) = F_1(z)F_2(z)$, то

$$f(nT) = \sum_{k=0}^{n} f_1(nT-kT)f_2(kT). \tag{3.13.9}$$

Доказательство этой теоремы свертывания следует из определения z-преобразования

$$F_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_1(nT) z^{-n}, \qquad F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_2(nT) z^{-n}.$$

Произведение этих двух рядов равно

$$F_1(z) F_2(z) = [f_1(0) f_2(0)] + z^{-1} [f_1(0) f_2(T) + f_1(T) f_2(0)] + \ldots$$
$$\ldots + z^{-n} \left[\sum_{k=0}^{n} f_1(nT - kT) f_2(kT) \right] + \ldots,$$

что и доказывает выражение (3.13.9).

Для предварительно невозбужденной системы без упреждения это уравнение можно использовать совместно с уравнениями (3.13.3)—(3.13.8). Для дискретных систем при входном $v(kT)$ и выходном $y(kT)$ сигналах и импульсной характеристике $d(kT)$, $Y(z) = V(z)\mathcal{Z}[d(kT)]$. На основе уравнения (3.13.9) имеем

$$y(nT) = \sum_{k=0}^{n} v(kT) d(nT - kT) = \sum_{k=0}^{n} v(nT - kT) d(kT), \qquad (3.13.10)$$

что совпадает с уравнениями (1.9.1) и (1.9.2). Для непрерывной системы с импульсным элементом на рис. 3.11.1 $Y(z) = V(z)\mathcal{Z}[h(t)]$; следовательно, выходной сигнал в моменты квантования равен

$$y(nT) = \sum_{k=0}^{n} v(kT) h(nT - kT) = \sum_{k=0}^{n} v(nT - kT) h(kT), \qquad (3.13.11)$$

что совпадает с уравнениями (1.9.5) и (1.9.6).

Свободное и вынужденное движение. Рассмотрим выходной сигнал

$$y(nT) = \mathcal{Z}^{-1} [V(z) H(z)]. \qquad (3.13.12)$$

Как и в § 3.8, полюсы $V(z)$ и $H(z)$ обусловливают соответственно вынужденное (или частное) и свободное (или вспомогательное) движение (решение). Система является неустойчивой, если свободная составляющая неограниченно возрастает при стремлении t к бесконечности. Из таблицы 3.12.3 следует, что система неустойчива в том и только в том случае, если $H(z)$ имеет полюсы вне единичного круга или кратные полюсы на единичной окружности. Из уравнения (3.14.4) видно, что полюсы $H(z)$ являются корнями характеристического уравнения

$$a_q z^q + \ldots + a_1 z + a_0 = 0.$$

Поэтому приведенные выше выводы относительно устойчивости совпадают с соответствующими выводами из § 2.1.2.

Существует регулярная процедура определения, содержит или не содержит многочлен корни на или вне единичной окружности [20]. С другой стороны, можно использовать билинейное преобразование $z = (1 + w)/(1 - w)$ с целью отображения внутренней области единичного круга в левую часть w-плоскости. Тогда для определения устойчивости можно использовать критерий Рауса. При анализе устойчивости применяются графические методы на z-плоскости, на что указывается в цитированной литературе [21].

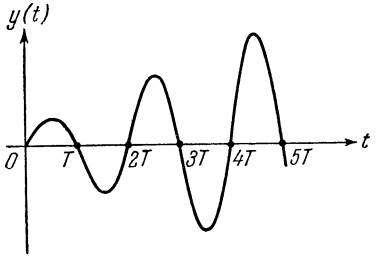


Рис. 3.13.3.

Теоретически возможны нарастающие колебания для свободной составляющей, как это показано на рис. 3.13.3, в то время как в моменты квантования она остается ограниченной. Однако подобная ситуация встречается редко [22].

Нестационарные системы. Анализ нестационарных систем при помощи преобразования Лапласа в § 3.9 имеет свой аналог при использовании z-преобразования. Передаточная функция нестационарной дискретной системы определяется как

$$H(nT, z) = \mathfrak{Z}\,[d_*(nT, kT)], \tag{3.13.13}$$

где преобразование производится по отношению к kT, а $d_*(nT, kT)$ является реакцией в момент времени nT на единичную дельта-функцию, приложенную на kT секунд раньше. Для структурной схемы на рис. 3.11.1 передаточная функция равна

$$H(nT, z) = \mathfrak{Z}\,[h_*(nT, kT)]. \tag{3.13.14}$$

Тогда

$$y(nT) = \mathfrak{Z}^{-1}\,[V(z)\,H(nT, z)]. \tag{3.13.15}$$

Основная трудность при использовании указанной процедуры состоит в нахождении $H(nT, z)$. Однако при известной импульсной характеристике ее можно определить на основе уравнений (3.13.13) или (3.13.14).

§ 3.14. Модифицированное z-преобразование

Использование z-преобразования при анализе схемы на рис. 3.11.3 позволяет определить выход $y(t)$ только в моменты квантования $t = nT$. Несмотря на множество методов, предложенных для нахождения выходной величины в промежутках

времени между моментами квантования, по-видимому, наиболее эффективным является модифицированное z-преобразование.

Вычисление $\mathscr{Z}[f(t)]$ основывается на значениях $f(t)$ в моменты $t = nT$. Для того чтобы z-преобразование содержало ин-

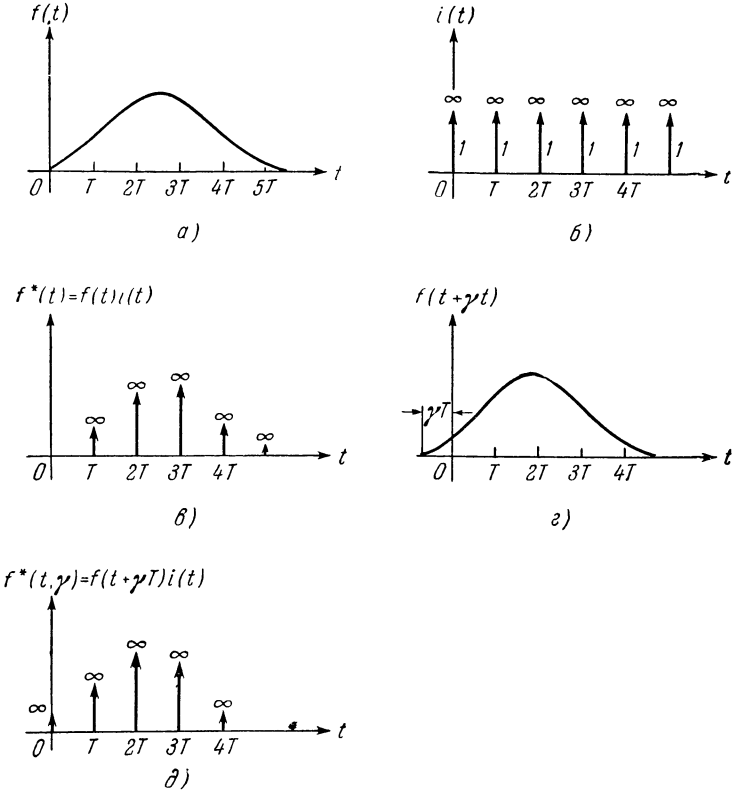


Рис. 3.14.1.

формацию о значениях функции времени в другие моменты, следует квантовать $f(t)$ в $t = (n + \gamma)T$, где γ — действительный независимый параметр, принимающий произвольное значение от нуля до единицы. На рис. 3.14.1, *а*, 3.14.1, *б* изображены произвольная функция и последовательность единичных импульсов $i(t)$. Вспомним, что произведение $f(t)i(t)$ дает

$$f^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\, U_0(t - nT). \qquad (3.14.1)$$

Для квантования $f(t)$ в моменты $t=(n+\gamma)T$ можно сдвинуть график $i(t)$ вперед на γT секунд или, наборот, сместить график $f(t)$ назад на γT секунд, как показано на рис. 3.14.1, *г*. Произведение $f(t+\gamma T)i(t)$ дает

$$f^*(t, \gamma)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT+\gamma T)\, U_0(t-nT). \tag{3.14.2}$$

Преобразование Лапласа и z-преобразование уравнения (3.14.2) равны

$$\mathscr{L}[f^*(t, \gamma)]=\sum_{n=0}^{\infty} f(nT+\gamma T)\, e^{-nTs}, \tag{3.14.3}$$

$$\mathfrak{Z}[f^*(t, \gamma)]=\mathfrak{Z}[f(t+\gamma T)]=\mathfrak{Z}_\gamma[f(t)]=F(z, \gamma)=\sum_{n=0}^{\infty} f(nT+\gamma T)\, z^{-n}. \tag{3.14.4}$$

Введенные в уравнении (3.14.4) различные обозначения характеризуют z-преобразование от $f(t+\gamma T)$, называемое иначе модифицированным z-преобразованием от $f(t)$ *). Отметим, что

$$F(z)=\lim_{\gamma\to 0} F(z, \gamma). \tag{3.14.5}$$

При заданной $f(t)$ модифицированное z-преобразование можно представить в виде бесконечного ряда непосредственно по уравнению (3.14.4). Однако лучше образовать $f(t+\gamma T)$ и найти обычное z-преобразование этой функции, пользуясь стандартными таблицами. Существуют и таблицы модифицированного преобразования, но они сокращают работу лишь в незначительной степени [23].

При заданной $F(s)$ можно найти $F(z, \gamma)$ без предварительного определения $f(t)$. Из доказательства, подобного используемому при выводе выражения (3.12.16), следует

$$F(z, \gamma)=\sum\left[\text{вычетов } \frac{F(s)\, e^{\gamma Ts}}{1-e^{Ts}z^{-1}} \text{ в полюсах } F(s)\right]. \tag{3.14.6}$$

Применяя обычное обратное преобразование от $F(z, \gamma)$ и рассматривая γ как независимый параметр, получим

$$\mathfrak{Z}^{-1}[F(z, \gamma)]=f(nT+\gamma T). \tag{3.14.7}$$

---

*) Многие авторы определяют модифицированное z-преобразование как

$$F(z, m)=z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} f(nT+mT)\, z^{-n}.$$

Это тождественно уравнению (3.14.4), за исключением присутствия множителя z^{-1}. Однако использовать его не совсем удобно. Отметим, что

$$F(z)=\lim_{m\to 0} zF(z, m).$$

Можно предположить, что для структурной схемы на рис. 3.11.1

$$Y(z, \gamma) = V(z) H(z, \gamma), \tag{3.14.8}$$

где

$$H(z, \gamma) = \mathfrak{Z}[h(t+\gamma T)] = \sum_{n=0}^{\infty} h(nT+\gamma T) z^{-n}, \tag{3.14.9}$$

является модифицированным z-преобразованием импульсной характеристики $h(t)$. Для доказательства этого положения рассмотрим произведение

$$\begin{aligned} V(z) H(z, \gamma) &= [v(0) + v(T) z^{-1} + v(2T) z^{-2} + \ldots] \times \\ &\times [h(\gamma T) + h(T+\gamma T) z^{-1} + h(2T+\gamma T) z^{-2} + \ldots] = \\ &= [v(0) h(\gamma T)] + z^{-1}[v(0) h(T+\gamma T) + v(T) h(\gamma T)] + \ldots \\ &\ldots + z^{-n}\left[\sum_{k=0}^{n} v(kT) h(nT+\gamma T-kT)\right] + \ldots \end{aligned}$$

Согласно уравнению (1.9.3) коэффициент при z^{-n} равен $y(nT+\gamma T)$, так что выше приведенный бесконечный ряд отвечает определению $Y(z, \gamma)$, что и доказывает (3.14.8).

Окончательно

$$y(nT+\gamma T) = \mathfrak{Z}^{-1}[V(z) H(z, \gamma)]. \tag{3.14.10}$$

Пример 3.14.1. Решить пример 3.13.5 относительно $y(t, \gamma)$. На рис. 3.13.1 $h_1(t) = h_2(t) = te^{-1}$ при $t \geqslant 0$, $T = 1$ и $v(t) = e^{-t} U_{-1}(t)$.

Для структурной схемы на рис. 3.13.1, *а* имеем

$$Q(z) = V(z) H_1(z),$$

$$Y(z, \gamma) = V(z) H_1(z) H_2(z, \gamma),$$

где

$$V(z) = \frac{ze}{(ze-1)},$$

$$H_1(z) = \frac{ze}{(ze-1)^2},$$

$$H_2(z, \gamma) = \mathfrak{Z}[(t+\gamma) e^{-(t+\gamma)}] = \frac{e^{-\gamma}(ze)}{(ze-1)^2} + \frac{\gamma e^{-\gamma}(ze)}{ze-1}.$$

Согласно уравнениям (3.12.7) и (3.12.24)

$$\begin{aligned} y(n, \gamma) &= \mathfrak{Z}^{-1}\left[\frac{e^{-\gamma}(ze)^3}{(ze-1)^5} + \frac{\gamma e^{-\gamma}(ze)^3}{(ze-1)^4}\right] = \\ &= e^{-n} e^{-\gamma}\left[\frac{1}{4!}\frac{d^4}{dz^4}(z^{n+2}) + \frac{\gamma}{3!}\frac{d^3}{dz^3}(z^{n+2})\right]_{z=1} = \\ &= \frac{1}{24}(n+2)(n+1)(n)(n-1+4\gamma) e^{-(n+\gamma)} \quad \text{при} \quad n \geqslant 0. \end{aligned}$$

В качестве проверки отметим, что при $\gamma=0$ или $\gamma=1$ $y(n+\gamma)$ совпадает соответственно с $y(n)$ или $y(n+1)$ из примера 3.13.5. При $0<t<1$, $n=0$ и $t=\gamma$, а при $1<t<2$, $n=1$ и $t=1+\gamma$, так что

$$y(t)=0 \quad \text{при} \quad 0\leqslant t\leqslant 1,$$
$$y(t)=(t-1)\,e^{-t} \quad \text{при} \quad 1\leqslant t\leqslant 2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

что совпадает с ответом примера 1.9.4.

Для структурной схемы на рис. 3.13.1, *б* имеем

$$Y(z,\gamma)=V(z)\,H_1H_2(z,\gamma),$$

где

$$H_1H_2(z,\gamma)=\mathfrak{Z}\left[\frac{(t+\gamma)^3\,e^{-(t+\gamma)}}{6}\right].$$

Тогда

$$y(n,\gamma)=$$
$$=\frac{e^{-\gamma}}{6}\mathfrak{Z}^{-1}\left[\frac{(ze)^2(z^2e^2+4z+1)}{(ze-1)^5}+\frac{3\gamma(ze)^2(ze+1)}{(ze-1)^4}+\frac{3\gamma^2(ze)^2}{(ze-1)^3}+\frac{\gamma^2(ze)^2}{(ze-1)^2}\right]=$$
$$=e^{-(n+\gamma)}\left[\frac{n^2(n+1)^2}{24}+\frac{\gamma(n+1)(n)(2n+1)}{12}+\frac{3\gamma^2(n+1)\,n}{12}+\frac{\gamma^3}{6}(n+1)\right]$$

и

$$y(t)=t^3\frac{e^{-t}}{6} \quad \text{при} \quad 0\leqslant t\leqslant 1,$$
$$y(t)=[2t^3-3t^2+3t-1]\frac{e^{-t}}{6} \quad \text{при} \quad 1\leqslant t\leqslant 2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

что совпадает с ответом примера 1.9.3.

Пример 3.14.2. Найти выражение для $Y(z,\gamma)$ для структурной схемы на рис. 3.13.2.

Как и в примере 3.13.6,

$$Q(z)=\frac{V(z)}{1+GH(z)}.$$

Тогда

$$Y(z,\gamma)=Q(z)\,G(z,\gamma)=\frac{G(z,\gamma)\,V(z)}{1+GH(z)}.$$

Задачи

3.1. Вывести уравнения (3.2.6) и (3.2.7).

3.2. Аппроксимировать периодический сигнал тригонометрическим рядом, состоящим из n членов. Показать, что аппроксимация из условия минимума среднеквадратичной ошибки содержит первые n членов ряда Фурье.

3.3. Найти ряд Фурье бесконечной последовательности единичных мгновенных импульсов с периодом повторения T (см. рис. 1.8.1, *е*).

3.4. Обобщая результат примера 3.2.1, найти и начертить полное напряжение для рис. 3.2.2, *а*. Считается, что цепь не содержит начальной запасенной энергии. Сравнить ответ с примером 2.12.3.

3.5. Найти преобразование Фурье $f(t)=(\cos t)\,U_{-1}(t+L/2)\cdot U_{-1}(-t+L/2)$. Начертить частотный спектр при $L=2\pi$, $L=4\pi$ и $L\to\infty$.

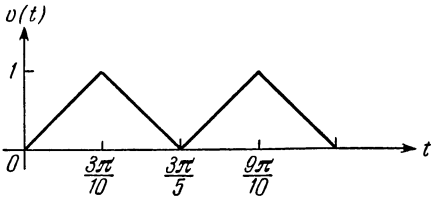
3.6. Найти и начертить ряд Фурье, описывающий установившееся состояние выходной величины, для линейной системы с постоянными параметрами и передаточной функцией $H(s)=s/(s^2+0{,}2s+100)$ при периодическом входном сигнале, показанном на рис. к задаче 3.5.

3.7. Доказать «энергетическую» теорему Фурье

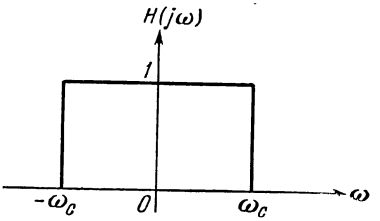
$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |G(\omega)|^2\,d\omega.$$

3.8. Показать, что если $f_2(t) = (d/dt)f_1(t)$, то $G_2(\omega) = j\omega G_1(\omega)$.

3.9. Исследуя импульсную характеристику $h(t)$ идеального низкочастотного фильтра, изображенного на рисунке, показать, что он нереализуем.



К задаче 3.5.



К задаче 3.9.

3.10. Проверить таблицу 3.3.1.

3.11. Доказать свойства, приведенные в таблице 3.4.1.

3.12. Найти $\mathscr{L}[\cos\beta t]$, используя уравнение (3.4.5) при $n=2$. На основе этого результата найти $\mathscr{L}[\sin\beta t]$ согласно уравнению (3.4.6). Затем на основе уравнений (3.4.8) и (3.4.9) найти $\mathscr{L}\left[te^{-t}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right]$.

3.13. Найти обратное преобразование от следующих функций при помощи разложения на элементарные дроби и таблиц 3.3.1 и 3.4.1:

$$F_1(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s^2+4)},$$

$$F_2(s) = \frac{s}{(s+1)^2(s^2+4)},$$

$$F_3(s) = \frac{e^{-2s}}{(s+1)^2(s^2+4)},$$

$$F_4(s) = \frac{2s^2+1}{s(s^2+2s+5)}.$$

3.14. Найти по таблицам преобразования Лапласа $\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{j\omega}{j\omega^3+\omega^2+2}\right]$.

3.15. Решить при помощи преобразования Лапласа примеры 2.6.6, 2.6.7 и задачу 2.2.

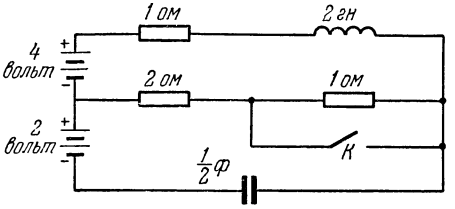
3.16. Система описывается дифференциальным уравнением

$$(p^3+3p^2+4p+2)\,y(t) = (p^2+2p+3)\,v(t).$$

Найти импульсную характеристику $h(t)$ и вычислить $h(0+)$, $\dot{h}(0+)$, $\ddot{h}(0+)$. Найти, если это возможно, указанные начальные условия при помощи теоремы

о начальном значении согласно уравнению (3.4.15). Проверить результаты на основе методов второй главы.

3.17. Цепь на рис. к задаче 3.17 служит иллюстрацией применения преобразования Лапласа, когда в системе содержится начальная запасенная энергия. Первоначально цепь находится в установившемся режиме при разомкнутом ключе K. Найти выражения для токов при $t \geqslant 0$ при условии, что ключ замыкается в момент $t = 0$, закорачивая сопротивления. Представить в виде дополнительных источников энергию, запасенную в емкости и индуктивности при $t = 0$.



К задаче 3.17.

3.18. Записать ряд Лорана относительно особой точки $s = -1$ для каждой из следующих функций. Величину t при этом рассматривать как независимый параметр.

$$(a)\ \frac{e^{st}}{s+1}, \quad (b)\ \frac{se^{st}}{(s+1)^2}.$$

Найти вычет в $s=1$ непосредственно из ряда, а также согласно уравнениям (3.6.17)—(3.6.20).

3.19. При $F(s) = \dfrac{b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0}$ показать, что

$$\frac{1}{2\pi j}\oint \frac{F'(s)}{F(s)}\,ds = Z - P,$$

где контур C включает правую часть плоскости s, а Z и P означают соответственно число нулей и полюсов $F(s)$, лежащих в правой полуплоскости. Кратные нули и полюсы необходимо подсчитывать с учетом их кратности. Этот результат приводит к критерию устойчивости Найквиста.

3.20. Для изображения одностороннего преобразования $F(s) = s/[(s+2)\times\times(s-1)]$ найти $f(t)$ при помощи интеграла обратного преобразования. Повторить то же самое для двухстороннего преобразования

$$F(s) = s/[(s+2)(s-1)],$$

если область сходимости задана в виде $-2<\sigma<1$.

3.21. Решить задачу 3.13 при помощи вычетов.

3.22. Показать, что если $F(s)$ представляет отношение двух многочленов (причем степень многочлена в знаменателе выше, чем в числителе), то методы, основанные на вычетах и разложении на элементарные дроби, в сущности, идентичны.

3.23. Показать, что $\int (1/s^2)\, e^{st}\, ds$ равен нулю при $t>0$ и контуре интегрирования $DEFGA$ (см. рис. 3.7.1), а при $t<0$ он равен нулю при интегрировании по контуру DHA. Обобщить доказательство с целью проверки теоремы 3.7.1.

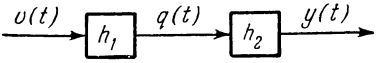
3.24. Использовать преобразование Лапласа для нахождения выходного сигнала в схеме на рис. 3.2.2, *а*. Так как $E_0(s)$ содержит бесконечное число полюсов, предлагается следующая процедура, основанная на работе [5]. Вначале найти переходную реакцию, вычисляя надлежащий вычет. Далее найти полную реакцию для *первого* периода, пренебрегая источником напряжения при $t>2$. Установившаяся реакция для первого периода находится путем вычитания из нее переходной реакции. Поскольку установившийся режим является

периодическим, то это справедливо для всех периодов. Сравнить результат с решениями в примере 2.12.3 и задаче 3.4.

3.25. Две нестационарные системы характеризуются соответственно передаточными функциями $H_1(t, s)$ и $H_2(t, s)$. Показать, что при последовательном соединении в соответствии с рис. к задаче 3.25 передаточная функция всей системы

$$H(t, s) \neq H_1(t, s) H_2(t, s).$$

Выразить H через H_1 и H_2.



К задаче 3.25.

3.26. Для системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{t+1} y = \frac{dv}{dt},$$

найти $h_*(t, \tau)$ и $H(t, s)$. На основе методов преобразования найти временну́ю характеристику и сравнить ответ с задачей 1.12.

3.27. Найти передаточную функцию системы $H(t, s)$, соответствующую каждому из следующих дифференциальных уравнений

(*a*) $(tp^2+2p)y=v$,

(*b*) $(t^2p^2+4tp+2)y=(p+1)v$.

Найти реакцию каждой системы на $v=e^{-t}U_{-1}(t)$.

3.28. Проверить таблицу 3.11.1 при помощи уравнений (3.11.6), а также (3.12.16).

3.29. При помощи уравнения (3.11.6), а также таблицы 3.11.1 найти двустороннее z-преобразование следующих функций. Указать области сходимости.

(*a*) $f_1(t)=e^{-|t|}$ при всех t,

(*b*) $f_2(t)=e^t$ при $t<0$ и $t+1$ при $t>0$.

3.30. Доказать те из свойств в таблице 3.12.1, которые не выведены в этой главе.

3.31. Доказать первую часть уравнения (3.12.17), представив перед преобразованием отношения $f^*(t)=f(t)i(t)$ величину $i(t)$ в виде комплексного ряда Фурье. Полезно использовать задачу 3.3 и уравнение (3.4.8).

3.32. Найти $f(nT)$, если $\mathscr{Z}_{II}[f(t)]=z/[(z+2)(4z^2+1)]$, и известно, что $f(t)$ — ограниченная функция. Вычислить значения $f(nT)$ при $-2 \leqslant n \leqslant 4$ при помощи интеграла обратного преобразования и модифицированного метода разложения на элементарные дроби с учетом уравнения (3.11.10).

3.33. Используя уравнения (3.12.21), (3.12.24), найти $f(nT)$ для следующих односторонних z-преобразований:

(*a*) $F_1(z) = \dfrac{z}{(z+2)(4z^2+1)}$,

(*b*) $F_2(z) = \dfrac{2z^3-2z^2+z}{(z-1)(z^2-z+1)}$.

3.34. Решить примеры 2.14 и 2.15 при помощи z-преобразования, снова исследуя устойчивость систем.

3.35. На рис. 3.13.2 $G(s)=1/(s+1)$, $H(s)=1$; идеальный импульсный ключ имеет период T, удовлетворяющий $e^{-T}=1/2$.

(*a*) При помощи z-преобразования найти временну́ю характеристику $r(nT)$.

(*b*) При помощи модифицированного z-преобразования найти временну́ю характеристику $r[(n+\gamma)T]$.

(*c*) Определить разностное уравнение, связывающее $v(t)$ и $y(t)$ в моменты квантования.

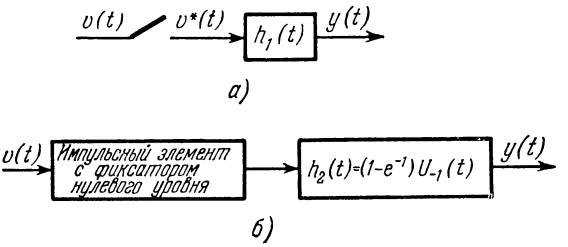
3.36. На рис. 3.13.2 $G(s)=[K(s+1{,}04)]/[s(s+0{,}692)]$, $H(s)=1$ и период импульсного элемента $T=1$.

(*а*) При помощи построения корневого годографа определить значения действительной постоянной величины K, при которой система устойчива.

(*б*) Пусть $v(t)=0$; предположим, однако, что какое-то возмущение вызывает сигнал $q(0)=q(1)=1$. При $K=1$ найти $y(nT)$.

3.37. На рис. 3.13.2 справа от $H(s)$ включен дополнительно импульсный элемент, работающий синхронно с исходным. Найти выражения для $Y(z)$ и $Y(z, \gamma)$.

3.38. Импульсный элемент с фиксатором нулевого порядка описывается соотношением вход — выход $y(nT+\gamma T)=v(nT)$ при целых значениях n и при $0\leqslant\gamma<1$. Квантование происходит каждые T секунд, а в промежутке между моментами квантования поддерживается последнее из квантованных значений, как это показано на рис. 1.8.1, *б*.



К задаче 3.38.

(*а*) Для составляющих, представленных на структурной схеме, показанной на рисунке *а*, найти $h_1(t)$ и $H_1(s)$ для элемента, расположенного за идеальным импульсным элементом.

(*б*) Найти $H(z, \gamma)$ для системы на рисунке *б*.

3.39. При помощи z-преобразования решить задачи 1.15—1.17.

3.40. Доказать уравнение (3.14.6).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. G. A. Campbell and R. M. Foster, Fourier Integrals for Practical Applications, D. Van Nostrant Company, Princeton, New Jersey, 1948.
2. A. Erdélyi (editor), Tables of Integral Transforms, Vol. I, McGraw-Hill Book Company, New York, 1954.
3. R. V. Churchill, Operational Mathematics, Second Edition, McGraw-Hill Book Company, New York, 1958, Chapters 1 and 6.
4. M. F. Gardner and J. L. Barnes, Transients in Linear Systems, John Wiley and Sons, New York, 1942, Chapter V, VI and VIII.
5. S. Seshu and N. Balabanian, Linear Network Analysis, John Wiley and Sons, New York, 1959, Section 5.5.
6. Cardner and Barnes, op. cit., стр. 346, Eq. 2.1362.
7. R. V. Churchill, Complex Variables and Applications, Second Edition, McGraw-Hill Book Company, New York, 1960.
8. B. van der Pol and H. Bremmer, Operational Calculus Based on the Two-Sided Laplace Integral, Second Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1955, Section VI. 11.
9. W. R. Le Page, Complex Variables and the Laplace Transform for Engineers, McGraw-Hill Book Company, New York, 1961, Chapter 10.

10. S. Goldman, Transform Method in Linear System Analysis, Englewood Clifs, N. J., 1949, Section 11.8.
11. J. A. Aseltine, Transform Method in Linear System Analysis, McGraw-Hill Book Company, New York, 1958, Chapter 7.
12. L. A. Zadeh, Frequency Analysis of Variable Networks, Proc. IRE, Vol. 38, No. 3, March 1950, стр. 291—299.
13. D. Graham, E. J. Brunelle, Jr., W. Johnson and H. Passmore, III, Engineering Analysis Methods for Linear Time Varying Systems, Report ASD-TDR-62-362, Ohio, January, 1963.
14. L. A. Zadeh, A. General Theory of Linear Signal Transmission Systems, J. Franklin Inst., Vol. 253, April 1952, стр. 293—312.
15. L. A. Zadeh, Time-Varying Networks I, IRE Intern. Conv. Record, Vol. 9, Pt. 4, March 1961, стр. 251—267.
16. Gardner and Barnes, op. cit., Chapter IX.
17. C. E. Shannon, Communication in the Presence of Noise, Proc. IRE, Vol. 37, No. 1, January 1949, стр. 10—21.
18. J. G. Truxal, Automatic Feedback Control System Synthesis, McGraw-Hill Book Company, New York, 1955, Section 9.2.
19. W. Kaplan, Advanced Calculs, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass., 1952, стр. 569.
20. M. Marden, The Geometry of the Zeros of a Polynomial in a Complex Variable, American Mathematical Society Mathematical Survey, No. III, New York, 1949, стр. 152.
21. Truxal, op. cit., Section 9.6.
22. J. R. Ragazzini and G. F. Franklin, Sampled-Data Control Systems, McGraw-Hill Book Company, New York, 1958, стр. 93.
23 E. L. Jury, Theory and Application of the z-Transform Method, John Wiley and Sons, New York, 1964, стр. 289—296.

ГЛАВА 4

МАТРИЦЫ И ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 4.1. Введение

Целью настоящей главы является дополнительное знакомство с математическим аппаратом, необходимым для последующих глав. Вообще говоря, приводимые аналитические методы укладываются в рамки линейной алгебры. Точнее, предметом рассмотрения являются матрицы, определители, линейные векторные пространства, линейные преобразования, функции от матриц, а также задачи на собственные значения.

К указанным аналитическим методам при изучении систем приходится прибегать главным образом по той причине, что полное описание сложной системы требует большого количества информации. Эту информацию (которая может состоять из систем дифференциальных или разностных уравнений) удобно представлять при помощи матриц. Тогда анализ систем сводится большей частью к анализу свойств матриц. Применение быстродействующих вычислительных машин сделало этот подход действенным.

Вопросы, заключенные в данную главу, ни в коей мере не исчерпывают обширный круг задач линейной алгебры. Более того, выбраны лишь вопросы, непосредственно относящиеся к изучению системы управления. В частности, особое значение имеют разделы, посвященные векторным пространствам и линейным преобразованиям. Так как надлежащий выбор системы координат позволяет проще выявить свойства системы, то в связи с этим представляет интерес нахождение линейного преобразования, приводящего к желаемой системе координат.

Проблема собственных значений является основой матричного анализа линейных систем. При использовании матриц для описания структуры системы их собственные значения (характеристические числа) характеризуют собственные частоты рассматриваемой системы. По-видимому, проблема собственных значений и вопросы о функциях от матриц — наиболее важные разделы настоящей главы.

§ 4.2. Основные понятия

Система линейных уравнений

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= y_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= y_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= y_m \end{aligned}$$

образует некоторое множество связей между переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_m$. Эти связи, или линейное преобразование переменных x в переменные y, полностью характеризуется упорядоченным набором коэффициентов a_{ij}. Если указанное множество коэффициентов обозначить через **A** и записать в виде

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \tag{4.2.1}$$

то, как будет показано, посредством введения определения «произведение **Ax**» систему линейных уравнений можно записать как $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$. Несомненно, приведенное выражение по виду значительно проще, чем соответствующая система линейных уравнений. Это одна из основных причин использования матриц. Матричное уравнение или система матричных уравнений содержат в компактной форме большой объем информации. Если не прибегать к указанному компактному обозначению, то анализ системы линейных уравнений оказывается достаточно громоздким.

Рассмотрим теперь прямоугольную таблицу, составленную из упорядоченных элементов выражения (4.2.1). Элементами таблицы могут быть действительные или комплексные числа или функции от заданных переменных. *Матрицей* называется прямоугольная таблица указанного вида, которая, в отличие от обычной прямоугольной таблицы, подчиняется определенным правилам сложения, вычитания, умножения и равенства. Элементы матрицы $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{ij}$ записываются при помощи двойного индекса. Первый индекс указывает строку таблицы, на которой расположен элемент, а второй — ее столбец. Матрицы обозначаются здесь жирными буквами **A**, **B**, **a**, **b** и т. д. или посредством написания общего элемента $[a_{ij}]$, заключенного в квадратные скобки. Столбцы матрицы называются векторами столбцами, а строки матрицы — векторами-строками. Матрица, содержащая m строк и n столбцов, называется $(m \times n)$-матрицей,

или, как говорят, матрицей *порядка* m на n. Квадратная матрица ($m = n$) является матрицей n-го порядка.

Основные типы матриц. (а) *Матрица-столбец.* Матрица ($m \times 1$) называется матрицей-столбцом или вектором-столбцом, так как она состоит из одного столбца и m строк. Здесь она обозначается строчной жирной буквой, например,

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_m \end{bmatrix}.$$

(б) *Матрица-строка.* Матрица ($1 \times n$), содержащая одну строку элементов, называется матрицей-строкой или вектором-строкой.

(в) *Диагональная матрица.* Главная диагональ квадратной матрицы состоит из элементов a_{ii}. Диагональной матрицей называется квадратная матрица, элементы которой, не лежащие на главной диагонали, равны нулю:

$$\text{Диагональная матрица} = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \text{все элементы нули} \\ & a_{22} & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ \text{все элементы нули} & & & \cdot \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

(г) *Единичная матрица.* Единичной матрицей называется диагональная матрица, диагональные элементы которой равны единице. Здесь единичная матрица обозначается символом $\mathbf{I}$:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

(д) *Нулевая матрица.* Матрица, все элементы которой тождественно равны нулю, называется нулевой матрицей.

(е) *Транспонированная матрица.* Транспонирование матрицы $\mathbf{A}$ — операция, при которой ее строки и столбцы меняются местами. Транспонированная матрица обозначается $\mathbf{A}^T$. Следовательно, если $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, то $\mathbf{A}^T = [a_{ji}]$, т. е. элемент i-й строки и

j-го столбца матрицы $\mathbf{A}$ равен элементу j-й строки i-го столбца $\mathbf{A}^T$. Если $\mathbf{A}$ — матрица $(m\times n)$, то $\mathbf{A}^T$ — матрица $(n\times m)$.

Специальные типы матриц. (а) *Симметрическая матрица.* Квадратная матрица с действительными элементами называется симметрической, если она равна своей транспонированной, т. е. если

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T \quad \text{или} \quad a_{ij} = a_{ji} \quad (i, j = 1, \ldots, n).$$

(б) *Кососимметрическая матрица.* Действительная квадратная матрица называется кососимметрической, если

$$\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T \quad \text{или} \quad a_{ij} = -a_{ji} \quad (i, j = 1, \ldots, n).$$

Отсюда, конечно, следует равенство нулю элементов, лежащих на главной диагонали.

(в) *Комплексно сопряженная матрица.* Если элементы матрицы $\mathbf{A}$ комплексные $(a_{ij}=\alpha_{ij}+j\beta_{ij})$, то комплексно сопряженная матрица B содержит элементы $b_{ij} = \alpha_{ij} - j\beta_{ij}$. Это записывается в форме $\mathbf{B}=\mathbf{A}^*$.

(г) *Сопряженная матрица.* Матрица, сопряженная по отношению к $\mathbf{A}$, является транспонированой и комплексно сопряженной по отношению к $\mathbf{A}$, т. е. равна $(\mathbf{A}^*)^T$.

(д) *Действительная матрица.* Если $\mathbf{A}=\mathbf{A}^*$, то матрица является действительной.

(е) *Мнимая матрица.* Если $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^*$, то матрица $\mathbf{A}$ мнимая.

(ж) *Эрмитова матрица.* Если матрица равна своей сопряженной, то она называется эрмитовой, т. е. если $\mathbf{A}=(\mathbf{A}^*)^T$, то $\mathbf{A}$ — эрмитова матрица.

(з) *Косоэрмитова матрица.* Если $\mathbf{A}=-(\mathbf{A}^*)^T$, то $\mathbf{A}$ — косоэрмитова матрица.

Простейшие операции. *Сложение матриц.* Если матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ одного порядка $(m\times n)$, где m и n — два заданные (не обязательно различные) целые числа, то суммой этих двух матриц служит матрица $\mathbf{C}=\mathbf{A}+\mathbf{B}$, элемент которой определяется как

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}. \tag{4.2.2}$$

Пример 4.2.1. Вычислить сумму указанных матриц.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Сложение матриц коммутативно и ассоциативно, т. е.

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \qquad \text{(коммутативность)},$$

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} \qquad \text{(ассоциативность)}.$$

Вычитание матриц. Разность матриц одного порядка, скажем $(m\times n)$, где m и n — два заданные не обязательно различные

целые числа, равна матрице $\mathbf{D}=\mathbf{A}-\mathbf{B}$, элемент которой определяется как

$$d_{ij}=a_{ij}-b_{ij}. \tag{4.2.3}$$

Пример 4.2.2. Вычислить разность указанных матриц.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}.$$

Равенство матриц. Две матрицы **A** и **B** одинакового порядка равны, если равны их соответствующие элементы. Таким образом,

$$\mathbf{A}=\mathbf{B} \tag{4.2.4}$$

только и если только $a_{ij}=b_{ij}$.

Умножение матриц. Определение произведения двух матриц **A** и **B** непосредственно следует из аппарата линейных преобразований. Рассмотрим линейное преобразование

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2. \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

Элементы y_1 и y_2 можно рассматривать как составляющие вектора **y**. Подобным образом x_1 и x_2 могут рассматриваться как составляющие вектора **x**. Тогда уравнение (4.2.5) может трактоваться как преобразование матрицей **A** вектора **x** в вектор **y**. Это преобразование можно записать в виде

$$\mathbf{y}=\mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{4.2.6}$$

где

$$\mathbf{y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Уравнение (4.2.6) можно было бы записать также в виде

$$y_i=\sum_{j=1}^{2} a_{ij}x_j, \qquad i=1,\ 2. \tag{4.2.7}$$

Это приводит к определению умножения матрицы $(m\times n)$ на матрицу $(n\times 1)$ (вектор-столбец):

$$\mathbf{A}\mathbf{x}=\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right]. \tag{4.2.8}$$

Данное произведение считается *правым произведением* **A** на **x** или *левым произведением* **x** на **A**. Приведенное отличие очень важно, так как в общем случае операция умножения некоммутативна, т. е. $\mathbf{AB}\neq\mathbf{BA}$.

Предположим теперь, что вектор **x** образуется посредством линейного преобразования

$$\begin{aligned} x_1 &= b_{11}z_1 + b_{12}z_2, \\ x_2 &= b_{21}z_1 + b_{22}z_2, \end{aligned} \tag{4.2.9}$$

или

$$x_j = \sum_{k=1}^{2} b_{jk}z_k, \quad j = 1,\ 2.$$

Связь между векторами **y** и **z** получается подстановкой уравнения (4.2.9) в (4.2.7). В результате подстановки имеем

$$y_i = \sum_{j=1}^{2} a_{ij} \sum_{k=1}^{2} b_{jk}z_k, \quad i = 1,\ 2. \tag{4.2.10}$$

Так как порядок суммирования можно изменить, то

$$y_i = \sum_{k=1}^{2} \left(\sum_{j=1}^{2} a_{ij}b_{jk} \right) z_k, \quad i = 1,\ 2. \tag{4.2.11}$$

Преобразование вектора-столбца **z** в вектор-столбец **y** можно записать в матричном виде

$$\mathbf{y} = \mathbf{AB}\mathbf{z}. \tag{4.2.12}$$

Произведение **AB** может рассматриваться как матрица **C**, где

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB}, \tag{4.2.13}$$

или

$$[c_{ik}] = \left[\sum_{j=1}^{2} a_{ij}b_{jk} \right].$$

Элемент c_{ik} матрицы **C** равен сумме, записанной внутри скобок. Первый индекс величины в скобках указывает строку матрицы произведения, а последний — ее столбец. Для определения произведения число столбцов **A** должно равняться числу строк **B**. Обобщая, произведение **C** двух матриц $\mathbf{A}(m \times n)$ и $\mathbf{B}(n \times p)$ в общем случае определяется в виде (записывается относительно произвольного элемента)

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \right]. \tag{4.2.14}$$

Таким образом, i, j-й элемент **C** равен сумме произведений элементов i-й *строки* **A** на соответствующие элементы j-го *столбца* **B**. Размерность результирующей матрицы **C** равна $(m \times p)$.

Если число столбцов **A** равно числу строк **B**, то говорят, что эти две матрицы *согласуются по форме* и произведение **AB**

существует. Для матриц $\mathbf{A}(m\times n)$ и $\mathbf{B}(n\times m)$ существует как произведение $\mathbf{AB}$, так и произведение $\mathbf{BA}$. Произведение $\mathbf{AB}$ имеет размерность $(m\times m)$, а произведение $\mathbf{BA}$ — размерность $(n\times n)$. Естественно, что они, вообще говоря, не равны. Даже в случае $m=n$, а значит, при одинаковой размерности $(m\times m)$ произведений $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{BA}$, эти произведения не обязательно равны. Однако если они равны, т. е. $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$, то говорят, что эти матрицы *коммутативны.*

Пример 4.2.3. Вычислить произведение указанных матриц:

(*a*)

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 6\end{bmatrix};$$

(*b*)

$$\mathbf{BA}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 3\\ 2 & 2\end{bmatrix}\neq\mathbf{AB};$$

(*c*)

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Отметим, что $\mathbf{AB}=[0]$ не обязательно означает, что $\mathbf{A}=0$ или $\mathbf{B}=[0]$.

Из приведенного выше можно увидеть, что операция умножения матриц ассоциативна, дистрибутивна, но в общем некоммутативна.

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC})=(\mathbf{AB})\mathbf{C} \qquad \text{ассоциативность,}$$

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})&=\mathbf{AB}+\mathbf{AC}\\ (\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C}&=\mathbf{AC}+\mathbf{BC}\end{aligned}\right\}\ \text{дистрибутивность.} \tag{4.2.15}$$

Умножение на скалярную величину. При левом или правом умножении матрицы на скалярный множитель k каждый элемент матрицы умножается на величину k. Произвольный элемент произведения $k\mathbf{A}$ равен ka_{ij}.

Пример 4.2.4. Выполнить указанное умножение матрицы на скаляр 2.

$$2\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -2\\ 4 & 6\end{bmatrix}.$$

Умножение транспонированных матриц. Произведение двух транспонированных матриц $\mathbf{B}^T$ и $\mathbf{A}^T$ равно транспонированному произведению исходных матриц $\mathbf{B}$ и $\mathbf{A}$, взятых в обратном порядке, т. е.

$$\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T=(\mathbf{AB})^T. \tag{4.2.16}$$

Это легко показать, транспонируя матрицу $\mathbf{C}=\mathbf{AB}$. Общий элемент произведения $\mathbf{AB}$ задается в виде

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj} \qquad \begin{cases} i=1,\ \ldots,\ m,\\ j=1,\ \ldots,\ p.\end{cases}$$

Предполагается, что размерность $\mathbf{A}$ — $(m\times n)$, а $\mathbf{B}$ — $(n\times p)$. Произвольный элемент $\mathbf{C}^T$ равен

$$c_{ij}^T = c_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}^T a_{kj}^T.$$

Следовательно, $\mathbf{C}^T = (\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$. Транспонирование $\mathbf{AB}$ равно произведению транспонированных матриц, взятых в обратном порядке.

Умножение на диагональную матрицу. Умножение справа матрицы $\mathbf{A}$ на диагональную матрицу $\mathbf{D}$ эквивалентно операции со *столбами* $\mathbf{A}$. При *умножении слева* матрицы $\mathbf{A}$ на диагональную матрицу $\mathbf{D}$ операции производятся со строками $\mathbf{A}$. Очевидно, что умножение слева или справа на единичную матрицу $\mathbf{I}$ не изменяет исходную матрицу, т. е.

$$\mathbf{IA} = \mathbf{AI} = \mathbf{A}.$$

Пример 4.2.5. Вычислить произведение данных матриц.

Умножение справа:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}d_{11} & a_{12}d_{22} \\ a_{21}d_{11} & a_{22}d_{22} \end{bmatrix}.$$

Умножение слева:

$$\begin{bmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}d_{11} & a_{12}d_{11} \\ a_{21}d_{22} & a_{22}d_{22} \end{bmatrix}.$$

Произведение блочных матриц. Иногда удобно сконструировать матрицу из элементов, являющихся матрицами, или свести заданную матрицу к другой с элементами, являющимися подматрицами исходной матрицы. Например, проводя вертикальную и горизонтальную пунктирные линии на матрице $\mathbf{A}$ размерности (3×3), можно записать матрицу (2×2) относительно подматриц $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$ и $\mathbf{A}_4$:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hdashline a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_4 \end{bmatrix},$$

где

$$\mathbf{A}_1 = [a_{11}], \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_3 = [a_{12} \quad a_{13}], \quad \mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Предположим, что подобным образом разделена и матрица **B** размерности (3×3), а именно:

$$\mathbf{B}=\left[\begin{array}{c:cc} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ \hdashline b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{array}\right]=\begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_3 \\ \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_4 \end{bmatrix}.$$

Ясно, что сумму матриц **A** и **B** можно выразить при помощи подматриц как

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1+\mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_3+\mathbf{B}_3 \\ \mathbf{A}_2+\mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_4+\mathbf{B}_4 \end{bmatrix}.$$

Произведение **A** и **B** также выражается посредством подматриц

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix} (\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1+\mathbf{A}_3\mathbf{B}_2) & (\mathbf{A}_1\mathbf{B}_3+\mathbf{A}_3\mathbf{B}_4) \\ (\mathbf{A}_2\mathbf{B}_1+\mathbf{A}_4\mathbf{B}_2) & (\mathbf{A}_2\mathbf{B}_3+\mathbf{A}_4\mathbf{B}_4) \end{bmatrix}.$$

Вообще произведение двух матриц выражается посредством подматриц только в том случае, если подматрицы, образованные в результате деления, согласуются по форме. Число выделенных в **A** столбцов должно равняться числу выделенных в **B** строк. При выполнении этого условия (предполагается, что исходные матрицы **A** и **B** согласуются по форме) с образованными в результате деления подматрицами можно оперировать как с обычными элементами.

Пример 4.2.6. Разбив указанные матрицы на блоки, вычислить их произведение.

$$\mathbf{AB}=\left[\begin{array}{cc:c} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ \hdashline 0 & 1 & -1 \end{array}\right]=$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}[0 \quad 1 \quad -1]=$$

$$=\begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & 7 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Дифференцирование матриц. Обычные идеи дифференцирования и интегрирования скалярных переменных переносятся на операции дифференцирования и интегрирования матриц и их произведений при условии сохранения первоначального порядка следования сомножителей.

Пусть $\mathbf{A}(t)$ — матрица $(m\times n)$, элементы которой $a_{ij}(t)$ являются дифференцируемыми функциями скалярной переменной

t. Производная от $\mathbf{A}(t)$ по переменной t определяется как

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{A}(t)] = \dot{\mathbf{A}}(t) = \begin{bmatrix} \frac{da_{11}(t)}{dt} & \frac{da_{12}(t)}{dt} & \cdots & \frac{d_{1n}(t)}{dt} \\ \frac{da_{21}(t)}{dt} & \frac{da_{22}(t)}{dt} & \cdots & \frac{d_{2n}(t)}{dt} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d_{m1}(t)}{dt} & \frac{d_{m2}(t)}{dt} & \cdots & \frac{da_{mn}(t)}{dt} \end{bmatrix}. \quad (4.2.17)$$

Из приведенного определения ясно, что производная от суммы двух матриц равна сумме производных от этих матриц, или

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{A}(t) + \mathbf{B}(t)] = \dot{\mathbf{A}}(t) + \dot{\mathbf{B}}(t). \quad (4.2.18)$$

Производная от произведения матриц образуется таким же образом, как и производная от скалярного произведения, за тем исключением, что должен сохраняться первоначальный порядок следования сомножителей произведения. Таким образом (как типичные примеры),

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{A}(t)\,\mathbf{B}(t)] = \dot{\mathbf{A}}(t)\,\mathbf{B}(t) + \mathbf{A}(t)\,\dot{\mathbf{B}}(t) \quad (4.2.19)$$

и

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{A}^3(t)] = \dot{\mathbf{A}}(t)\,\mathbf{A}^2(t) + \mathbf{A}(t)\,\dot{\mathbf{A}}(t)\,\mathbf{A}(t) + \mathbf{A}^2(t)\,\dot{\mathbf{A}}(t). \quad (4.2.20)$$

Интегрирование матриц. Подобно определению производной от матрицы интеграл от матрицы определяется как матрица, образованная из интегралов от элементов исходной матрицы. Следовательно,

$$\int \mathbf{A}(t)\,dt = \begin{bmatrix} \int a_{11}(t)\,dt & \int a_{12}(t)\,dt & \ldots & \int a_{1n}(t)\,dt \\ \int a_{21}(t)\,dt & \int a_{22}(t)\,dt & \ldots & \int a_{2n}(t)\,dt \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \int a_{m1}(t)\,dt & \int a_{m2}(t)\,dt & \ldots & \int a_{mn}(t)\,dt \end{bmatrix}. \quad (4.2.21)$$

Для обозначения интеграла от матрицы обычно используется символ $\mathbf{Q} = \int (\ )\,dt$. Если оператор $\mathbf{Q}$ снабжен индексами (сверху t, а снизу t_0), то они указывают на верхний и нижний пределы интегрирования. Таким образом,

$$\mathbf{Q}_{t_0}^{t}(\ ) = \int_{t_0}^{t} (\ )\,dt. \quad (4.2.22)$$

Пример 4.2.7.

Найти $\mathbf{Q}_0^t(\mathbf{A})$, если $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{bmatrix}$.

$$\mathbf{Q}_0^t(\mathbf{A})=\begin{bmatrix} \int\limits_0^t t\,dt & \int\limits_0^t dt \\ \int\limits_0^t dt & \int\limits_0^t t\,dt \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{t^2}{2} & t \\ t & \frac{t^2}{2} \end{bmatrix}.$$

§ 4.3. Определители

Одним из применений теории определителей служит решение системы линейных алгебраических уравнений. Введение определителя упрощает решение этих уравнений, сводя решение к выполнению ряда правил. Например, систему уравнений

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2&=y_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2&=y_2 \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

можно решить, находя выражение для x_1 из первого уравнения и затем подставляя его во второе уравнение. В результате выполнения этой операции получаем решение

$$x_1=\frac{y_1a_{22}-y_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{y_2a_{11}-y_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

Предполагается, что знаменатель $(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})$ не равен нулю.

Уравнение (4.3.1) можно представить в матричной форме:

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{y}, \tag{4.3.2}$$

где

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},\quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\quad \text{и}\quad \mathbf{y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Определитель матрицы $\mathbf{A}$ записывается как

$$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

и значение определителя считается равным $(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})$. Определитель вводится только для квадратной матрицы и порядок определителя равен числу ее строк или столбцов. Так

приведенный определитель называется *определителем второго порядка*. Если построить определители

$$|\mathbf{A}_1| = \begin{vmatrix} y_1 & a_{12} \\ y_2 & a_{22} \end{vmatrix} = (y_1 a_{22} - y_2 a_{12}),$$

$$|\mathbf{A}_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & y_1 \\ a_{21} & y_2 \end{vmatrix} = (y_2 a_{11} - y_1 a_{21}),$$

то решение уравнения (4.3.1) можно выразить при помощи этих определителей в виде

$$x_1 = \frac{|\mathbf{A}_1|}{|\mathbf{A}|}, \quad x_2 = \frac{|\mathbf{A}_2|}{|\mathbf{A}|}$$

при условии $|\mathbf{A}| \neq 0$.

Значение определителя произвольной квадратной матрицы определяется следующим образом. Определитель квадратной матрицы $\mathbf{A}$ размерности $(n \times n)$, записываемый как $|\mathbf{A}|$, равен алгебраической сумме всех возможных произведений n элементов, содержащих лишь один элемент из каждой строки и столбца. При этом каждое из произведений положительно или отрицательно, в соответствии со следующим правилом. Расположить все возможные произведения в порядке возрастания первых индексов, например, $a_{13}a_{22}a_{31}$ ... Определить *инверсию* как расположение большего целого числа перед меньшим. Знак произведения положительный, если число инверсий вторых индексов является четным; в противном случае он отрицательный. Например, последовательность 321 содержит три инверсии: 3 перед 2, 3 перед 1 и 2 перед 1.

Пример 4.3.1. Вычислить определитель

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Возможные произведения и их знаки таковы:

Возможные произведения	Число инверсий	Знак
$a_{11}a_{22}a_{33}$	0	+
$a_{11}a_{23}a_{32}$	1	−
$a_{12}a_{21}a_{33}$	1	−
$a_{12}a_{23}a_{31}$	2	+
$a_{13}a_{21}a_{32}$	2	+
$a_{13}a_{22}a_{31}$	3	−

Определитель $\mathbf{A}$ тогда равен

$$|\mathbf{A}| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31}).$$

Определитель *порядка n* содержит $n!$ таких произведений.

На основе приведенного выше определения можно установить следующие свойства определителей.

1. Определитель равен единице, если все элементы на *главной диагонали* (a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}) равны единице, а остальные элементы нули.

2. Определитель равен нулю, если равны нулю все элементы какой-либо строки (или столбца) или если равны или пропорциональны соответствующие элементы произвольных двух строк (или двух столбцов).

3. Величина определителя остается постоянной по модулю при перестановке его строк (столбцов).

4. Знак определителя изменяется на противоположный при замене местами его двух строк (или столбцов).

5. Значение определителя умножается на постоянную k, если все элементы какой-либо его строки (или столбца) умножаются на k.

6. Значение определителя не изменится, если к какой-либо его строке (или столбцу) прибавить умноженные на k соответствующие элементы другой строки (или столбца).

Миноры и алгебраические дополнения. *Миноры.* Если в определителе $|\mathbf{A}|$ вычеркнуть i-ю строку и j-й столбец, то оставшиеся $n-1$ строк и столбцов образуют определитель $|\mathbf{M}_{ij}|$. Этот определитель называется *минором* элемента a_{ij}. Например, если определитель $\mathbf{A}$ задается в виде

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

то минор элемента a_{12} равен

$$|\mathbf{M}_{12}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Минор $|\mathbf{A}|$, диагональные элементы которого являются также диагональными элементами $|\mathbf{A}|$, называется *главным минором* $|\mathbf{A}|$. Как будет видно в дальнейшем, эти миноры играют особо важную роль.

Алгебраические дополнения. Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} равно минору a_{ij}, взятому со знаком $(-1)^{i+j}$. Таким образом, алгебраическое дополнение a_{ij}, записываемое как C_{ij}, определяется в виде

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} |\mathbf{M}_{ij}|. \qquad (4.3.3)$$

Алгебраическое дополнение C_{12} для предыдущего примера равно

$$C_{12}=(-1)\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Пример 4.3.2. Вычислить миноры и алгебраические дополнения определителя третьего порядка, приведенного в примере 4.3.1.

$$|\mathbf{M}_{11}|=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}=C_{11},$$

$$|\mathbf{M}_{12}|=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}=-C_{12},$$

$$|\mathbf{M}_{13}|=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}=C_{13},$$

$$|\mathbf{M}_{21}|=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{12}a_{33}-a_{13}a_{32}=-C_{21},$$

$$|\mathbf{M}_{22}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31}=C_{22},$$

$$|\mathbf{M}_{23}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=a_{11}a_{32}-a_{12}a_{31}=-C_{23},$$

$$|\mathbf{M}_{31}|=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}=a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}=C_{31},$$

$$|\mathbf{M}_{32}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}=a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21}=-C_{32},$$

$$|\mathbf{M}_{33}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=C_{33}.$$

Разложение определителя методом Лапласа. Из сравнения результатов примеров 4.3.1 и 4.3.2 видно, что определитель матрицы третьего порядка $\mathbf{A}$ можно выразить при помощи одного столбца или строки и их соответствующих алгебраических дополнений. Поэтому

$$\begin{aligned}|\mathbf{A}|&=a_{11}C_{11}+a_{12}C_{12}+a_{13}C_{13}=\\&=a_{21}C_{21}+a_{22}C_{22}+a_{23}C_{23}=\\&=a_{31}C_{31}+a_{32}C_{32}+a_{33}C_{33}=\\&=a_{11}C_{11}+a_{21}C_{21}+a_{31}C_{31}=\\&=a_{12}C_{12}=a_{22}C_{22}+a_{32}C_{32}=\\&=a_{13}C_{13}+a_{23}C_{23}+a_{33}C_{33}.\end{aligned}$$

Формула разложения Лапласа для определителя произвольной матрицы $\mathbf{A}(n\times n)$ является непосредственным обобщением предыдущего рассмотрения. Из формулы следует, что определитель

квадратной матрицы **A** представляется в виде суммы произведений элементов произвольного ряда или строки на их алгебраические дополнения. Следовательно,

$$|\mathbf{A}| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}C_{ij} \quad j = 1, \text{ или } 2, \ldots, \text{ или } n \text{ (разложение по элемементам столбца)},$$
$$|\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij} \quad i = 1, \text{ или } 2, \ldots, \text{ или } n \text{ (разложение по элементам строки)}. \tag{4.3.4}$$

Пример 4.3.3. Найти определитель **A**, где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

на основе формулы примера 4.3.1

$$|\mathbf{A}| = [(0)(2)(2) + (-1)(0)(2) + (1)(1)(0)] - [(0)(0)(0) + (-1)(1)(2) + (1)(2)(2)] = -2.$$

Разложение Лапласа по элементам первой строки дает

$$|\mathbf{M}_{11}| = 4, \qquad C_{11} = 4,$$
$$|\mathbf{M}_{12}| = 2, \qquad C_{12} = -2,$$
$$|\mathbf{M}_{13}| = -4, \qquad C_{13} = -4,$$
$$|\mathbf{A}| = (0)(4) + (-1)(-2) + (1)(-4) = -2.$$

Разложение Лапласа по элементам второго столбца дает

$$|\mathbf{M}_{12}| = 2, \qquad C_{12} = -2,$$
$$|\mathbf{M}_{22}| = -2, \qquad C_{22} = -2,$$
$$|\mathbf{M}_{32}| = -1, \qquad C_{32} = 1,$$
$$|\mathbf{A}| = (-1)(-2) + (2)(-2) + (0)(1) = -2.$$

Исходя из шести основных свойств определителя, его значение можно найти путем приведения исходной матрицы к диагональному виду. Тогда значение определителя будет равно произведению диагональных элементов. Применение этого метода иллюстрируется описанием следующих этапов.

Шаг 1. Умножить третью строку на (—1/2) и сложить с первой строкой:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Шаг 2. Ко второй строке прибавить полученную новую первую строку:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Шаг 3. Вычесть из первого столбца третий:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Шаг 4. Вычесть из второго столбца первый:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Значение определителя тогда равно

$$|\mathbf{A}| = a_{11}a_{22}a_{33} = (-1)(1)(2) = -2.$$

Из второго свойства определителей следует, что значение определителя равно нулю, если соответствующие элементы произвольных двух строк (или столбцов) равны или пропорциональны. В терминах разложения Лапласа это можно сформулировать как

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} a_{kj}C_{ij} = 0, \quad k \neq i \text{ (элементы } i\text{-й строки заменены элементами } k\text{-й строки)}, \\ &\sum_{j=1}^{n} a_{jk}C_{ji} = 0, \quad k \neq i \text{ (элементы } i\text{-го столбца заменены элементами } k\text{-го столбца)}. \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

Используя символ Кронекера

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad i \neq k, \\ 1, & \text{если} \quad i = k, \end{cases}$$

можно представить уравнения (4.3.4) и (4.3.5) в виде более полезных соотношений

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} a_{kj}C_{ij} = |A|\,\delta_{ik}, \\ &\sum_{j=1}^{n} a_{jk}C_{ji} = |A|\,\delta_{ik}. \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

Как будет видно в § 4.6, эти соотношения играют важную роль при выводе правила Крамера.

Метод опорного элемента [1, 2]. Метод опорного элемента Чао представляет собой удобную процедуру для вычисления данного определителя путем вычисления множества определителей второго порядка. Метод состоит в следующем.

Произвольный элемент a_{ij} определителя выбирается в качестве опорного. Берется произвольный элемент a_{ik}, расположенный в той же строке, что и a_{ij}, а также произвольный элемент a_{qj}, расположенный в одном столбце с a_{ij}. Элементы a_{qk}, a_{qj}, a_{ik} и a_{ij} используются затем для образования определителя второго порядка, причем порядок элементов сохраняется. Образуются все возможные определители второго порядка, содержащие в качестве одного из элементов опорный. Используя в качестве элементов определители второго порядка, а множителем $1/a_{ij}^{n-2}$, можно представить исходный определитель как определитель $(n-1)$-го порядка.

Расположение новых элементов определяется посредством вычитания единицы из каждого индекса у элемента определителя второго порядка, лежащего на одной диагонали с опорным элементом, если этот элемент лежит ниже опорного; индексы остаются неизменными, если диагональный элемент лежит выше опорного.

Повторяя указанную процедуру, можно определить значение определителя высокого порядка, последовательно уменьшая его порядок до единицы.

Пример 4.3.4. На основе метода опорного элемента свести вычисление данного определителя к вычислению определителей второго порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_{11}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \end{vmatrix}.$$

Пример 4.3.5. Вычислить

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 3 & 5 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

на основе метода опорного элемента.

Используя в качестве опорного элемента a_{11}, имеем

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & -10 & -7 \\ -4 & -4 & 3 \\ -6 & -14 & -3 \end{vmatrix}.$$

Снова выбирая новый a_{11} в качестве опорного, после умножения первого и второго столбцов на -1 получим

$$|\mathbf{A}| = \frac{1}{7}\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 7 & 10 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 7 & -7 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 7 & 10 \\ 6 & 14 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 7 & -7 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \frac{1}{7}\begin{vmatrix} -12 & 49 \\ 38 & 21 \end{vmatrix} = -302.$$

Отметим, что на каждом шаге требуется вычисление только определителей второго порядка.

Доказательство метода опорного элемента проиллюстрируем на примере определителя третьего порядка. Из приведенного вывода становится очевидным его распространение и не определители высокого порядка. Пусть

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Умножим все строки определителя (за исключением строки, содержащей опорный элемент) на величину опорного элемента. В результате этого определитель умножается на опорный элемент в степени $n-1$. Чтобы значение определителя осталось неизменным, разделим результирующий определитель на опорный элемент в степени $n-1$. Используя в качестве опорного элемента a_{11}, получим в результате выполнения данной операции

$$|\mathbf{A}| = \frac{1}{a_{11}^2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}a_{11} & a_{22}a_{11} & a_{23}a_{11} \\ a_{31}a_{11} & a_{32}a_{11} & a_{33}a_{11} \end{vmatrix}.$$

Затем умножим первую строку на элемент, расположенный непосредственно ниже опорного (в исходном определителе), и вычтем ее из строки, содержащей этот элемент:

$$|\mathbf{A}| = \frac{1}{a_{11}^2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & (a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}) & (a_{23}a_{11} - a_{21}a_{13}) \\ a_{31}a_{11} & a_{32}a_{11} & a_{33}a_{11} \end{vmatrix}.$$

Процедура повторяется до тех пор, пока элементы столбца, содержащего опорный элемент (за исключением самого опорного элемента), не станут равными нулю, т. е.

$$|\mathbf{A}| = \frac{1}{a_{11}^2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & (a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}) & (a_{23}a_{11} - a_{21}a_{13}) \\ 0 & (a_{32}a_{11} - a_{12}a_{31}) & (a_{33}a_{11} - a_{13}a_{31}) \end{vmatrix}.$$

Тогда видно, что результирующий определитель равен определителю порядка $n-1$, разделенному на опорный элемент в степени $n-2$:

$$|\mathbf{A}| = \frac{1}{a_{11}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \end{vmatrix}.$$

Метод опорного элемента эффективен для нахождения решения системы линейных неоднородных уравнений, а также при анализе электрических цепей. В последнем случае метод опорного элемента предлагает быструю процедуру для исключения ненужных узлов из матрицы полных проводимостей электрической цепи.

Интересно отметить, что вычисление определителя n-го порядка согласно правилу разложения Лапласа требует $(n!)(n-1)$ умножений. Метод опорного элемента требует $(n^3/2+n^2-n/3)$ умножений; следовательно, этот метод более эффективен. Например, если $n=6$, то для разложения Лапласа требуется 3600 умножений. В методе опорного элемента требуется только 106 умножений.

Произведение определителей. Можно показать, что определитель произведения двух квадратных матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ n-го порядка равен произведению определителей $|\mathbf{A}|$ и $|\mathbf{B}|$. Значит, если $\mathbf{C}=\mathbf{AB}$, то

$$|\mathbf{C}| = |\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|. \tag{4.3.7}$$

Пример 4.3.6. Вычислить произведение данных определителей:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}) & (a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}) \\ (a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}) & (a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}) \end{vmatrix}.$$

Производная от определения. Как следствие уравнения (4.3.4) (формулы разложения Лапласа), производная от определителя по одному из его элементов равна алгебраическому дополнению этого элемента, т. е.

$$\frac{\partial}{\partial a_{ij}}|\mathbf{A}| = \frac{\partial}{\partial a_{ij}}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}C_{ij}\right) = C_{ij}. \tag{4.3.8}$$

Если элементы являются функциями какого-либо параметра, то производная определителя по этому параметру равна сумме n $(n\times n)$ определителей. Заметим, что i-й член $(i=1, 2, \ldots, n)$ суммы равен исходному определителю, в котором каждый из

элементов i-й строки (или столбца) заменен производной. Например, если определитель имеет вид

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) \end{vmatrix} = a_{11}(x)\,a_{22}(x) - a_{21}(x)\,a_{12}(x),$$

то производная по x равна

$$\frac{d}{dx}|\mathbf{A}| = a_{11}(x)\frac{d}{dx}[a_{22}(x)] + a_{22}(x)\frac{d}{dx}[a_{11}(x)] -$$

$$- a_{21}(x)\frac{d}{dx}[a_{12}(x)] - a_{12}(x)\frac{d}{dx}[a_{21}(x)] =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}(x) & \frac{d}{dx}[a_{12}(x)] \\ a_{21}(x) & \frac{d}{dx}[a_{22}(x)] \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{d}{dx}[a_{11}(x)] & a_{12}(x) \\ \frac{d}{dx}[a_{21}(x)] & a_{22}(x) \end{vmatrix}. \qquad (4.3.9)$$

§ 4.4. Присоединенная и обратная матрицы

Если $\mathbf{A}$ — квадратная матрица, а C_{ij} — алгебраическое дополнение a_{ij}, то *присоединенной* для $\mathbf{A}$ называется матрица, образованная из алгебраических дополнений C_{ji}, т. е.

$$\operatorname{Adj}\mathbf{A} = [C_{ji}]. \qquad (4.4.1)$$

Таким образом, присоединенная матрица является транспонированной для матрицы, образованной заменой элементов a_{ij} их алгебраическими дополнениями.

Пример 4.4.1. Найти присоединенную матрицу для

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix},$$

$$C_{11} = -3, \quad C_{12} = 2, \quad C_{13} = 1,$$
$$C_{21} = -4, \quad C_{22} = 1, \quad C_{23} = -2,$$
$$C_{31} = 6, \quad C_{32} = -4, \quad C_{33} = 3.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Adj}\mathbf{A} = [C_{ji}] = \begin{bmatrix} -3 & -4 & 6 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Из уравнения (4.3.6) вытекает, что

$$[a_{ij}][C_{ij}]^T = |\mathbf{A}|\,\mathbf{I}. \qquad (4.4.2)$$

Следовательно, произведение матрицы $[a_{ij}]$ на присоединенную матрицу $[C_{ji}]$ равно

$$[a_{ij}][C_{ji}] = |\mathbf{A}|\,\mathbf{I}, \qquad (4.4.3)$$

являющейся диагональной матрицей, все элементы которой равны определителю матрицы **A**. Разделив обе части уравнения на $|\mathbf{A}|$ (при условии $|\mathbf{A}| \neq 0$), получим

$$\mathbf{A}\,\frac{\mathrm{Adj}\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \mathbf{I}. \tag{4.4.4}$$

Из этого уравнения естественно определить матрицу $(\mathrm{Adj}\,\mathbf{A})/|\mathbf{A}|$ как *обратную* для матрицы **A**, так что

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}, \tag{4.4.5}$$

где

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathrm{Adj}\,\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} \qquad (|\mathbf{A}| \neq 0). \tag{4.4.6}$$

Очевидно, что $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$, т. е. матрица и обратная ей коммутативны. Обратные определены для квадратных матриц.

Пример 4.4.2. Найти обратную матрицу для **A** и проверить, что $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$, если

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad |\mathbf{A}| = 1 \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathrm{Adj}\,\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Чтобы показать, что $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$,

$$\mathbf{A}\,\frac{\mathrm{Adj}\,\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}.$$

Произведение обратных матриц. Произведение ряда обратных матриц подчиняется тем же правилам перестановки, что и произведение транспонированных матриц. Чтобы показать это, рассмотрим произведение $\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{B}$. Умножим обе части данного уравнения слева на $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ и справа на $\mathbf{C}^{-1}$. В результате получим соотношение

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{C}^{-1}. \tag{4.4.7}$$

Пример 4.4.3. Найти обратную матрицу для произведения **AB**, где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Произведение **AB** равно

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Обратная матрица $(\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1}$ выражается в виде

$$(\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1} = \frac{\mathrm{Adj}\,(\mathbf{A}\mathbf{B})}{|\mathbf{A}\mathbf{B}|} = \frac{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}}{6}.$$

Соответственно обратные матрицы $\mathbf{A}^{-1}$ и $\mathbf{B}^{-1}$ определяются как

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{2}, \quad \mathbf{B}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}}{3}.$$

Произведение $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ получается в виде

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}}{3} \frac{\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{2} = \frac{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}}{6}.$$

Таким образом, $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$, что согласуется с уравнением (4.4.7).

Производная от обратной матрицы. Для значений t, при которых $\mathbf{A}(t)$ дифференцируема и существует обратная матрица, производная от $\mathbf{A}^{-1}(t)$ дается в виде

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{A}^{-1}(t)] = -\mathbf{A}^{-1}(t)\,\dot{\mathbf{A}}(t)\,\mathbf{A}^{-1}(t). \tag{4.4.8}$$

Данное соотношение можно получить, рассматривая

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{A}^{-1}(t)\,\mathbf{A}(t)] = \frac{d\mathbf{I}}{dt} = [0].$$

Оно равно

$$\mathbf{A}^{-1}(t)\,\dot{\mathbf{A}}(t) + \frac{d}{dt}[\mathbf{A}^{-1}(t)]\,\mathbf{A}(t) = [0],$$

откуда

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{A}^{-1}(t)] = -\mathbf{A}^{-1}(t)\,\dot{\mathbf{A}}(t)\,\mathbf{A}^{-1}(t).$$

Отметим, что это не то же, что $(d\mathbf{A}/dt)^{-1}$.

Пример 4.4.4. Найти производную от обратной матрицы для $\mathbf{A}$, где

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & t \end{bmatrix}.$$

Обратная матрица для $\mathbf{A}$ равна

$$\mathbf{A}^{-1}(t) = \begin{bmatrix} -t & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{A}^{-1}(t)] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Сопоставляя этот результат с уравнением (4.4.8), получим

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{A}^{-1}(t)] = -\begin{bmatrix} -t & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -t & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Некоторые специальные обратные матрицы. *Инволютивная матрица.* Матрица $\mathbf{A}$ называется *инволютивной, если* $\mathbf{AA} = \mathbf{I}$ (матрица совпадает со своей обратной).

Ортогональная матрица. Матрица **A** называется ортогональной, если $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$.

Унитарная матрица. Матрица **A** является *унитарной*, если $\mathbf{A} = \{(\mathbf{A}^*)^T\}^{-1}$ (матрица, обратная **A**, равная матрице, сопряженной с **A**).

§ 4.5. Векторы и линейные векторные пространства

В § 4.2 строки и столбцы матрицы называются соответственно *векторами-строками* и *векторами-столбцами.* Это не что иное, как распространение более знакомого понятия векторов в двух- и трехмерных пространствах на n-мерное пространство. Если n больше трех, геометрическое представление утрачивает свой смысл; однако терминология, связанная с привычными координатными системами, тем не менее оказывается весьма полезной. Например, система координат с единичными векторами

$$\hat{\mathbf{i}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{i}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad \hat{\mathbf{i}}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

может мыслиться как n-мерная система со взаимно ортогональными координатными осями.

Скалярные произведения. Скалярное произведение (или внутреннее произведение) двух векторов **x** и **y** записывается $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ и определяется как

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = (\mathbf{x}^*)^T \mathbf{y} = x_1^* y_1 + x_2^* y_2 + \ldots + x_n^* y_n = \mathbf{y}^T \mathbf{x}^* \neq \mathbf{x}^T \mathbf{y}^*. \quad (4.5.1)$$

Отметим, что указаны комплексно сопряженные составляющие **x**, так как в общем случае составляющие могут быть комплексными величинами. В случае действительных **x** и **y** уравнение (4.5.1) приводится к более знакомому виду

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n.$$

Тогда (для действительных **x** и **y**) скалярное произведение можно записать как

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{x} = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle. \quad (4.5.2)$$

Пример 4.5.1. Найти скалярное произведение $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ векторов

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1+j \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1+j \\ 2j \end{bmatrix}.$$

Скалярное произведение $(\mathbf{x}^*)^T\mathbf{y}$ равно $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = (1-j)(1+j)+2(2j) = 2+4j$ и является комплексно сопряженным (а не равно) $\mathbf{x}^T\mathbf{y}^* = (1+j)(1-j)+ +2(-2j) = 2-4j$.

Внешнее произведение. Если вектор-столбец $\mathbf{x}$ размерности $(n \times 1)$ обозначить через $\mathbf{x}>$, а *вектор-строку* $(\mathbf{y}^*)^T$ размерности $(1 \times m)$ — через $<\mathbf{y}$, то *внешним произведением* $\mathbf{x}><\mathbf{y}$ является матрица $(n \times m)$ *)

$$\mathbf{x} > < \mathbf{y} = \mathbf{x}(\mathbf{y}^*)^T = \begin{bmatrix} x_1y_1^* & x_1y_2^* & \dots & x_1y_m^* \\ x_2y_1^* & x_2y_2^* & \dots & x_2y_m^* \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_ny_1^* & x_2y_2^* & \dots & x_ny_m^* \end{bmatrix}. \tag{4.5.3}$$

Ортогональные векторы. Два вектора называются *ортогональными*, если их скалярное произведение $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ равно нулю, т. е.

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0. \tag{4.5.4}$$

Длина вектора. Длина вектора $\mathbf{x}$, обозначаемая через $\|\mathbf{x}\|$ и иногда называемая *нормой* $\mathbf{x}$, определяется как квадратный корень от скалярного произведения $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}$, т. е.

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{x_1^*x_1 + x_2^*x_2 + \dots + x_n^*x_n}. \tag{4.5.5}$$

Можно показать, что следствием данного определения являются соотношения

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \quad \text{(неравенство треугольника)} \tag{4.5.6}$$

и

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leqslant \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \quad \text{(неравенство Шварца)}. \tag{4.5.7}$$

Единичные векторы. Вектор называется *единичным*, если его длина равна единице, так что $\langle \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{x}} \rangle = 1$. Единичный вектор можно получить из вектора $\mathbf{x}$, разделив каждую составляющую $\mathbf{x}$ на длину этого вектора. Следовательно,

$$\hat{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}}. \tag{4.5.8}$$

---

*) Внешнее произведение часто называют *двоичным произведением*.

Пример 4.5.2. Найти единичный вектор $\hat{\mathbf{x}}$, соответствующий вектору $\mathbf{x}$, где

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1+j2\\2-j\end{bmatrix}.$$

Скалярное произведение $\langle\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle=10$. Следовательно,

$$\hat{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}\dfrac{1+j2}{\sqrt{10}}\\[2ex]\dfrac{2-j}{\sqrt{10}}\end{bmatrix}.$$

Линейная независимость. Векторы $\mathbf{x}_i$ $(i=1, 2, \ldots, m)$ с составляющими $x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ni}$ называются линейно независимыми, если не существует таких постоянных $k_1, k_2, \ldots, k_m$ (по крайней мере одна из k_i должна быть отличной от нуля), что

$$k_1\mathbf{x}_1+k_2\mathbf{x}_2+\ldots+k_m\mathbf{x}_m=\mathbf{0}. \tag{4.5.9}$$

На основе понятия линейной независимости векторов можно сформулировать следующие важные определения.

Особенная матрица. Квадратная матрица называется *особенной*, если ее столбцы или строки не являются *линейно независимыми*. В этом случае $|\mathbf{A}|=0$. Если $|\mathbf{A}|\neq 0$, то матрица называется *неособенной*. Следовательно, обратные матрицы существуют только для неособенных матриц.

Вырожденность *). Если строки (столбцы) особенной матрицы линейно связаны одним соотношением, то матрица называется *просто вырожденной*, или имеющей вырождение кратности 1. Если строки (столбцы) связаны между собой более чем одним соотношением, то матрица называется *многократно вырожденной*. При q таких соотношениях матрица имеет вырождение кратности q.

Ранг. Рангом r матрицы $\mathbf{A}$ является наивысший порядок отличных от нуля миноров матрицы $\mathbf{A}$. Если порядок квадратной матрицы равен n, то

$$r=n-q. \tag{4.5.10}$$

Ясно, что ранг матрицы $(n\times n)$ r меньше n только в том случае, если матрица является особенной.

Правило вырожденности Сильвестра. Дефект произведения двух матриц не меньше дефекта каждой из матриц и не выше суммы дефектов матриц.

---

*) Вместо термина *вырожденность* часто используется термин *дефект преобразования*.

Наглядной иллюстрацией правила Сильвестра служит произведение диагональных матриц **A** и **B**

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} a_1b_1 & & & & \\ & a_2b_2 & & & \\ & & a_3b_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_nb_n \end{bmatrix},$$

где

$$\mathbf{A} = [a_i\delta_{ij}], \quad \mathbf{B} = [b_i\delta_{ij}].$$

Предположим, что **A** имеет m нулевых элементов, а **B** — q нулевых элементов, где $q \leqslant m$. Если расположение нулевых элементов **A** не совпадает с расположением нулевых элементов **B**, то общее число нулей в произведении **AB** равно $m+q$. Если расположение нулевых элементов **B** совпадает с расположением нулевых элементов **A**, то общее число нулевых элементов в произведении **AB** равно m.

Возвращаясь к уравнению (4.5.9) и условию линейной независимости, видим, что последнюю можно установить на основе ранга матрицы, образованной из элементов m векторов x_1, x_2, ..., x_m. Эта матрица имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nm} \end{bmatrix} \qquad (m \leqslant n)$$

Если ранг матрицы **A**, связанной с этими m векторами, меньше чем m, т. е. $r<m$, то существует лишь r линейно независимых векторов из данного множества. Остальные $m-r$ векторов можно представить в виде линейной комбинации этих r векторов. Следовательно, необходимым и достаточным условием линейной независимости указанных векторов является равенство ранга матрицы **A** величине m.

Определитель Грама. Определитель Грама для системы векторов строится в предположении, что выполняется соотношение типа (4.5.9). Записывая последовательно скалярные

произведения $\mathbf{x}_i$ и обеих частей уравнения (4.5.9), получим систему уравнений:

$$\begin{aligned}
&k_1\langle\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1\rangle + k_1\langle\mathbf{x}_1, x_2\rangle + \ldots + k_m\langle\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_m\rangle = 0,\\
&k_1\langle\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1\rangle + k_2\langle\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2\rangle + \ldots + k_m\langle\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_m\rangle = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&k_1\langle\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_1\rangle + k_2\langle\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_2\rangle + \ldots + k_m\langle\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_m\rangle = 0.
\end{aligned}$$

Как показывается в следующем параграфе, система однородных уравнений имеет нетривиальное решение для k_i только в том случае, если определитель матрицы с коэффициентами $[\langle\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j\rangle]$ равен нулю. Этот определитель называется *определителем Грама* и равен

$$G = \begin{vmatrix} \langle\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1\rangle & \langle\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\rangle & \ldots & \langle\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_m\rangle \\ \langle\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1\rangle & \langle\mathbf{x}_2, x_2\rangle & \ldots & \langle\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_m\rangle \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \langle\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_1\rangle & \langle\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_2\rangle & \ldots & \langle\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_m\rangle \end{vmatrix}. \qquad (4.5.11)$$

Следовательно, система векторов линейно независима тогда и только тогда, когда определитель Грама для этой системы векторов равен нулю. Отметим, что в случае ортогональных векторов определитель Грама является диагональным определителем.

Линейное векторное пространство [3]. Линейное векторное пространство состоит из множества векторов, таких, что:

(*а*) сумма двух произвольных векторов из множества S также является вектором, принадлежащим этому множеству;

(*б*) вектор, полученный умножением вектора из данного множества на произвольную скалярную величину, принадлежит этому множеству;

(*в*) правила сложения векторов и умножения векторов на скаляры обладают следующими свойствами:

(*1*) $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$ для любых $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из S:

(*2*) $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$ для любых $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$ из S;

(*3*) существует в S вектор (равный $\mathbf{0}$) такой, что $\mathbf{x}+\mathbf{0}=\mathbf{x}$ для любых $\mathbf{x}$ из S;

(*4*) любому $\mathbf{x}$ из S соответствует такой $\mathbf{y}$ из S, что $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{0}$;

(*5*) $1\mathbf{x}=\mathbf{x}$ для любого $\mathbf{x}$ из S;

(*6*) $a(b\mathbf{x})=(ab)\mathbf{x}$ для любых скаляров a и b, а также любого $\mathbf{x}$ из S;

(*7*) $(a+b)\mathbf{x}=a\mathbf{x}+b\mathbf{x}$ для любых скаляров a и b, а также любого $\mathbf{x}$ из S;

(*8*) $a(\mathbf{x}+\mathbf{y})=a\mathbf{x}+a\mathbf{y}$ для любого скаляра a, а также любых $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из S.

Наиболее простым примером линейного векторного пространства служит множество векторов, принадлежащих трехмерному

эвклидову пространству. Например, силы, действующие на космический корабль, образуют векторное пространство, в котором силы рассматриваются как векторы в особо выбранной координатной системе.

Если система векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ принадлежит пространству S, то и множество векторов $\mathbf{y}$, являющихся линейной комбинацией этих векторов, т. е.

$$\mathbf{y}=k_1\mathbf{x}_1+k_2\mathbf{x}_2+\ldots+k_m\mathbf{x}_m, \tag{4.5.12}$$

образуют векторное пространство. *Размерность* этого пространства равна максимальному числу его линейно независимых векторов.

Если только r векторов $\mathbf{x}_i$ в уравнении (4.5.12) являются линейно независимыми, то размерность пространства, которое можно образовать этими векторами, равна r — рангу системы векторов $\mathbf{x}_i$. Например, рассмотрим векторы

$$\mathbf{x}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_3=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}.$$

Эти векторы линейно зависимы, так как $\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2=\mathbf{x}_3$. Вектор $\mathbf{y}$, являющийся линейной комбинацией этих трех векторов и удовлетворяющий равенству

$$\mathbf{y}=k_1\mathbf{x}_1+k_2\mathbf{x}_2+k_3\mathbf{x}_3=(k_1+k_3)\mathbf{x}_1+(k_2+k_3)\mathbf{x}_3,$$

не может содержать три независимые составляющие. Только две составляющие $\mathbf{y}$ могут выбираться независимо. Третья составляющая должна быть функцией двух других. Размерность пространства, образуемого данными $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ и $\mathbf{x}_3$, равна двум.

В n-мерном пространстве n составляющих вектора $\mathbf{y}$ могут выбираться независимо в том случае, если вектор $\mathbf{y}$ образуется системой векторов, имеющей ранг n. Тогда систему n линейно независимых векторов называют также *линейной оболочкой*. Указанные n линейно независимых векторов можно использовать и как базис пространства. *Базисом* пространства называется такая система векторов, что произвольный вектор пространства выражается *единственным образом* в виде линейной комбинации этих векторов (базисных векторов). Базис представляет собой, в сущности, систему координат.

Если заданы составляющие вектора $\mathbf{y}$, то необходимо указать базис или систему координат, по отношению к которой указаны эти составляющие. Например, расположение точки в трехмерном пространстве может задаваться в прямоугольной системе

координат, цилиндрической системе координат, сферической системе координат и т. д. Утверждение, что **y** имеет составляющие 1, 0, 2, т. е.

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

не имеет смысла, если не указан также и базис.

Пример 4.5.3. Показать, что векторы

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

при ортогональном базисе (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) образуют линейную оболочку в трехмерном пространстве. Выразить произвольный вектор **y** этого пространства через векторы $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$, а также через базисные векторы.

Так как определитель Грама для этих трех векторов равен

$$G = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 6 & 14 & 13 \\ 6 & 13 & 14 \end{vmatrix} \neq 0,$$

то указанные три вектора являются линейно независимыми, и следовательно, образуют линейную оболочку в трехмерном пространстве. Поэтому произвольный вектор **y** трехмерного пространства можно представить в виде линейной комбинации этих трех векторов $\mathbf{y} = k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2 + k_3\mathbf{x}_3$.

Если векторы $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ и $\mathbf{x}_3$ использовать как базис трехмерного пространства, то по отношению к этому базису вектор **y** имеет вид

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}.$$

В указанной ортогональной системе координат (1, 0, 0), (0, 1, 0) и (0, 0, 1) вектор **y** имеет вид

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} (k_1 + k_2 + k_3) \\ (k_1 + 2k_2 + 3k_3) \\ (k_1 + 3k_2 + 2k_3) \end{bmatrix}.$$

Данные векторы показаны на рис. 4.5.1 при произвольном **y**.

Ортогонализация Грама — Шмидта для системы векторов. Если задана система, состоящая из m линейно независимых векторов, то при помощи исходной системы векторов можно построить *ортогональную* систему из m линейно независимых векторов. Если длина каждого вектора в ортогональной системе равна единице, то такая система называется *ортонормированной*.

Предположим, что задано множество $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ и требуется построить ортонормированную систему $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_m$. Процедура, используемая для получения этой системы, состоит в следующем. Выбирается в качестве первого вектора системы $\mathbf{y}_i$ произвольный вектор $\mathbf{x}_i$. Например, выберем $\mathbf{y}_1=\mathbf{x}_1$. Из исходной системы выбирается другой вектор $\mathbf{x}_2$. Пусть $\mathbf{y}_2=\mathbf{x}_2-k\mathbf{y}_1$,

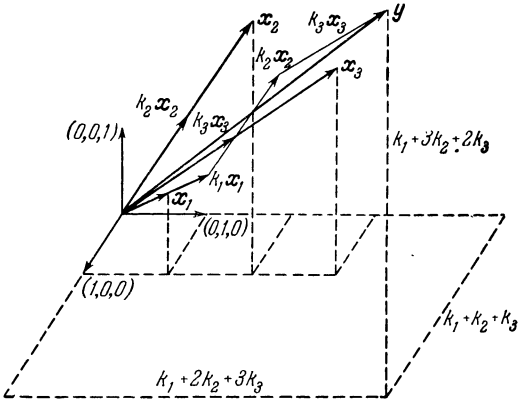


Рис. 4.5.1.

где k должно выбираться из условия ортогональности $\mathbf{y}_2$ и $\mathbf{y}_1$, т. е. таким образом, чтобы $\langle \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2\rangle = \langle \mathbf{y}_1, \mathbf{x}_2\rangle - k\langle \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1\rangle = 0$. Следовательно,

$$k = \frac{\langle \mathbf{y}_1, \mathbf{x}_2\rangle}{\langle \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1\rangle}.$$

Отметим, что $k=0$ только в том случае, если $\langle \mathbf{y}_1, \mathbf{x}_2\rangle=0$, т. е. $\mathbf{x}_2$ ортогонален $\mathbf{y}_1$. При этом берется $\mathbf{y}_2=\mathbf{x}_2$. В общем случае

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2 - \frac{\langle \mathbf{y}_1, \mathbf{x}_2\rangle}{\langle \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1\rangle}\mathbf{y}_1.$$

Геометрический смысл описываемой процедуры состоит в том, что произвольный вектор, в частности $\mathbf{x}_2$, можно разложить на две составляющие, одна из которых параллельна $\mathbf{y}_1$, а другая — перпендикулярна $\mathbf{y}_1$. Для получения последней, обозначаемой здесь через $\mathbf{y}_2$, из $\mathbf{x}_2$ вычитается ее составляющая в направлении $\mathbf{y}_1$.

Подобным образом $\mathbf{y}_3$ записывается как $\mathbf{y}_3=\mathbf{x}_3-k_2\mathbf{y}_2-k_1\mathbf{y}_1$, т. е. как составляющая $\mathbf{x}_3$, перпендикулярная к плоскости, содержащей $\mathbf{y}_1$ и $\mathbf{y}_2$. Аналитически, если вектор $\mathbf{y}_3$ ортогонален

к $\mathbf{y}_2$ и $\mathbf{y}_1$, то это приводит к уравнениям

$$\langle \mathbf{y}_1, \mathbf{x}_3\rangle = k_2\langle \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2\rangle + k_1\langle \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1\rangle = k_1\langle \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1\rangle,$$
$$\langle \mathbf{y}_2, \mathbf{x}_3\rangle = k_2\langle \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_2\rangle + k_1\langle \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_1\rangle = k_2\langle \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_2\rangle,$$

или

$$\mathbf{y}_3 = \mathbf{x}_3 - \frac{\langle \mathbf{y}_2, \mathbf{x}_3\rangle}{\langle \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_2\rangle}\mathbf{y}_2 - \frac{\langle \mathbf{y}_1, \mathbf{x}_3\rangle}{\langle \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1\rangle}\mathbf{y}_1.$$

Указанная процедура дает для j-го члена системы $\mathbf{y}_j$ (при $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1$)

$$\mathbf{y}_j = \mathbf{x}_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\langle \mathbf{y}_i, \mathbf{x}_j\rangle}{\langle \mathbf{y}_i, \mathbf{y}_i\rangle}\mathbf{y}_i \qquad (j = 2, 3, \ldots, m).$$

Тогда $\mathbf{y}_i$ образуют ортогональную систему, а единичные векторы

$$\hat{\mathbf{y}}_i = \frac{\mathbf{y}_i}{\|\mathbf{y}_i\|} \tag{4.5.13}$$

образуют ортонормированную систему.

Пример 4.5.4. Для системы векторов в примере 4.5.3 построить ортонормированную систему $\hat{\mathbf{y}}_i$.

Выбираем $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1$,

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \hat{\mathbf{y}}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда, так как $\langle \mathbf{y}_1, \mathbf{x}_2\rangle / \langle \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1\rangle = 2$, то

$$\mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \hat{\mathbf{y}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Подобным образом

$$\mathbf{y}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

и

$$\hat{\mathbf{y}}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Тогда ортонормированный базис равен

$$\hat{\mathbf{y}}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{y}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{y}}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Двойственный базис. Нахождение k_i в уравнении (4.5.12) можно упростить путем определения системы векторов $\mathbf{r}_i$, удовлетворяющих равенству

$$\langle \mathbf{r}_i, \mathbf{x}_j \rangle = \delta_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, m). \tag{4.5.14}$$

Нетрудно показать, что при заданном базисе пространства всегда существует система таких векторов, что удовлетворяется уравнение вида (4.5.14). Векторы $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_m$ являются линейно независимыми и, таким образом, образуют линейную оболочку размерности m, натянутую на базисные векторы $\mathbf{x}_i$. Следовательно, они образуют базис пространства. Вследствие соотношения (уравнение (4.5.14)) между этим базисом и базисом, образованным векторами $\mathbf{x}_i$, базис, состоящий из векторов $\mathbf{r}_i$, называется *двойственным*.

Двойственный базис используется главным образом для нахождения постоянных k_i в уравнении (4.5.12). Рассматривая скалярные произведения обеих частей уравнения (4.5.12) с вектором $\mathbf{r}_1$, получим

$$\langle \mathbf{r}_1, \mathbf{y} \rangle = k_1 \langle \mathbf{r}_1, \mathbf{x}_1 \rangle + k_2 \langle \mathbf{r}_2, \mathbf{x}_2 \rangle + \ldots + k_m \langle \mathbf{r}_1, \mathbf{x}_m \rangle.$$

Однако согласно определению двойственного базиса, скалярные произведения $\langle \mathbf{r}_1, \mathbf{x}_2 \rangle, \ldots, \langle \mathbf{r}_1, \mathbf{x}_m \rangle$ равны нулю, так что $k_1 = \langle \mathbf{r}_1, \mathbf{y} \rangle$, и в общем случае

$$k_i = \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{y} \rangle. \tag{4.5.15}$$

Тогда уравнение (4.5.12) можно записать в форме

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{m} \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{y} \rangle \mathbf{x}_i. \tag{4.5.16}$$

Скалярное произведение $\langle \mathbf{r}_i, \mathbf{y} \rangle$ равно составляющей вектора $\mathbf{y}$ в направлении вектора $\mathbf{x}_i$. Как следует из материала следующей главы, это уравнение оказывается чрезвычайно полезным при исследовании частот систем.

§ 4.6. Решение линейных уравнений

Правило Крамера. Предположим, что задана неоднородная система, состоящая из n уравнений:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= y_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= y_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= y_n, \end{aligned} \tag{4.6.1}$$

где a_{ij} и y_i — известные числа. Требуется определить n неизвестных x_i. Заметим, что число уравнений равно числу неизвестных. Существует общая регулярная процедура определения неизвестных посредством использования матриц или определителей.

Система уравнений (4.6.1) записывается в более компактной форме:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \quad \text{или} \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{y}, \tag{4.6.2}$$

где

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Умножая обе части уравнения (4.6.2) на алгебраическое дополнение C_{jk} и производя суммирование по всем i от 1 до n, получим

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} C_{ik}a_{ij}\right)x_j = \sum_{i=1}^{n} C_{ik}y_i, \qquad k = 1, 2, \ldots, n \tag{4.6.3}$$

или

$$(\mathrm{Adj}\,\mathbf{A})\,\mathbf{Ax} = (\mathrm{Adj}\,\mathbf{A})\,\mathbf{y}.$$

Однако выражение в скобках в уравнении (4.6.3) равно нулю, если $j \neq k$ (см. уравнение (4.3.6)). При $j = k$ это выражение равно определителю $\mathbf{A}$. Следовательно,

$$|\mathbf{A}|\,x_k = \sum_{i=1}^{n} C_{ik}y_i \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \quad \text{или} \quad |\mathbf{A}|\,\mathbf{x} = (\mathrm{Adj}\,\mathbf{A})\,\mathbf{y}. \tag{4.6.4}$$

Если определитель $|\mathbf{A}|$ не равен тождественно нулю, то n уравнений линейно независимы, т. е. ни одно из уравнений нельзя записать в виде линейной комбинации остальных. Тогда неизвестные x_k выражаются единственным образом в виде

$$x_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} C_{ik}y_i}{|\mathbf{A}|} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \quad \text{или} \quad \mathbf{x} = \frac{(\mathrm{Adj}\,\mathbf{A})}{|\mathbf{A}|}\,\mathbf{y} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}. \tag{4.6.5}$$

Числитель выражения для x_k представляет собой не что иное, как определитель $\mathbf{A}$, k-й столбец которого заменен столбцом,

стоящим в правой части уравнения (4.6.1). Таким образом, правило Крамера для построения решения при помощи определителей можно сформулировать следующим образом.

Система n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ имеет решение, если матрица **A** *неособенная*. Значение искомой переменной (например, x_k) равно частному от деления двух определителей. Знаменатель равен определителю матрицы коэффициентов системы, а числитель определителю матрицы коэффициентов, k-й столбец в которой заменен столбцом, содержащим члены из правой части системы уравнений.

Пример 4.6.1. Используя правило Крамера, определить решение системы из двух уравнений

$$x_1 + 2x_2 = 0,$$
$$x_1 - 2x_2 = 2.$$

Матрица коэффициентов **A** имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Определитель **A** равен —4. Заменяя первый столбец **A** членами, стоящими в правой части системы уравнений, получим для первого неизвестного x_1 равенство

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}}{-4} = 1.$$

Заменяя второй столбец **A** членами, стоящими в правой части системы уравнений, получим для второго неизвестного x_2 равенство

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{-4} = -\frac{1}{2}.$$

Так как

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

и $\mathbf{A}^{-1}$, как легко определить, равна

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix},$$

то x_i определяются при помощи матриц в виде

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Данное решение, совпадающее с полученным на основе правила Крамера, может быть проверено непосредственной подстановкой.

Однородная система линейных уравнений. Если члены в правой части уравнения (4.6.1) равны нулю, то система уравнений называется *однородной*. В этом случае числитель уравнения (4.6.5) равен нулю. Следовательно, если определитель $|\mathbf{A}|$ отличен от нуля, то система уравнений имеет только тривиальное решение $\mathbf{x}=\mathbf{0}$, т. е. $x_1=0$, $x_2=0$, ..., $x_n=0$. Если определитель $|\mathbf{A}|$ равен нулю, то две или более строк или столбцов $\mathbf{A}$ линейно зависимы. Тогда можно получить q-параметрическое семейство решений, где q — дефект $\mathbf{A}$.

Предположим, что ранг матрицы коэффициентов равен r. Значения r переменных могут быть выражены через другие $q=n-r$ переменных при помощи следующей процедуры.

1. Опускаются $q=n-r$ уравнений так, чтобы определитель матрицы коэффициентов относительно r неизвестных отличался от нуля.

2. Образуются r уравнений с r неизвестными в левой части уравнения и оставшимися $q=n-r$ неизвестными в правой. На основе правила Крамера r неизвестных выражаются через $q=n-r$ неизвестных.

Указанные этапы решения позволяют получить q *независимых* решений, что можно усмотреть, записывая уравнение (4.6.2) для случая однородной системы уравнений:

$$\mathbf{Ax}=[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\ \ldots\ \mathbf{a}_n]\mathbf{x}=x_1\mathbf{a}_1+x_2\mathbf{a}_2+\ldots+x_n\mathbf{a}_n=\mathbf{0},$$

где $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_n$ обозначают n столбцов $\mathbf{A}$. Если дефект $\mathbf{A}$ равен q, то можно определить q линейно зависимых соотношений вида

$$k_1\mathbf{a}_1+k_2\mathbf{a}_2+\ldots+k_n\mathbf{a}_n=\mathbf{0}.$$

Следовательно, $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ имеет q независимых решений.

Для геометрической трактовки рассмотренного пусть $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, ..., $\mathbf{b}_n$ обозначают векторы, являющиеся транспонированными строками $\mathbf{A}$. Значит, $\mathbf{A}=[\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\ \ldots\ \mathbf{b}_n]^T$ и однородные уравнения можно записать как $[\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\ \ldots\ \mathbf{b}_n]^T\mathbf{x}=0$. Это равносильно

$$\begin{aligned}\langle\mathbf{b}_1,\mathbf{x}\rangle&=0,\\ \langle\mathbf{b}_2,\mathbf{x}\rangle&=0,\\ &\ldots\ldots\\ \langle\mathbf{b}_n,\mathbf{x}\rangle&=0.\end{aligned}\tag{4.6.6}$$

Если $\mathbf{x}$ должен удовлетворять уравнению (4.6.6), а значит, $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$, то он должен быть одновременно ортогонален всем векторам $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, ..., $\mathbf{b}_n$. Но если ранг $\mathbf{A}$ равен n, то $\mathbf{b}_i$ являются линейно независимыми и «используют все имеющиеся n изме-

рений пространства». Нельзя найти вектор, оротогональный всем $\mathbf{b}_i$. Однако если $\mathbf{A}$ имеет ранг $n-1$, то существует одно линейно зависимое соотношение между $\mathbf{b}_i$. Таким образом, одно из n измерений линейного векторного пространства «не занято и доступно» для $\mathbf{x}$. Подобным образом, если ранг $\mathbf{A}$ равен $n-2$, то «доступны» два измерения. Следовательно, существуют два линейно независимых вектора, удовлетворяющих уравнению (4.6.6). В общем случае, если $\mathbf{A}$ имеет дефект q, так что ранг $\mathbf{A}$ равен $n-q$, то q измерений линейного векторного пространства «доступны» для $\mathbf{x}$. Число линейно независимых решений однородной системы линейных уравнений равно q.

Приведенное выше рассмотрение соответствует случаю равенства уравнений и числа неизвестных. Если число неизвестных n превышает число уравнений m, то ранг $\mathbf{A}$ меньше n. В этом случае всегда существует нетривиальное решение. Если $m > n$, нетривиальное решение существует лишь тогда, если ранг $\mathbf{A}$ меньше n. В обоих случаях число линейно независимых решений равно $n-r$, где r (по предположению, меньше n) является рангом матрицы $\mathbf{A}$. Данные решения находятся согласно указанным выше трем этапам.

Векторы решения $\mathbf{x}$ в общем случае не являются ортогональными. Однако их можно ортогонализовать согласно процедуре Грама — Шмидта.

Пример 4.6.2. Решить

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0, \\ 6x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 &= 0, \\ 2x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} + x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Ранг матрицы коэффициентов равен двум, т. е. наивысший порядок ненулевого минора получается вычеркиванием первого и третьего столбцов и второй строки. Следовательно, система линейно независимых уравнений примет вид

$$\begin{aligned} 2x_2 + 3x_4 &= -4x_1 - x_3, \\ x_2 + x_4 &= -2x_1. \end{aligned}$$

На основе правила Крамера $x_2 = x_3 - 2x_1$ и $x_4 = -x_3$.

Так как x_1 и x_3 выбираются произвольно, то существует бесконечное множество решений. Однако только $q = 2$ из них являются независимыми. Например, пусть $x_1 = x_3 = 1$. Тогда $x_2 = x_4 = -1$. Таким образом, вектор решения равен

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{x}_1$ означает первый вектор решения. Подобным образом $x_1=1$, $x_3=2$ дают второй вектор решения

$$\mathbf{x}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\2\\-2\end{bmatrix}.$$

Так как определитель Грама

$$G=\begin{vmatrix}45\\59\end{vmatrix}\neq 0,$$

то $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ являются линейно независимыми. Дальнейший выбор $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ приводит к вектору $\mathbf{x}$, который не является линейно независимым от $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$. Например, при $x_1=2$, $x_3=3$ получаем вектор, равный сумме $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$.

Так как $\langle\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\rangle=5\neq 0$, $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ не являются взаимно ортогональными. Используя процедуру ортогонализации Грама — Шмидта, определим

$$\mathbf{x}_1'=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{x}_2'=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}-1\\5\\3\\-3\end{bmatrix};$$

здесь $\mathbf{x}_1'$ и $\mathbf{x}_2'$ взаимно ортогональны.

Нормализация $\mathbf{x}_1'\left(\|\mathbf{x}_1'\|=2\right)$ и $\mathbf{x}_2'\left(\|\mathbf{x}_2'\|=\frac{\sqrt{11}}{2}\right)$ приводит к ортонормированному решению

$$\hat{\mathbf{x}}_1'=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \hat{\mathbf{x}}_2'=\frac{1}{2\sqrt{11}}\begin{bmatrix}-1\\5\\3\\-3\end{bmatrix}.$$

В том, что $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_1'$, $\mathbf{x}_2'$, $\hat{\mathbf{x}}_1'$ и $\hat{\mathbf{x}}_2'$ все служат решениями исходных уравнений, можно убедиться непосредственной подстановкой.

Особенно полезен специальный случай однородных систем с рангом матрицы коэффициентов, равным $n-1$. При этом можно найти одно независимое решение, так как $q=1$. Можно показать, что неизвестные пропорциональны алгебраическим дополнениям коэффициентов в произвольной ненулевой строке матрицы коэффициентов*). Таким образом, решение задается формулой

$$x_j=kC_{ij} \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{4.6.7}$$

где k — произвольная скалярная величина, а i принимает значения $1, 2, \ldots, n$.

---

*) Сравните уравнения (4.3.6) $\sum_{j=1}^{n} a_{kj}C_{ij}=|\mathbf{A}|\,\delta_{ik}$ и (4.6.2) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=y_i$ при условии $|\mathbf{A}|=y_i=0$, $i=1, 2, \ldots, n$.

Пример 4.6.3. Решить однородную систему

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= 0, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 \qquad &= 0, \\ 2x_1 + x_2 \qquad + x_4 &= 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Ранг матрицы коэффициентов равен 3. Следовательно, неизвестные пропорциональны алгебраическим дополнениям какой-либо строки матрицы коэффициентов. Вычисляя C_{4j}, имеем

$$C_{41} = -\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$C_{42} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -10,$$

$$C_{43} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4,$$

$$C_{44} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 14.$$

Решение этой системы уравнений равно

$$x_1 = -k, \quad x_2 = -5k, \quad x_3 = -2k, \quad x_4 = 7k.$$

Эти уравнения содержат одно независимое решение, на которое умножаются скалярные величины.

Случай зависимых неоднородных уравнений. Общая процедура решения однородных уравнений может использоваться и в случае неоднородных уравнений, если их число меньше числа неизвестных. Такая система имеет вид

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= y_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= y_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= y_m, \end{aligned} \tag{4.6.8}$$

где $m < n$. Данные уравнения приводятся к однородным:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + y_1x_{n+1} &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + y_2x_{n+1} &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + y_mx_{n+1} &= 0. \end{aligned} \tag{4.6.9}$$

Уравнения (4.6.9) решаются на основе описанной для однородных уравнений процедуры. Решение уравнений (4.6.8) можно получить, полагая x_{n+1} равным -1. Если в свою очередь уравнения (4.6.9) имеют решение лишь при $x_{n+1}=0$, то уравнения (4.6.8) решения не имеет. Следовательно, уравнения (4.6.8) имеют решение только в том случае, если матрица коэффициентов уравнений (4.6.8) и матрица коэффициентов уравнения (4.6.9), называемая *расширенной матрицей*, имеют одинаковый ранг.

Пример 4.6.4. Решить систему уравнений:

$$\begin{aligned} x_1+2x_2-3x_3-4x_4&=6,\\ x_1+3x_2+x_3-2x_4&=4,\\ 2x_1+5x_2-2x_3-5x_4&=10. \end{aligned}$$

Матрица коэффициентов и расширенная матрица имеют ранг 3; значит, система уравнений обладает решением. Квадратная матрица, полученная путем устранения третьего столбца, имеет отличный от нуля определитель. Эту систему уравнений можно записать так:

$$\begin{aligned} x_1+2x_2-4x_4&=6+3x_3,\\ x_1+3x_2-2x_4&=4-x_3,\\ 2x_1+5x_2-5x_4&=10+2x_3. \end{aligned}$$

Определитель новой матрицы коэффициентов равен единице. Значит,

$$x_1=\begin{vmatrix} (6+3x_3) & 2 & -4\\ (4-x_3) & 3 & -2\\ (10+2x_3) & 5 & -5 \end{vmatrix}=10+11x_3,$$

$$x_2=\begin{vmatrix} 1 & (6+3x_3) & -4\\ 1 & (4-x_3) & -2\\ 2 & (10+2x_3) & -5 \end{vmatrix}=-2-4x_3$$

и

$$x_4=\begin{vmatrix} 1 & 2 & (6+3x_3)\\ 1 & 3 & (4-x_3)\\ 2 & 5 & (10+2x_3) \end{vmatrix}=0.$$

Так как x_3 является произвольной величиной, то решение имеет вид

$$\begin{aligned} x_1&=10+11c,\\ x_2&=-2-4c,\\ x_3&=c,\\ x_4&=0, \end{aligned}$$

где c — произвольная постоянная.

Пример 4.6.5. Решить систему уравнений:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2&=y_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2&=y_2 \end{aligned}$$

для следующих случаев:

а) неоднородная система уравнений, т. е. $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$;

б) однородная система уравнений, т. е. $\mathbf{y} = \mathbf{0}$;

в) зависимые неоднородные уравнения, т. е. $a_{21} = a_{22} = y_2 = 0$.

Предполагая, что $a_{12} \neq 0 \neq a_{22}$, уравнения можно записать в виде

$$x_2 = -\frac{a_{11}}{a_{12}} x_1 + \frac{y_1}{a_{12}},$$

$$x_2 = -\frac{a_{21}}{a_{22}} x_1 + \frac{y_2}{a_{22}}.$$

Эти уравнения можно представить на плоскости x_1x_2, как показано на рис. 4.6.1. Как указано далее, такое представление помогает детально разобраться в материале данного параграфа.

а) *Неоднородная система уравнений.* В этом случае возможны два варианта. Если $|\mathbf{A}| = 0$, то $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$, или

$$-\frac{a_{11}}{a_{12}} = -\frac{a_{21}}{a_{22}}.$$

Поэтому наклоны двух прямых на рис. 4.6.1 равны, т. е. прямые параллельны. Следовательно, прямые не пересекаются, и вектор решения не существует.

Если $|\mathbf{A}| \neq 0$, прямые пересекаются в одной и только в одной точке, давая решение

$$x_1 = \frac{y_1a_{22} - y_2a_{12}}{|\mathbf{A}|},$$

$$x_2 = \frac{y_2a_{11} - y_1a_{21}}{|\mathbf{A}|}.$$

Это и будут составляющие вектора решения.

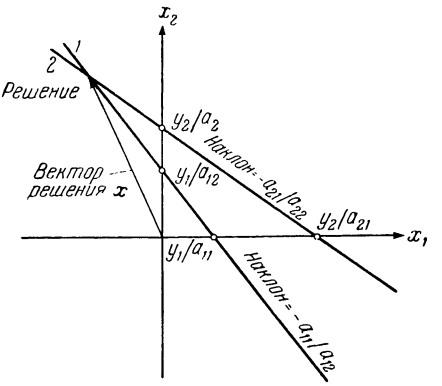


Рис. 4.6.1.

б) *Однородная система уравнений.* Снова возможны два варианта. Так как $y_1 = y_2 = 0$, то обе прямые проходят через начало координат. Если их наклоны не равны, т. е. если $|\mathbf{A}| \neq 0$, то существует единственное решение. Это тривиальное решение $x_1 = x_2 = 0$.

Если $|\mathbf{A}| = 0$ и $q = 1$, то наклоны обеих прямых равны; значит, прямые совпадают и произвольная точка на прямых является решением. Так как уравнение совпадающих прямых равно $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$, то единственное независимое решение задается в виде

$$\frac{x_2}{x_1} = -\frac{a_{11}}{a_{12}} = -\frac{a_{21}}{a_{22}}.$$

Согласно обозначениям параграфа $n = 2$ и $r = 1$. Следовательно, опуская одно из исходных уравнений, получим решения

$$x_2 = -\frac{a_{11}}{a_{12}} x_1$$

или

$$x_2 = -\frac{a_{21}}{a_{22}} x_1,$$

которые равны.

Заметим, что

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{bmatrix}.$$

Эти векторы линейно зависимы и, следовательно, параллельны. Решение $\mathbf{x}$ ортогонально как $\mathbf{b}_1$, так и $\mathbf{b}_2$.

в) Зависимые неоднородные уравнения. Уравнение имеет вид $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = y_1$. Его можно записать в виде однородного уравнения $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + x_3y_1 = 0$. Чтобы решить это однородное уравнение, запишем его в форме $a_{12}x_2 = -a_{11}x_1 - x_3y_1$. Его решение

$$x_2 = -\frac{a_{11}}{a_{12}} x_1 - x_3 \frac{y_1}{a_{12}}$$

представляет собой уравнение плоскости в трехмерном пространстве. Любая точка, лежащая на плоскости, является решением. В частности, вдоль прямой на плоскости при $x_3 = -1$ решение равно

$$x_2 = -\frac{a_{11}}{a_{12}} x_1 + \frac{y_1}{a_{12}}.$$

Любая точка, лежащая на этой прямой, служит решением. Конечно, в этом простом случае данное уравнение — не что иное, как переписанное в ином виде исходное уравнение.

§ 4.7. Характеристические числа и характеристические векторы *)

Тема характеристических уравнений (чисел) и характеристических векторов чрезвычайно важна, так как от характеристических значений системы зависят ее динамические свойства. Читателю необходимо усвоить данную тему, так как на решении задач о характеристических значениях основывается множество задач анализа и синтеза систем.

Рассмотрим векторное уравнение

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{4.7.1}$$

где $\mathbf{y}$ и $\mathbf{x}$ — векторы-столбцы, а $\mathbf{A}$ — квадратная матрица размерности $(n \times n)$. Данное уравнение можно трактовать как преобразование вектора $\mathbf{x}$ в вектор $\mathbf{y}$. Возникает вопрос, существует ли вектор $\mathbf{x}$, который в результате преобразования $\mathbf{A}$ переходит в вектор $\mathbf{y}$, имеющий такое же направление в векторном пространстве, как и вектор $\mathbf{x}$. Если такой вектор $\mathbf{x}$ существует, то $\mathbf{y}$ пропорционален $\mathbf{x}$, или

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \tag{4.7.2}$$

*) Вместо терминов характеристические числа и характеристические векторы часто употребляются соответственно термины собственные значения и собственные векторы.

где λ — скаляр, являющийся коэффициентом пропорциональности. Эта задача известна как задача о характеристических числах, а значение λ, например, λ_i, для которого уравнение (4.7.2) имеет решение $\mathbf{x}_i \neq \mathbf{0}$, называется *характеристическим числом* **A**. Соответствующий вектор решения $\mathbf{x}_i \neq \mathbf{0}$ называется *характеристическим вектором* **A**, порождаемым данным характеристическим значениям λ_i.

Уравнение (4.7.2) можно записать в виде системы однородных линейных уравнений

$$\begin{aligned}
&(a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0,\\
&a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn}-\lambda)x_n = 0,
\end{aligned}$$

или

$$[\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}]\,\mathbf{x} = \mathbf{0}. \tag{4.7.3}$$

Данная система однородных уравнений имеет нетривиальное решение в том и только том случае, когда определитель матрицы коэффициентов равен нулю, т. е. если

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0. \tag{4.7.4}$$

Характеристическое уравнение. Многочлен n-й степени относительно λ, определяемый уравнением (4.7.4), называется *характеристическим уравнением* матрицы **A**. Общий вид этого уравнения

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \tag{4.7.5}$$

Корни характеристического уравнения в точности равны характеристическим значениям **A**. Говорят, что **A** имеет *различные* корни, если характеристические значения **A** разные. Если характеристическое значение встречается m раз, то говорят, что оно является корнем кратности m. В случае характеристического корня вида $\alpha + j\beta$ говорят, что корень *комплексный*. При действительных элементах матрицы **A** комплексные корни должны быть комплексно сопряженными.

Особый интерес представляют коэффициенты характеристического уравнения (4.7.5) a_1 и a_n. Положив λ равным нулю, имеем

$$P(0) = |-\mathbf{A}| = a_n. \tag{4.7.6}$$

Следовательно,

$$a_n = (-1)^n |\mathbf{A}|. \tag{4.7.7}$$

Если многочлен $P(\lambda)$ записать в виде произведения сомножителей (характеристические числа предполагаются различными), т. е.

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_n)$$

и снова положить λ равным нулю, то получим

$$P(0) = (-1)^n |\mathbf{A}| = (-1)^n (\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n),$$

или

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \ldots \lambda_n = |\mathbf{A}|. \tag{4.7.8}$$

Произведение характеристических чисел равно определителю матрицы $\mathbf{A}$. Отметим, что в случае равенства нулю какого-либо из характеристических чисел матрица $\mathbf{A}$ — особенная. Раскрывая характеристическое уравнение, записанное в виде произведения сомножителей, можно выразить коэффициенты при различных степенях λ через характеристические числа. Например, коэффициент при λ^{n-1} равен

$$a_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n.$$

Раскрывая также определитель $|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}|$, найдем, что коэффициент при λ^{n-1} равен со знаком минус сумме диагональных элементов $\mathbf{A}$, т. е.

$$a_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n) = -(a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}). \tag{4.7.9}$$

Таким образом, сумма диагональных элементов квадратной матрицы равна сумме ее характеристических чисел. В виду важности этого свойства сумме диагональных элементов матрицы присвоено особое название, а именно — *след* матрицы.

Поэтому приведенное выше записывается как

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = \text{следу } \mathbf{A} = \operatorname{Tr}[a_{ij}] = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}. \tag{4.7.10}$$

Обозначив след $\mathbf{A}^k$ (матрицы $\mathbf{A}$, умноженной k раз на себя) через T_k, можно записать полезную рекуррентную формулу, выражающую коэффициенты характеристического уравнения через различные T_k, так:

$$\begin{aligned} a_1 &= -T_1, \\ a_2 &= -\frac{1}{2}(a_1 T_1 + T_2), \\ a_3 &= -\frac{1}{3}(a_2 T_1 + a_1 T_2 + T_3), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n &= -\frac{1}{n}(a_{n-1} T_1 + a_{n-2} T_2 + \ldots + a_1 T_{n-1} + T_n). \end{aligned} \tag{4.7.11}$$

Это формула позволяет различным образом определить характеристическое уравнение (4.7.4) *). В частности, она весьма эффективна, если нахождение коэффициентов характеристического уравнения производится на вычислительной машине.

*) Данная формула известна как формула Бохера [4].

Пример 4.7.1. Найти характеристическое уравнение матрицы **A**, где

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

На основе формулы Бохера

$$a_1=-T_1=-(2+1-1)=-2.$$

Произведение матрицы **A** на себя дает

$$\mathbf{A}^2=\begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 7 \end{bmatrix},$$

откуда $a_2=-\frac{1}{2}(a_1T_1+T_2)=-5$. Подобным образом

$$\mathbf{A}^3=\begin{bmatrix} 14 & -4 & 17 \\ 13 & 3 & 11 \\ 13 & 11 & 3 \end{bmatrix},$$

так что $a_3=-\frac{1}{3}(a_2T_1+a_1T_2+T_3)=6$. Следовательно, характеристический многочлен равен

$$\lambda^3+2\lambda^2-5\lambda+6=(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-3)=0.$$

Характеристические числа $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-2$ и $\lambda_3=3$.

Модальная матрица. Для каждого из n характеристических чисел λ_i $(i=1,2,\ldots,n)$ матрицы **A** (предполагается, что корни уравнения (4.7.4) различны) можно получить решение уравнения (4.7.3) относительно **x**. Векторы $\mathbf{x}_i$, представляющие решения системы уравнений

$$[\lambda_i\mathbf{I}-\mathbf{A}]\mathbf{x}_i=0 \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{4.7.12}$$

являются характеристическими векторами **A**. Так как уравнение (4.7.12) однородное, то $k_i\mathbf{x}_i$, где k_i — произвольная скалярная величина, также служит решением. Поэтому уравнение (4.7.12) определяет однозначно лишь направление каждого из $\mathbf{x}_i$. Матрица, образованная векторами-столбцами $k_i\mathbf{x}_i$, называется *модальной матрицей* *). При различных характеристических числах столбцы модальной матрицы могут выбираться равными или пропорциональными произвольному столбцу $\operatorname{Adj}[\lambda_i\mathbf{I}-\mathbf{A}]$. Это основывается на том факте, что $[\lambda_i\mathbf{I}-\mathbf{A}]$ имеет ранг $n-1$. Согласно уравнению (4.7.4) ранг матрицы должен быть меньше n. Однако он не может быть меньше $n-1$,

*) Использование термина «mode» (частота) обусловлено тем, что, как следует из последующих глав, описывающие динамику линейной системы так называемые «частоты» системы могут быть выражены в виде составляющих движения вдоль характеристических векторов.

так как при этом равнялись бы нулю все $(n-1)$ миноров строки определителя $|\lambda_i\mathbf{I}-\mathbf{A}|$. Это в свою очередь требует (см. уравнение (4.3.8)), чтобы

$$\frac{d}{d\lambda}\{|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}|\}_{\lambda=\lambda_i}=0,$$

откуда следует, что λ_i является кратным корнем уравнения (4.7.4). Но это противоречит предположению о том, что характеристические числа различны. Таким образом, $[\lambda_i\mathbf{I}-\mathbf{A}]$ имеет ранг $n-1$ и на основе уравнений (4.6.7) или (4.4.1) следует пропорциональность столбцов модальной матрицы *произвольному* ненулевому столбцу $\operatorname{Adj}[\lambda_i\mathbf{I}-\mathbf{A}]$. В виду линейной зависимости столбцов $\operatorname{Adj}[\lambda_i\mathbf{I}-\mathbf{A}]$ для данного λ_i выбор каждого λ_i определяет только один столбец модальной матрицы.

Пример 4.7.2. Найти характеристические числа и модальную матрицу, соответствующую матрице $\mathbf{A}$, где

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & -2 & 3\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & -1\end{bmatrix}.$$

На основе уравнения (4.7.4) характеристическое уравнение равно

$$\begin{vmatrix}\lambda-2 & 2 & -3\\ -1 & \lambda-1 & -1\\ -1 & -3 & \lambda+1\end{vmatrix}=0=\lambda^3-2\lambda^2-5\lambda+6=(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-3).$$

Характеристические числа $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-2$ и $\lambda_3=3$.

Присоединенная матрица равна

$$\operatorname{Adj}[\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}]=\begin{bmatrix}(\lambda^2-4) & (-2\lambda+7) & (3\lambda-5)\\ (\lambda+2) & (\lambda^2-\lambda-5) & (\lambda+1)\\ (\lambda+2) & (3\lambda-8) & (\lambda^2-3\lambda+4)\end{bmatrix}.$$

При $\lambda_1=1$ присоединенная матрица равна

$$\begin{bmatrix}-3 & 5 & -2\\ 3 & -5 & 2\\ 3 & -5 & 2\end{bmatrix}.$$

При $\lambda_2=-2$ присоединенная матрица равна

$$\begin{bmatrix}0 & 11 & -11\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -14 & 14\end{bmatrix}.$$

При $\lambda_3=3$ присоединенная матрица равна

$$\begin{bmatrix}5 & 1 & 4\\ 5 & 1 & 4\\ 5 & 1 & 4\end{bmatrix}.$$

Так как характеристические векторы единственным образом определяют только направление, то, будучи умноженными на какую-либо скалярную величину, эти векторы по-прежнему удовлетворяют уравнению (4.7.12). Следовательно, модальная матрица имеет вид

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix} -1 & 11 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -14 & 1 \end{bmatrix}.$$

Каждый столбец данной модальной матрицы служит характеристическим вектором в одномерном векторном пространстве. Три столбца модальной матрицы образуют базис в соответствующем трехмерном пространстве.

Выше рассматривалась модальная матрица при различных характеристических числах $\mathbf{A}$. В случае кратных характеристических чисел и несимметрической $\mathbf{A}$ определение независимых модальных столбцов не очевидно. Причина состоит в том, что не существует однозначного соответствия между порядком кратности корня характеристического уравнения и дефектом соответствующей характеристической матрицы $[\lambda_i\mathbf{I}-\mathbf{A}]$.

Если λ_i — кратный корень порядка p, то дефект характеристической матрицы не может быть больше p и размерность векторного пространства, порождаемого соответствующими $\mathbf{x}_i$ не превзойдет p. Задача возникает, когда кратность корня λ_i равна p, а дефект q матрицы $[\lambda_i\mathbf{I}-\mathbf{A}]$ меньше p. Можно найти только $q<p$ линейно независимых решений уравнения (4.7.12). Размерность порождаемого $\mathbf{x}_i$ векторного пространства меньше p и поэтому нельзя получить p линейно независимых характеристических векторов, соответствующих λ_i.

Только когда матрицы $\mathbf{A}(n\times n)$ *симметрическая*, дефект $[\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}]$ при корне кратности p в точности равна p, так что можно найти p линейно независимых характеристических векторов.

В случае равенства дефекта $[\lambda_i\mathbf{I}-\mathbf{A}]$ единице (простая вырожденность) модальный столбец может выбираться пропорциональным любому ненулевому столбцу $\operatorname{Adj}[\lambda_i\mathbf{I}-\mathbf{A}]$. Это единственный столбец, который можно получить для системы из p равных корней. В случае равенства дефекта $[\lambda_i\mathbf{I}-\mathbf{A}]$ величине $q>1$ матрица $\operatorname{Adj}[\lambda_i\mathbf{I}-\mathbf{A}]$ и все ее производные, включая

$$\frac{d^{q-2}}{d\lambda^{q-2}}\{\operatorname{Adj}[\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}]\}_{\lambda=\lambda_i},$$

суть нулевые матрицы*). q различных линейно независимых решений для модальных столбцов можно получить из столбцов дифференцированных ненулевых присоединенных матриц. Например при $q=p$ (так называемая «полная вырожденность»), p

*) Доказательство этого можно найти в [5].

различных модальных столбцов можно получить из ненулевых столбцов

$$\frac{d^{p-1}}{d\lambda^{p-1}}\{\mathrm{Adj}\,[\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}]\}_{\lambda=\lambda_i}.$$

Эту матрицу (называемую производной или дифференцированной присоединенной) ранга p можно представить в виде произведения матриц **CB**, где p столбцов прямоугольной матрицы **C** и p строк прямоугольной матрицы **B** — линейно независимы; p столбцов **C** можно выбрать в качестве требуемых модальных столбцов [6].

Пример 4.7.3. Найти характеристические векторы данных матриц **A**.

Кратные характеристические корни и простая вырожденность

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & -3 & 3\end{bmatrix}.$$

Корни характеристического уравнения $|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}|=0$ равны 1, 1, 1 — три единичных корня. Однако дефект характеристической матрицы

$$[\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}]_{\lambda=1}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & 3 & -2\end{bmatrix}$$

равен единице. Следовательно, существует только один модальный столбец, соответствующий корню кратности три. Так как

$$\mathrm{Adj}\,[\lambda_i\mathbf{I}-\mathbf{A}]_{\lambda_i=1}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & -2 & 1\end{bmatrix},$$

то единственный линейно независимый характеристический вектор равен

$$\mathbf{x}_1=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}.$$

Он может образовать лишь одномерное пространство.

Определение двух дополнительных векторов для рассматриваемого случая производится в следующем параграфе.

Кратные характеристические корни и многократная вырожденность

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad [\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}]=\begin{bmatrix}\lambda-2 & -1 & -1\\ -1 & \lambda-2 & -1\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{bmatrix}.$$

Характеристические числа матрицы равны 1, 1, 3 — два корня $\lambda=1$ и один корень $\lambda=3$. Дефект $[\lambda_i\mathbf{I}-\mathbf{A}]$ для $\lambda_i=1$ равен двум. Так как характеристическая матрица «полностью вырождена», то возможно получение линейно независимого вектора решения для каждого из кратных корней.

Присоединенная матрица равна

$$\operatorname{Adj}[\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}]=\begin{bmatrix}(\lambda-2)(\lambda-1) & (\lambda-1) & (\lambda-1)\\ (\lambda-1) & (\lambda-2)(\lambda-1) & (\lambda-1)\\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda-3)\end{bmatrix}.$$

Подстановка $\lambda_i=1$ в любой столбец присоединенной матрицы делает его нулевым. Первая производная от присоединенной матрицы равна

$$\frac{d}{d\lambda}\{\operatorname{Adj}[\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}]\}=\begin{bmatrix}2\lambda-3 & 1 & 1\\ 1 & 2\lambda-3 & 1\\ 0 & 0 & 2\lambda-4\end{bmatrix}.$$

Вычисление этой матрицы при $\lambda=1$ дает

$$\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Следовательно, два модальных столбца, соответствующие кратному корню $\lambda=1$, представляются в виде

$$\mathbf{x}_1=\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\quad \mathbf{x}_2=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ -2\end{bmatrix}.$$

Характеристический вектор или модальный столбец для $\lambda_i=3$ может выбираться пропорционально произвольному ненулевому столбцу матрицы $\mathbf{Adj}[\lambda_i\mathbf{I}-\mathbf{A}]$, откуда

$$\mathbf{x}_3=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}.$$

Тогда полная модальная матрица равна

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 0\end{bmatrix}.$$

Симметрические матрицы. Случай действительной симметрической матрицы **A** настолько часто встречается в линейных электрических цепях, что изучение вида характеристических чисел и характеристических векторов для таких матриц заслуживает особого внимания.

Основное свойство действительной симметрической матрицы состоит в том, что ее характеристические числа должны быть действительными. Это можно показать, предполагая, что характеристические числа комплексные. Тогда они, а также и характеристические векторы, должны быть комплексно сопряженными.

Следовательно, $\lambda\mathbf{x}=\mathbf{A}\mathbf{x}$ и $\lambda^*\mathbf{x}^*=\mathbf{A}\mathbf{x}^*$. Умножение первого уравнения слева на $\mathbf{x}^{*T}$, а транспонированного второго уравнения справа на $\mathbf{x}$ дает $\lambda\langle\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle=\langle\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{x}\rangle$ и $\lambda^*\langle\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle=\langle\mathbf{x}, \mathbf{A}^T\mathbf{x}\rangle$. Учитывая, что для симметрической матрицы $\mathbf{A}=\mathbf{A}^T$, из данных уравнений следует

$$(\lambda-\lambda^*)\langle\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle=0.$$

Так как $\langle\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle\neq 0$, то $\lambda=\lambda^*$ и, значит, характеристические значения являются действительными.

Второе свойство действительных симметрических матриц состоит в том, что их характеристические векторы образуют ортогональную систему. Пусть λ_1 и λ_2 — два различных характеристические числа, которым отвечают характеристические векторы $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$. Тогда $\lambda_1\mathbf{x}_1=\mathbf{A}\mathbf{x}_1$ и $\lambda_2\mathbf{x}_2=\mathbf{A}\mathbf{x}_2$. Если первое из указанных соотношений транспонировать и умножить справа на $\mathbf{x}_2$, то

$$\lambda_1\mathbf{x}_1^T\mathbf{x}_2=\mathbf{x}_1^T\mathbf{A}^T\mathbf{x}_2=\mathbf{x}_1^T\mathbf{A}\mathbf{x}_2. \tag{4.7.13}$$

Умножая второе соотношение слева на $\mathbf{x}_1^T$, получим

$$\lambda_2\mathbf{x}_1^T\mathbf{x}_2=\mathbf{x}_1^T\mathbf{A}\mathbf{x}_2.$$

Если уравнение (4.7.13) вычесть из этого выражения, то

$$(\lambda_2-\lambda_1)\langle\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\rangle=0. \tag{4.7.14}$$

Из предположения $\lambda_1\neq\lambda_2$ следует, что

$$\langle\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\rangle=0. \tag{4.7.15}$$

Уравнение (4.7.15) показывает, что характеристические векторы симметрической матрицы образуют ортогональную систему. Если матрица содержит n различных характеристических чисел, то соответствующие им векторы образуют в n-мерном пространстве ортогональный базис. Более того, можно показать, что если симметрическая матрица имеет характеристическое число λ_i кратности p, то с ним связаны p линейно независимых характеристических векторов. Как отмечалось ранее, для несимметрической матрицы это в общем случае несправедливо.

Подобным образом можно показать, что характеристические числа эрмитовой матрицы являются действительными, а характеристические векторы ортогональны, так что

$$\langle\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\rangle=\mathbf{x}_1^{*T}\mathbf{x}_2=0.$$

Пример 4.7.4. Показать, что характеристические векторы симметрической матрицы $\mathbf{A}$ ортогональны. Пусть

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 2 & 0\end{bmatrix}.$$

Характеристическое уравнение равно $\lambda^2+3\lambda-4=0$. Его характеристические числа $\lambda_1=1$ и $\lambda_2=-4$. Присоединенная матрица имеет вид

$$\mathbf{Adj}\,[\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}]=\begin{bmatrix}\lambda & 2\\ 2 & \lambda+3\end{bmatrix}$$

Соответствующая система характеристических векторов равна

$$\mathbf{x}_1=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\quad\text{и}\quad\mathbf{x}_2=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}.$$

Очевидно, что $\langle\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\rangle=0$.

Диагонализация квадратной матрицы. Рассмотрим случай *неособенной* модальной матрицы $\mathbf{M}$, так что существует обратная матрицы $\mathbf{M}^{-1}$ *). При этом ограничении решения уравнения (4.7.12) можно объединить, образуя единое уравнение:

$$\begin{bmatrix}\lambda_1x_{11} & \lambda_2x_{12} & \dots & \lambda_nx_{1n}\\ \lambda_1x_{21} & \lambda_2x_{22} & \dots & \lambda_nx_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \lambda_1x_{n1} & \lambda_2x_{n2} & \dots & \lambda_nx_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n}\\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn}\end{bmatrix}\tag{4.7.16}$$

или

$$\mathbf{M\Lambda}=\mathbf{AM},$$

где

$$\mathbf{\Lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

— диагональная матрица, составленная из характеристических чисел $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$. Ввиду существования обратной матрицы $\mathbf{M}^{-1}$ диагональная матрица $\mathbf{\Lambda}$ находится умножением слева обеих частей уравнения (4.7.16) на $\mathbf{M}^{-1}$. Имеем

$$\mathbf{\Lambda}=\mathbf{M}^{-1}\mathbf{AM}.\tag{4.7.17}$$

Более высокие степени $\mathbf{A}$ приводятся к диагональному виду таким же способом. Например,

$$\mathbf{\Lambda}^2=(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{AM})(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{AM})=\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}^2\mathbf{M}.\tag{4.7.18}$$

---

*) Это соответствует случаю, когда характеристические числа различные или когда матрица $\mathbf{A}$ симметрическая [7].

Преобразование вида $\mathbf{B}=\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}$, где $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — квадратные матрицы, а $\mathbf{Q}$ — неособенная квадратная матрица, называется *коллинеарным преобразованием* или *преобразованием подобия*. Более подробно об этом говорится в следующем параграфе, при рассмотрении различных видов преобразований.

Значение этого преобразования становится очевидным при исследовании системы линейных уравнений (4.6.2) $\mathbf{y}=\mathbf{A}\mathbf{x}$. При введении преобразования $\mathbf{x}=\mathbf{M}\mathbf{q}$ уравнение (4.6.2) записывается в виде

$$\mathbf{y}=\mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{q}. \tag{4.7.19}$$

Умножение слева обеих частей уравнения (4.7.19) на $\mathbf{M}^{-1}$ дает

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{y}=\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{q}=\Lambda\mathbf{q}. \tag{4.7.20}$$

Положив $\mathbf{z}=\mathbf{M}^{-1}\mathbf{y}$, имеем

$$\mathbf{z}=\Lambda\mathbf{q}, \tag{4.7.21}$$

или

$$\begin{aligned} z_1 &= \lambda_1 q_1, \\ z_2 &= \lambda_2 q_2, \\ &\cdots \\ z_n &= \lambda_n q_n. \end{aligned}$$

В новой системе координат $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n$ описываемая уравнением (4.7.21) система уравнений развязана. Отметим, что координаты q_i лежат на характеристических векторах или их продолжениях. Эти координаты называются *нормальными координатами системы*. В результате преобразования к нормальным координатам характеристические числа, а значит, и частоты системы не связаны между собой. В связи с этим матрица $\mathbf{M}$ и называется *модальной матрицей* *). Подход к характеристическим векторам как развязывающим координаты системы образует основу частотной интерпретации линейных систем.

Столбцы модальной матрицы $\mathbf{M}$ образуют базис, а строки $\mathbf{M}^{-1}$ образуют двойственный базис в исходном пространстве. Если столбцы модальной матрицы обозначить через $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$, а двойственный базис обозначить через $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n$, то произвольный вектор $\mathbf{y}$ выражается в виде

$$\mathbf{y}=\langle\mathbf{r}_1, \mathbf{y}\rangle\mathbf{u}_1+\langle\mathbf{r}_2, \mathbf{y}\rangle\mathbf{u}_2+\ldots+\langle\mathbf{r}_n, \mathbf{y}\rangle\mathbf{u}_n. \tag{4.7.22}$$

---

*) См. примечание на стр. 249. (*Прим. перев.*)

Для иллюстрации эквивалентности этого представления и использования нормальных координат рассмотрим

$$\mathbf{y} = \mathbf{M}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{y} = [\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2 \ldots \mathbf{u}_n]\,\mathbf{M}^{-1}\mathbf{y} =$$

$$= [\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2 \ldots \mathbf{u}_n]\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = z_1\mathbf{u}_1 + z_2\mathbf{u}_2 + \ldots + z_n\mathbf{u}_n.$$

Из сравнения этого выражения с уравнением (4.7.22) очевидно, что $z_i = \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{y}\rangle$, и, следовательно, строки $\mathbf{M}^{-1}$ образуют двойственный базис.

К этому можно было бы прийти из признания того факта, что если модальные столбцы $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ образуют базис, то согласно определению двойственного базиса $\langle \mathbf{r}_i, \mathbf{u}_j\rangle = \delta_{ij}$ строки $\mathbf{M}^{-1}$ должны образовывать двойственный базис, т. е. $\mathbf{M}\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{I}$. Однако приведенное выше замечание весьма поучительно, так как читатель встретится в литературе с обеими формами. Некоторые авторы предпочитают представление вектора в виде скалярных произведений, в то время как другие пользуются нормальными координатами. Читатель должен сознавать, что обе формы приводят к тождественным результатам. Представление в виде скалярного произведения более наглядно с точки зрения геометрической интерпретации, позволяет, по-видимому, лучше почувствовать результат. Форма нормальных координат несколько более компактна и обычно используется при доказательствах и преобразованиях. Это станет очевидным при рассмотрении в главе [5] динамики линейных систем.

Пример 4.7.5. Показать, что во всех приводимых ниже случаях произведение $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}$ является диагональной матрицей с элементами, равными собственным значениям

Различные корни (см. пример 4.7 2)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} -1 & 11 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -14 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{30}\begin{bmatrix} -15 & 25 & -10 \\ 0 & 2 & -2 \\ 15 & 3 & 12 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Кратные корни и многократная вырожденность (см. пример 4.7.3)

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\0&0&1\end{bmatrix},\quad \mathbf{M}=\begin{bmatrix}-1&1&1\\1&1&1\\0&-2&0\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&1&0\\0&0&-1\\1&1&1\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{bmatrix}.$$

Эта процедура приводит к диагональной форме в том случае, когда дефект характеристической матрицы $[\lambda_i\mathbf{I}-\mathbf{A}]$ равен порядку корня. В противном случае подобная процедура приводит к более общей форме Жордана, обсуждаемой в следующем параграфе.

Пример 4.7.6. Для заданного линейного преобразования показать, что столбцы $\mathbf{M}$ образуют базис, а строки $\mathbf{M}^{-1}$ образуют двойственный базис.

Выразить $\mathbf{y}$ через характеристические векторы, где

$$\mathbf{y}=\begin{bmatrix}0&1\\-2&-3\end{bmatrix}\mathbf{x}.$$

Характеристическое уравнение $|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}|=0$ будет тогда равно

$$\lambda^2+3\lambda+2=0.$$

Корни этого уравнения $\lambda_1=-1$ и $\lambda_2=-2$. Присоединенная матрица равна

$$\operatorname{Adj}[\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}]=\begin{bmatrix}\lambda+3&1\\-2&\lambda\end{bmatrix}.$$

Характеристические векторы суть

$$\mathbf{x}_1=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\quad\text{и}\quad \mathbf{x}_2=\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}.$$

Нормированная система характеристических векторов равна

$$\mathbf{u}_1=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{bmatrix}\quad\text{и}\quad \mathbf{u}_2=\begin{bmatrix}1/\sqrt{5}\\-2/\sqrt{5}\end{bmatrix}.$$

Модальная матрица

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}&1/\sqrt{5}\\-1/\sqrt{2}&-2/\sqrt{5}\end{bmatrix}.$$

Обратная модальная матрица равна

$$\mathbf{M}^{-1}=\begin{bmatrix}2\sqrt{2}&\sqrt{2}\\-\sqrt{5}&-\sqrt{5}\end{bmatrix}.$$

Заметим, что строки $\mathbf{M}^{-1}$ образуют двойственный базис:

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} -\sqrt{5} \\ -\sqrt{5} \end{bmatrix},$$

так что

$$\langle \mathbf{r}_1, \mathbf{u}_1 \rangle = 1, \quad \langle \mathbf{r}_2, \mathbf{u}_1 \rangle = 0,$$
$$\langle \mathbf{r}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{r}_2, \mathbf{u}_2 \rangle = 1.$$

Вектор $\mathbf{y}$ выражается через вектор $\mathbf{x}$ в виде

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -2x_1 - 3x_2 \end{bmatrix}.$$

Если в качестве базиса использовать характеристические векторы $\mathbf{u}_i$, то вектор $\mathbf{y}$ можно представить как

$$\mathbf{y} = \langle \mathbf{r}_1, \mathbf{y} \rangle \mathbf{u}_1 + \langle \mathbf{r}_2, \mathbf{y} \rangle \mathbf{u}_2 = \mathbf{M}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{y} = [\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2]\, \mathbf{M}^{-1}\mathbf{y} =$$
$$= (2\sqrt{2}\, y_1 + \sqrt{2}\, y_2)\, \mathbf{u}_1 + (-\sqrt{5}\, y_1 - \sqrt{5}\, y_2)\, \mathbf{u}_2 =$$
$$= (-2\sqrt{2}\, x_1 - \sqrt{2}\, x_2)\, \mathbf{u}_1 + (2\sqrt{5}\, x_1 + 2\sqrt{5}\, x_2)\, \mathbf{u}_2.$$

Заметим, что подстановка $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ приводит к

$$y_1 = (-2\sqrt{2}\, x_1 - \sqrt{2}\, x_2)(1/\sqrt{2}) + (2\sqrt{5}\, x_1 + 2\sqrt{5}\, x_2)(1/\sqrt{5}) = x_2,$$
$$y_2 = (-2\sqrt{2}\, x_1 - \sqrt{2}\, x_2)(-1/\sqrt{2}) +$$
$$+ (2\sqrt{5}\, x_1 + 2\sqrt{5}\, x_2)(-2/\sqrt{5}) = -2x_1 - 3x_2.$$

§ 4.8. Матричные преобразования

Прежде чем изучить матричные преобразования, рассмотрим определенные элементарные действия над матрицами.

1. Перестановка произвольных двух строк (столбцов).
2. Многократное прибавление к какой-либо строке (столбцу) другой строки (столбца).
3. Умножение строки (столбца) на отличную от нуля постоянную величину.

Выполнение любой из этих элементарных операций над квадратной матрицей эквивалентно умножению данной матрицы слева или справа на некоторую неособенную матрицу, такую, чтобы ранг преобразованной матрицы равнялся рангу исходной матрицы.

Операция 1. Эта операция эквивалентна перенумерации строк (столбцов) и, следовательно, не изменяет ранга матрицы. Пусть $\mathbf{Q}_1$ означает единичную матрицу размерности $(n \times n)$ с переставленными i-й и j-й строками и пусть $\mathbf{A}$ — произвольная матрица размерности $(n \times n)$. Очевидно, что умножение матрицы $\mathbf{A}$ слева на $\mathbf{Q}_1$ приводит к матрице с переставленными i-й

и j-й строками. Умножение $\mathbf{A}$ справа на $\mathbf{Q}$ приводит к матрице с переставленными i-м и j-м столбцами.

Например,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{bmatrix}.$$

Операция 2. Если сложить с i-й строкой k раз j-ю строку $\mathbf{A}$, то это эквивалентно умножению $\mathbf{Q}_2$ слева на $\mathbf{A}$, где $\mathbf{Q}_2$ — единичная матрица с элементом k в i-й строке и j-м столбце $(i \neq j)$. Подобным образом k-кратное добавление i-го столбца к j-му столбцу эквивалентно умножению $\mathbf{Q}_2$ справа на $\mathbf{A}$. Например,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ka_{21} & a_{32}+ka_{22} & a_{33}+ka_{23} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}+ka_{13} & a_{13} \\ a_{23} & a_{22}+ka_{23} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+ka_{33} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Операция 3. Умножение i-й строки $\mathbf{A}$ на постоянную k эквивалентно умножению $\mathbf{Q}_3$ слева на $\mathbf{A}$, где $\mathbf{Q}_3$ —единичная матрица размерности $(n \times n)$ с замененным на k i-м элементом на главной диагонали. Аналогично, умножение i-го столбца $\mathbf{A}$ на постоянную k эквивалентно умножению $\mathbf{Q}_3$ справа на $\mathbf{A}$. Например,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & ka_{33} \end{bmatrix}.$$

Определитель $\mathbf{Q}_3$ равен k, так что если преобразованная матрица должна иметь тот же ранг, что и $\mathbf{A}$, постоянная k должна быть отличной от нуля.

Эквивалентные матрицы. Две матрицы **A** и **B** считаются *эквивалентными*, если одна из матриц получается посредством выполнения ряда элементарных операций над другой матрицей. Так как любая последовательность подобных операций над строками **A** может быть выполнена в результате умножения слева на **A** соответствующей последовательности неособенных матриц $\mathbf{P}_i$ $(i=1, 2, 3, \ldots)$, то такая последовательность операций над строками **A** соответствует умножению слева на **A** неособенной матрицы **P**; подобным образом произвольная последовательность операций над столбцами **A** эквивалентна умножению справа на **A** неособенной матрицы **Q**. Следовательно, можно сказать, что матрица **B** эквивалентна матрице **A** в том и только в том случае, если существуют такие две неособенные матрицы **P** и **Q**, что

$$\mathbf{B}=\mathbf{PAQ}. \tag{4.8.1}$$

Эквивалентные матрицы имеют одинаковый ранг. Наоборот, можно показать, что две матрицы размерности $(m \times n)$ эквивалентны в том и только в том случае, если они имеют тот же самый ранг.

Нормальная форма. Произвольную матрицу **A** ранга $r>0$ можно привести к эквивалентной матрице вида

$$\mathbf{I}_r, \quad \left[\begin{array}{c:c} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \hdashline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right], \quad [\mathbf{I}_r \vdots \mathbf{0}] \quad \text{или} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{I}_r$ — единичная матрицы размерности $(r \times r)$. Данный вид матриц называется *нормальной* или *канонической* формой матриц. Заметим, что если неособенную матрицу **A** можно привести к единичной матрице путем ряда операций над строками **A**, то $\mathbf{P}=\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{Q}=\mathbf{I}$. Это представляет собой другой метод нахождения $\mathbf{A}^{-1}$. В общем случае, если **A** приводится к единичной матрице посредством ряда элементарных операций, то

$$\mathbf{A}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{PAQQ}^{-1}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{IQ}^{-1}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}^{-1}. \tag{4.8.2}$$

Таким образом, произвольная неособенная матрица может быть представлена в виде произведения элементарных матриц.

Пример 4.8.1. Привести к нормальной форме следующие матрицы.
Неособенная матрица.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Шаг 1. Переставляем местами строки 2 и 1.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Шаг 2. Добавляем к первой строке умноженную на 3 вторую строку.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Шаг 3. Умножаем первую строку на $-1/2$.

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Данное преобразование выполнялось с целью иллюстрации возможности получения обратной матрицы посредством операций над строками исходной матрицы.

Последовательность элементарных операций имеет вид

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/2 & -1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Произведение $\mathbf{PA}$ равно

$$\begin{bmatrix} -3/2 & -1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, $\mathbf{P} = \mathbf{A}^{-1}$.

Особенная матрица.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Шаг 1. Прибавим первую строку к третьей.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Шаг 2. Прибавим первую строку ко второй.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Шаг 3. Прибавим второй столбец к третьему

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

Шаг 4. Прибавим первый столбец к третьему.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Шаг 5. Прибавим умноженный на (—2) первый столбец ко второму.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Шаг 6. Умножим вторую строку на 1/4.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Шаг 7. Прибавим вторую строку к третьей.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc:c} \multicolumn{2}{c:}{\mathbf{I}_2} & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Элементарные матрицы **P** и **Q** равны

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Преобразование **PAQ** приводит к виду

$$\mathbf{PAQ}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

т. е. к нормальной форме

$$\left[\begin{array}{c:c} \mathbf{I}_2 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 \end{array}\right].$$

Преобразование $\mathbf{B}=\mathbf{PAQ}$ является наиболее общим видом матричного преобразования. Отдельные преобразования определяются из взаимосвязи **P** и **Q**. В частности, такими преобразованиями служат:

преобразование подобия

$$\mathbf{B}=\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ} \qquad \text{или} \qquad \mathbf{P}=\mathbf{Q}^{-1},$$

ортогональное преобразование

$$\mathbf{B}=\mathbf{Q}^{T}\mathbf{AQ}=\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ} \qquad \text{или} \qquad \mathbf{P}=\mathbf{Q}^{T}=\mathbf{Q}^{-1},$$

конгруэнтное преобразование *)

$$\mathbf{B}=\mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q} \qquad \text{или} \qquad \mathbf{P}=\mathbf{Q}^T.$$

Для эрмитовой матрицы $\mathbf{A}$ определяются следующие преобразования:

конъюнктивное *)

$$\mathbf{B}=\mathbf{Q}^{*T}\mathbf{A}\mathbf{Q} \qquad \text{или} \qquad \mathbf{P}=\mathbf{Q}^{*T},$$

унитарное

$$\mathbf{B}=\mathbf{Q}^{*T}\mathbf{A}\mathbf{Q}=\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} \qquad \text{или} \qquad \mathbf{P}=\mathbf{Q}^{*T}=\mathbf{Q}^{-1}.$$

Преобразование подобия. Рассмотрим линейное преобразование

$$\mathbf{y}=\mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{4.8.3}$$

где $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ определяются в n-мерном пространстве с базисом $\mathbf{z}_i$. Предположим теперь, что требуется перейти от данного базиса к системе векторов $\mathbf{w}_i$. В этом состоит общая проблема преобразований координат. Пусть $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ соответственно переходят в новом базисе в координаты $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{y}'$. Так как $\mathbf{z}_i$ и $\mathbf{w}_i$ составляют два базиса в n-мерном пространстве, то должна существовать такая неособенная матрица $\mathbf{P}$, что

$$\mathbf{x}'=\mathbf{P}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}'; \qquad \mathbf{y}'=\mathbf{P}\mathbf{y}, \quad \mathbf{y}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{y}'. \tag{4.8.4}$$

Необходимо найти связь между $\mathbf{y}'$ и $\mathbf{x}'$ в новой системе координат. Для этого умножим слева обе части уравнения (4.8.4) на $\mathbf{P}$ и получим $\mathbf{P}\mathbf{y}=\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{x}$. Из уравнения (4.8.4) следует, что

$$\mathbf{y}'=\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}', \tag{4.8.5}$$

или

$$\mathbf{y}'=\mathbf{B}\mathbf{x}', \text{ где } \mathbf{B}=\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}, \ \mathbf{P}=\mathbf{Q}^{-1}. \tag{4.8.6}$$

Матрица $\mathbf{B}$, связывающая в новой системе координат $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{y}'$, получается из $\mathbf{A}$ на основе преобразования *подобия*.

Преобразования подобия обладают чрезвычайно важным свойством — характеристические числа инвариантны к такому преобразованию. Чтобы показать это, положим $\mathbf{B}=\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{Q}$ Тогда

$$\mathbf{B}-\lambda\mathbf{I}=\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{Q}-\lambda\mathbf{I}=\mathbf{P}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}^{-1})\mathbf{Q}.$$

Соответствующие определители

$$|\mathbf{B}-\lambda\mathbf{I}|=|\mathbf{P}|\cdot|\mathbf{Q}|\cdot|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}^{-1}|.$$

Ввиду того, что $\mathbf{P}=\mathbf{Q}^{-1}$, произведение определителей $|\mathbf{P}|$ и $|\mathbf{Q}|$ равно единице, откуда следует

$$|\mathbf{B}-\lambda\mathbf{I}|=|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|. \tag{4.8.7}$$

---

*) В нашей литературе в этом случае обычно используют более общий термин «эквивалентное преобразование». (*Прим. перев.*)

Следовательно, характеристические числа инвариантны к преобразованию подобия. Если $\mathbf{x}_i'$ — характеристический вектор, соответствующий характеристическому числу λ_i матрицы $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}$, то $\mathbf{x}_i = \mathbf{Q}\mathbf{x}_i'$ должен быть характеристическим вектором матрицы $\mathbf{A}$, соответствующим тому же характеристическому числу λ_i.

Ортогональное преобразование. Рассмотрим линейное преобразование уравнения (4.8.4)

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{x}', \quad \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{Q},$$

где вектор $\mathbf{x}$ определяется в ортогональной системе координат. Если новая система координат также ортогональна, то длина вектора $\mathbf{x}'$ в новой системе координат должна совпадать с длиной вектора $\mathbf{x}$ в первоначальной системе координат. Следовательно,

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}', \mathbf{x}' \rangle.$$

Выражая это соотношение посредством матрицы $\mathbf{Q}$, имеем

$$\mathbf{x}'^T\mathbf{x}' = \mathbf{x}^T\mathbf{x} = \mathbf{x}'^T\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\mathbf{x}'.$$

Для этого необходимо, чтобы $\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ или

$$\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}. \tag{4.8.8}$$

Следовательно, при переходе от одного ортогонального базиса к другому матрица преобразования $\mathbf{Q}$, ставящая в соответствие вектору в первоначальной системе координат вектор в новой системе координат, должна удовлетворять соотношению, описываемому уравнением (4.8.8). Данное преобразование называют в этом случае *ортогональным* преобразованием. Матрица $\mathbf{Q}$ называется *ортогональной* матрицей. Ортогональное преобразование является частным случаем преобразования подобия. Оно оставляет неизменными длины и углы.

Из уравнения (4.8.8) как следствие вытекает

$$|\mathbf{Q}^T|\,|\mathbf{Q}| = \mathbf{I} \qquad \text{или} \qquad |\mathbf{Q}| = \pm 1. \tag{4.8.9}$$

Знак минус в определителе $\mathbf{Q}$ означает, что ортогональное преобразование можно получить путем вращения или отражения. При этом по-прежнему остаются неизменными длины векторов и углы между ними. Следует также отметить, что косинусы углов между осью i' и осями $1, 2, \ldots, n$ обозначаются соответственно элементами $q_{i1}, q_{i2}, \ldots, q_{in}$ матрицы $\mathbf{Q}$. Эти величины называются *направляющими косинусами* или направлениями новых осей по отношению к старым.

Унитарное преобразование. Для эрмитовой матрицы $(a_{ji} = a_{ij}^*)$ можно воспользоваться соотношениями, полученными для ортогонального преобразования. Можно показать, что в этом случае переход от одного ортогонального базиса к другому осуществляется при помощи унитарного преобразования вида $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{x}'$, где $\mathbf{Q}$ — унитарная матрица, определяемая соотношением

$$\mathbf{Q}^{*T}\mathbf{Q} = \mathbf{I}, \quad \text{или} \quad \mathbf{Q}^{*T} = \mathbf{Q}^{-1}. \tag{4.8.10}$$

Определитель унитарной матрицы равен ± 1. Таким образом, унитарное преобразование сохраняет неизменными длины «в комплексном смысле».

Конгруэнтное преобразование. Две матрицы, $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, называются конгруэнтными, если одна получается из другой посредством пар элементарных операций, причем каждая из пар состоит из одного и того же преобразования последовательно строк и столбцов. В соответствии с определением элементарных преобразований две матрицы называются конгруэнтными, если существует неособенная матрица $\mathbf{Q}$, удовлетворяющая равенству

$$\mathbf{B} = \mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q}. \tag{4.8.11}$$

Конгруэнтность является частным случаем эквивалентности, так что конгруэнтные матрицы имеют одинаковый ранг. Конгруэнтное преобразование представляет собой такой переход к новому базису, что если два вектора $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ связаны в исходном базисе уравнением (4.8.3), то векторы $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{y}'$ в новом базисе связаны уравнением

$$\mathbf{y}' = \mathbf{B}\mathbf{x}' = \mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{x}'. \tag{4.8.12}$$

Преобразования указанного вида полезны при рассмотрении квадратичных форм, изучаемых в следующем параграфе.

Конъюнктивное преобразование. Две эрмитовы матрицы размерности $(n \times n)$ $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ являются конъюнктивными, если одна может быть получена из другой посредством пар элементарных преобразований, причем каждая пара состоит из преобразования столбца и соответствующего преобразования комплексно сопряженной строки. Согласно определению элементарных преобразований две эрмитовы матрицы $(n \times n)$ $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ называются конъюнктивными (эрмитово конгруэнтными), если существует такая неособенная матрица $\mathbf{Q}$, что

$$\mathbf{B} = \mathbf{Q}^{*T}\mathbf{A}\mathbf{Q}. \tag{4.8.13}$$

Конъюнктивное преобразование представляет собой такой переход к новому базису, что если два вектора $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ связаны

в исходном базисе уравнением (4.8.3), то векторы $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{y}'$ в новом базисе связаны уравнением

$$\mathbf{y}' = \mathbf{B}\mathbf{x}' = \mathbf{Q}^{*T}\mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{x}'. \tag{4.8.14}$$

Преобразование к диагональному виду. Весьма часто оказывается возможным таким образом преобразовать систему координат рассматриваемой задачи к новым координатам, что линейное преобразование в новой системе координат характеризуется диагональной матрицей. По этой причине рассмотрим сейчас условия, при которых матрица $\mathbf{B} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{Q}$ приводится к диагональному виду.

Конгруэнтные преобразования. *Действительные симметрические матрицы.* Действительная симметрическая матрица $\mathbf{A}$ ранга r может быть приведена к конгруэнтной диагональной матрице канонической формы

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q} = \left[\begin{array}{c:c:c} \mathbf{I}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hdashline \mathbf{0} & -\mathbf{I}_{r-p} & \mathbf{0} \\ \hdashline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right]. \tag{4.8.15}$$

Целое число p называется *индексом* матрицы, а целое $s = p - (r - p) = 2p - r$ называется *сигнатурой* матрицы. Две действительные симметрические матрицы размерности $(n \times n)$ считаются конгруэнтными в том и только в том случае, если они имеют одинаковый ранг, а также сигнатуру или индекс.

Пример 4.8.2. Привести симметрическую матрицу $\mathbf{A}$ к канонической форме (4.8.15), где

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

Шаг 1. Вычесть третью строку из второй.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

Шаг 2. Вычесть третий столбец из второго.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Шаг 3. Вычесть умноженную на 2 первую строку из третьей.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Шаг 4. Вычесть умноженный на 2 первый столбец из третьего.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Шаг 5. Умножить вторую строку и второй столбец на 1/2.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Шаг 6. Поменять местами второй столбец с третьим и вторую строку с третьей.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

В этом случае индекс матрицы равен $p=2$, ранг $r=3$ и сигнатура $s=1$.

$$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Кососимметрические матрицы. Кососимметрическая матрица ранга r может быть приведена к канонической форме вида (4.8.16) посредством конгруэнтного преобразования $\mathbf{B}=-\mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q}$. В результате имеем

$$\mathbf{B}=-\mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q}=\operatorname{diag}(\mathbf{D}_1,\ \mathbf{D}_2,\ \ldots,\ \mathbf{D}_m,\ 0,\ \ldots,\ 0), \qquad (4.8.16)$$

где

$$\mathbf{D}_i=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad m={}^1/_2 \text{ ранга } \mathbf{A}.$$

Две кососимметрические матрицы размерности $(n\times n)$ считаются конгруэнтными тогда и только тогда, если они имеют одинаковый ранг.

Комплексные симметрические матрицы. Комплексная симметрическая матрица размерности $(n\times n)$ ранга r посредством конгруэнтного преобразования приводится к канонической форме

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q}=\left[\begin{array}{c:c} \mathbf{I}_r & 0 \\ \hdashline 0 & \mathbf{0} \end{array}\right]. \qquad (4.8.17)$$

Две комплексные симметрические матрицы размерности $(n\times n)$ являются конгруэнтными тогда и только тогда, если они имеют одинаковый ранг.

Эрмитовы матрицы. Эрмитова матрица размерности $(n \times n)$ ранга r может быть приведена к канонической матрице (4.8.18) посредством конъюнктивного преобразования

$$\mathbf{B} = \mathbf{Q}^{*T}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \left[\begin{array}{c:c:c} \mathbf{I}_p & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & -\mathbf{I}_{r-p} & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 \end{array}\right]. \tag{4.8.18}$$

Индекс p и сигнатура s определяются аналогично действительной симметрической матрице.

Косоэрмитова матрица. Косоэрмитова матрица размерности $(n \times n)$ ранга r посредством конъюнктивного преобразования может быть приведена к канонической матрице вида (4.8.19)

$$\mathbf{B} = \mathbf{Q}^{*T}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \left[\begin{array}{c:c:c} j\mathbf{I}_p & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & -j\mathbf{I}_{r-p} & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 \end{array}\right]. \tag{4.8.19}$$

Преобразования подобия. В предыдущем параграфе показано, что для матрицы $\mathbf{A}$, имеющей n различных характеристических чисел, преобразование вида $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}$ приводит к диагональной матрице Λ. В случае кратных корней это преобразование также справедливо при условии, что матрица $[\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}]$ «полностью вырождена». Применение данного преобразования подобия всегда возможно для действительной симметрической матрицы $\mathbf{A}$ (подобный случай распространен при изучении линейных цепей). Так как собственные вектора действительной симметрической (или эрмитовой) матрицы взаимно ортогональны, то всегда существует такая ортогональная матрица, что

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{T}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n). \tag{4.8.20}$$

Это, однако, не охватывает общий случай несимметрических матриц; большинство же матриц, встречающихся при анализе систем управления, являются несимметрическими.

Несимметрическая матрица размерности $(n \times n)$ с кратными характеристическими числами может содержать меньше, чем n линейно независимых характеристических векторов; поэтому приведение к диагональной форме посредством преобразования подобия может оказаться невозможным. Однако можно показать,

что произвольная квадратная матрица **A** путем преобразования подобия приводится к канонической матрице Жордана, обладающей следующими свойствами [8].

1. Диагональные элементы этой матрицы являются характеристическими числами **A**.

2. Все элементы, лежащие ниже главной диагонали, равны нулю.

3. Если соседние элементы на главной диагонали одинаковы, то элементы, непосредственно находящиеся справа от главной диагонали, равны единице. Типичная жорданова форма имеет вид

$$\mathbf{J} = \left[\begin{array}{ccc|c|cc} \lambda_1 & 1 & & & & \\ & \lambda_1 & 1 & & & \\ & & \lambda_1 & & & \\ \hline & & & \lambda_1 & & \\ \hline & & & & \lambda_2 & 1 \\ & & & & & \lambda_2 \end{array}\right].$$

Заметим, что «единицы» встречаются в блоках вида

$$\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & & \\ & \lambda_i & 1 & & & \\ & & \lambda_i & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & & \lambda_i \end{bmatrix}.$$

Они называются клетками Жордана.

Количество клеток Жордана, связанных с данным характеристическим числом λ_i, в соответствии с преобразованием подобия, приводящим к жордановой форме, равное количеству собственных векторов, связанных с характеристическим числом, т. е. q-дефекту $[\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A}]$. Однако, к сожалению, определить порядки клеток Жордана нелегко*). Поэтому неясно, получается ли в результате преобразования $\mathbf{J} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}$ приведенная выше

*) Это чрезвычайно сложная проблема линейной алгебры [9, 10].

жорданова форма или форма

$$\mathbf{J} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} \lambda_1 & 1 & & & & \\ & \lambda_1 & & & & \\ \hline & & \lambda_1 & 1 & & \\ & & & \lambda_1 & & \\ \hline & & & & \lambda_2 & 1 \\ & & & & & \lambda_2 \end{array}\right].$$

Число единиц, связанных с данным λ_i, равно порядку λ_i в характеристическом уравнении минус дефект $[\lambda_i\mathbf{I} - \mathbf{A}]$. Однако это не проясняет ситуацию, так как обе выше приведенные формы содержат две «единицы», связанные с λ_1.

Полезно знать, что в случае полной вырожденности не будет присутствовать ни одной единицы, о чем указывалось в предыдущем параграфе. В случае простой вырожденности ($q = 1$) все элементы, непосредственно лежащие справа от главной диагонали, равны единице. Для случаев, не укладывающихся в упомянутые, уровень представленного здесь рассмотрения диктует для определения $\mathbf{J}$ и $\mathbf{M}$ метод проб и ошибок, основанный на равенстве

$$\mathbf{AM} = \mathbf{MJ}. \tag{4.8.21}$$

Пусть столбцы $\mathbf{M}$ обозначаются через $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$. Тогда существует клетка Жордана порядка m, связанная с λ_i лишь в том случае, если m линейно независимых векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax}_1 &= \lambda_i\mathbf{x}_1 && \text{или} \quad (\lambda_i\mathbf{I} - \mathbf{A})\,\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}, \\ \mathbf{Ax}_2 &= \lambda_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_1 && \text{или} \quad (\lambda_i\mathbf{I} - \mathbf{A})\,\mathbf{x}_2 = -\mathbf{x}_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{Ax}_m &= \lambda_i\mathbf{x}_m + \mathbf{x}_{m-1} && \text{или} \quad (\lambda_i\mathbf{I} - \mathbf{A})\,\mathbf{x}_m = -\mathbf{x}_{m-1}. \end{aligned} \tag{4.8.22}$$

Эти выражения применимы для каждой клетки Жордана.

Пример 4.8.3. Показать, что матрица

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

не приводится посредством преобразования подобия к диагональному виду, если $\lambda_1 = \lambda_2$.

Пусть

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{Q}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} q_{22} & -q_{12} \\ -q_{21} & q_{11} \end{bmatrix}}{|\mathbf{Q}|},$$

где $|\mathbf{Q}| = q_{11}q_{22} - q_{21}q_{12}$. Преобразование подобия $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}$ тогда приводит к матрице

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \frac{\begin{bmatrix} q_{22}(q_{11}\lambda_1 + q_{21}) - q_{12}q_{21}\lambda_2 & q_{22}(q_{12}\lambda_1 + q_{22}) - q_{12}q_{22}\lambda_2 \\ -q_{21}(q_{11}\lambda_1 + q_{21}) + q_{11}q_{21}\lambda_2 & -q_{21}(q_{12}\lambda_1 + q_{22}) + q_{11}q_{22}\lambda_2 \end{bmatrix}}{|\mathbf{Q}|}.$$

Для равенства нулю недиагональных элементов необходимо, чтобы

$$q_{22}q_{12}(\lambda_1 - \lambda_2) + q_{22}^2 = 0,$$
$$q_{11}q_{21}(\lambda_1 - \lambda_2) + q_{21}^2 = 0.$$

Если $\lambda_1 = \lambda_2$, то q_{22} и q_{21} должны равняться нулю. Однако при этом $|\mathbf{Q}| = 0$, что противоречит существованию данного преобразования подобия. Следовательно, при $\lambda_1 = \lambda_2$ невозможно привести матрицу $\mathbf{A}$ к диагональному виду посредством преобразования подобия. Так как матрица $\mathbf{A}$ является клеткой Жордана, то никакие другие преобразования не рассматриваются.

Пример 4.8.4. Привести матрицу $\mathbf{A}$ в примере 4.7.3 с кратными характеристическими корнями и простой вырожденностью к жордановой форме. Определить $\mathbf{M}$.

Так как

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

имеет характеристическое число λ_1 кратности три и лишь простую вырожденность, то существует лишь один линейно независимый характеристический вектор. Поэтому жорданова форма содержит одну клетку Жордана. Порядок λ_1 минус дефект указывает существование двух «единиц» в клетке Жордана. Следовательно, жорданова форма должна иметь вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Характеристический вектор $\mathbf{x}_1$ определяется первым из уравнений (4.8.22), а именно:

$$x_{21} = x_{11},$$
$$x_{31} = x_{21},$$
$$x_{11} - 3x_{21} + 3x_{31} = x_{31},$$

где x_{11}, x_{21} и x_{31} обозначают составляющие $\mathbf{x}_1$. Эти уравнения дают $x_{11} = x_{21} = x_{31}$. Следовательно,

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

является характеристическим вектором. Заметим, что, как и следовало ожидать, этот вектор совпадает с определенным в примере 4.7.3.

Рассматривая сейчас x_2, из второго уравнения (4.8.22) имеем

$$x_{22} = x_{12} + 1,$$
$$x_{32} = x_{22} + 1,$$
$$x_{12} - 3x_{22} + 3x_{32} = x_{32} + 1.$$

Подстановка первых двух уравнений в третье дает $x_{12}=x_{12}$, откуда x_{12} — произвольная величина. Пусть $x_{12}=1$. Тогда

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Третье уравнение (4.8.22) дает

$$x_{23} = x_{13} + 1,$$
$$x_{33} = x_{23} + 2,$$
$$x_{13} - 3x_{23} + 3x_{33} = x_{33} + 3.$$

Подстановка, как и ранее, первых двух уравнений в третье приводит к произвольной составляющей, так как получим $x_{13}=x_{13}$. Пусть $x_{13}=-1$. Тогда

$$\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Для проверки рассматриваем

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M} = \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Пример 4.8.5. Привести

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

к жордановой форме и определить $\mathbf{M}$.

Вычисление $|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}|$ приводит к характеристическому уравнению $(\lambda-1)^2\times\times(\lambda-2)=0$. Определим дефект $[\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}]$ при $\lambda=1$.

$$[\mathbf{I}-\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Он равен единице. Поэтому **J** состоит из двух клеток Жордана Клетка первого порядка соответствует $\lambda = 2$. Вторая клетка является клеткой второго порядка с одной «единицей». Имеем

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Характеристический вектор $\mathbf{x}_1$, соответствующий $\lambda=2$, задается уравнениями

$$x_{11} = 2x_{11},$$
$$x_{11} + x_{21} = 2x_{21},$$
$$2x_{11} + 3x_{21} + 2x_{31} = 2x_{31}.$$

Выбирая произвольно $x_{31}=1$, получаем

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Рассматривая $\mathbf{x}_2$, соответствующий $\lambda=1$, имеем

$$x_{12} = x_{12},$$
$$x_{12} + x_{22} = x_{22},$$
$$2x_{12} + 3x_{22} + 2x_{32} = x_{32}.$$

Выбирая произвольно $x_{22}=1$, получим

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Чтобы определить второй вектор, соответствующий $\lambda=1$, из уравнения (4.8.22) имеем

$$x_{13} = x_{13},$$
$$x_{13} + x_{23} = x_{23} + 1,$$
$$2x_{13} + 3x_{23} + 2x_{33} = x_{33} - 3.$$

Выбирая произвольно $x_{23}=0$, имеем

$$\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -5 \end{bmatrix}.$$

Для проверки рассматриваем

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M} = \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Пример 4 8.6. Привести

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

к жордановой форме и определить $\mathbf{M}$.

Вычисление $|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}|$ приводит к характеристическому уравнению $\lambda^4=0$. Дефект $[\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}]$ для $\lambda=0$ равен двум. Поэтому существуют две клетки Жордана и $\mathbf{J}$ имеет две «единицы», лежащие непосредственно выше главной диагонали. Этим требованиям удовлетворяют

$$\mathbf{J}=\left[\begin{array}{c:ccc}0&0&0&0\\\hdashline 0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{array}\right]\quad\text{или}\quad\mathbf{J}=\left[\begin{array}{cc:cc}0&1&0&0\\0&0&0&0\\\hdashline 0&0&0&1\\0&0&0&0\end{array}\right].$$

Для определения правильности выбора базиса можно воспользоваться уравнением (4.8.22).

Предположим, что правильной является первая из двух приведенных жордановых форм, т. е. состоящая из клеток Жордана размерности (1×1) и (3×3). Первое уравнение (4.8.22) дает

$$\begin{aligned}x_{31}&=0,\\x_{41}&=0,\\0&=0,\\0&=0.\end{aligned}$$

Следовательно, вектор, связанный с клеткой Жордана (1×1), равен

$$\mathbf{x}_1=\begin{bmatrix}x_{11}\\x_{21}\\0\\0\end{bmatrix},$$

где x_{11} и x_{21} — произвольные постоянные, которые не могут одновременно равняться нулю.

Теперь, рассматривая клетку Жордана размерности (3×3), из первого уравнения (4.8.22) имеем

$$\begin{aligned}x_{32}&=0,\\x_{42}&=0,\\0&=0,\\0&=0.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathbf{x}_2=\begin{bmatrix}x_{12}\\x_{22}\\0\\0\end{bmatrix},$$

где x_{12} и x_{22} не могут одновременно равняться нулю и должны быть выбраны так, чтобы $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ были линейно независимыми.

Второе уравнение (4.8.22) дает

$$\begin{aligned} x_{33} &= 0 + x_{12}, \\ x_{43} &= 0 + x_{22}, \\ 0 &= 0 + 0, \\ 0 &= 0 + 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix}.$$

Из третьего уравнения (4.8.22) имеем

$$\begin{aligned} x_{34} &= 0 + x_{13}, \\ x_{44} &= 0 + x_{23}, \\ 0 &= 0 + x_{12}, \\ 0 &= 0 + x_{22}. \end{aligned}$$

Последние два выражения противоречат $\mathbf{x}_2 \neq 0$. Следовательно, правильная жорданова форма не может содержать клетки Жордана соответственно размерностей (1×1) и (3×3).

Предполагая теперь, что надлежащая жорданова форма состоит из двух клеток Жордана размерности (2×2), из первого уравнения (4.8.22) получим

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ не могут одновременно равняться нулю.

Второе уравнение (4.8.22) дает

$$\begin{aligned} x_{32} &= 0 + x_{11}, \\ x_{42} &= 0 + x_{21}, \\ 0 &= 0 + 0, \\ 0 &= 0 + 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ должны быть линейно независимыми.

Рассматривая теперь векторы, связанные со второй клеткой Жордана (2×2), из первого уравнения (4.8.22) имеем

$$\begin{aligned} x_{33} &= 0, \\ x_{43} &= 0, \\ 0 &= 0, \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

где x_{13} и x_{23} должны выбираться так, чтобы $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_3$ были линейно независимыми.

Второе уравнение (4.8.22) дает

$$\begin{aligned} x_{34} &= 0 + x_{13}, \\ x_{44} &= 0 + x_{23}, \\ 0 &= 0 + 0, \\ 0 &= 0 + 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} x_{14} \\ x_{24} \\ x_{13} \\ x_{23} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ 0 & x_{11} & 0 & x_{13} \\ 0 & x_{21} & 0 & x_{23} \end{bmatrix},$$

где составляющие $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$ и $\mathbf{x}_4$ должны выбираться так, чтобы эти векторы были линейно независимыми.

В качестве простейшей проверки положим

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad \text{Тогда} \quad \mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

и

$$\mathbf{J} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Можно получить множество других канонических форм, причем жорданова форма является частным случаем обобщенной жордановой формы. Содержательное изложение этих форм дается в литературе [11, 12]. Для большинства задач, с которыми читатель столкнется, знания жордановой формы вполне достаточно.

§ 4.9. Билинейная и квадратичная формы

Билинейной формой относительно переменных x_i, y_i называется выражение вида

$$\begin{aligned} B = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + \ldots + a_{1n}x_1y_n + \\ + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2 + \ldots + a_{2n}x_2y_n + \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + a_{n1}x_ny_1 + a_{n2}x_ny_2 + \ldots + a_{nn}x_ny_n, \end{aligned}$$

где все составляющие — действительные величины. Билинейная форма записывается компактно в виде

$$B = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j, \tag{4.9.1}$$

или в матричной форме, как

$$B = [x_1x_2 \ldots x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix} =$$

$$= \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{y} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{y} \rangle. \tag{4.9.2}$$

Матрица $\mathbf{A}$ называется матрицей коэффициентов формы, а ранг $\mathbf{A}$ называется рангом формы.

Если вектор $\mathbf{x}$ равен вектору $\mathbf{y}$, то уравнение (4.9.2) превращается в

$$Q = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{x} \rangle. \tag{4.9.3}$$

Q называется *квадратичной* формой $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Другое выражение для Q дается в виде двойной суммы

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j. \tag{4.9.4}$$

Заметим, что коэффициент при члене x_ix_j $(i \neq j)$ равен $(a_{ij} + a_{ji})$. Этот коэффициент не изменится, если оба a_{ij} и a_{ji} положить равными $\frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$. Следовательно, без потери общности, можно считать матрицу $\mathbf{A}$ *симметрической*.

Если матрица $\mathbf{A}$ является эрмитовой матрицей, так что $a_{ij}^* = a_{ji}$, то соответствующая эрмитова форма определяется как

$$H = \mathbf{x}^{T*}\mathbf{A}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i^*x_j = \langle \mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{x} \rangle, \quad (a_{ij}^* = a_{ji}). \tag{4.9.5}$$

Теоремам для действительных квадратичных форм соответствуют аналоги для случая эрмитовых форм. Так как, в отличие от доказательства для действительных квадратичных форм, доказательство аналогичных теорем требует лишь незначительных изменений, последние формулируются без доказательства.

Преобразование переменных. Линейное преобразование $\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{y}$, где $\mathbf{B}$ — произвольная неособенная матрица размерности $(n \times n)$, преобразует квадратичную форму (4.9.3) в квадратичную форму относительно переменных $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Эта форма имеет вид

$$Q = \mathbf{y}^T\mathbf{B}^T\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{y} \tag{4.9.6}$$

или

$$Q = \mathbf{y}^T\mathbf{C}\mathbf{y}, \quad \text{где} \quad \mathbf{C} = \mathbf{B}^T\mathbf{A}\mathbf{B}. \tag{4.9.7}$$

Так как $\mathbf{C} = \mathbf{B}^T\mathbf{A}\mathbf{B}$ является конгруэнтным преобразованием, то из этого следует, что ранг квадратичной (эрмитовой) формы изменяется при неособенном преобразовании ее переменных.

Приведение к диагональному виду. Во многих случаях желательно выразить Q в виде линейной комбинации только квадратов координат. Матрицу $\mathbf{A}$ можно привести к диагональной матрице посредством конгруэнтного преобразования, описываемого уравнением (4.9.7). Преобразование оказывается особенно полезным, когда $\mathbf{B}$ — ортогональная матрица $(\mathbf{B}^T = \mathbf{B}^{-1})$, так что преобразование является ортогональным. Как показано в предыдущем параграфе, это выполняется для симметрических матриц путем выбора $\mathbf{B}$, равной нормированной модальной матрице $\mathbf{M}$. Таким образом, линейное преобразование $\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{y}$ приводит к квадратичной форме

$$\begin{aligned} Q &= \mathbf{y}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{y} = \mathbf{y}^T\Lambda\mathbf{y} = \langle \mathbf{y}, \Lambda\mathbf{y}\rangle = \\ &= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2. \end{aligned} \tag{4.9.8}$$

Если симметрическая матрица $\mathbf{A}$ имеет ранг $r < n$, то модальная матрица по-прежнему может быть образована таким образом, что указанное преобразование приводит к диагональной матрице с диагональными элементами, равными характеристическим числам $\mathbf{A}$. В этом случае модальная матрица $\mathbf{M}$ не единственная. Существует бесконечное множество путей для выбора системы m ортогональных характеристических векторов, соответствующих характеристическому числу порядка m. Заметим, что характеристическому числу порядка m, равному нулю, соответствуют только $n - m$ ненулевых членов квадратичной формы. При этом ранг матрицы $\mathbf{A}$ равен $r = n - m$.

Пример 4.9.1. Представить Q в виде линейной суммы квадратов, где $Q = \langle \mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{x} \rangle$ и

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Характеристические числа $\mathbf{A}$ и соответствующие им нормированные характеристические векторы задаются в виде

$$\lambda_1 = 1, \qquad \mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix};$$

$$\lambda_2 = 4, \qquad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\lambda_3 = -2, \quad \mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Нормированная модальная матрица тогда равна

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} & 0 \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Преобразование

$$\begin{aligned}
x_1 &= (1/\sqrt{3})\, y_1 + (2/\sqrt{6})\, y_2, \\
x_2 &= -(1/\sqrt{3})\, y_1 + (1/\sqrt{6})\, y_2 + (1/\sqrt{2})\, y_3, \\
x_3 &= -(1/\sqrt{3})\, y_1 + (1/\sqrt{6})\, y_2 - (1/\sqrt{2})\, y_3, \\
y_1 &= (1/\sqrt{3})\, x_1 - (1/\sqrt{3})\, x_2 - (1/\sqrt{3})\, x_3, \\
y_2 &= (2/\sqrt{6})\, x_1 + (1/\sqrt{6})\, x_2 + (1/\sqrt{6})\, x_3, \\
y_3 &= (1/\sqrt{2})\, x_2 - (1/\sqrt{2})\, x_3
\end{aligned}$$

приводит к квадратичной форме

$$Q = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_4 y_3^2 = y_1^2 + 4y_2^2 - 2y_3^2.$$

Приведение к сумме квадратов можно также осуществить на основе *метода Лагранжа* последовательного выделения квадратов. Этот метод сводится к следующему:

$$\begin{aligned}
Q &= 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 = \\
&= 3x_1^2 + 2x_1(x_2 + x_3) + \frac{1}{3}(x_2 + x_3)^2 + 4x_2x_3 - \\
&- \frac{1}{3}(x_2 + x_3)^2 = [\sqrt{3}x_1 + (1/\sqrt{3})(x_2 + x_3)]^2 - \\
&- \frac{1}{3}(x_2 - 5x_3)^2 + 8x_3^2.
\end{aligned}$$

Пусть

$$y_1 = \sqrt{3}x_1 + (1/\sqrt{3})\,x_2 + (1/\sqrt{3})\,x_3,$$
$$y_2 = x_2 - 5x_3,$$
$$y_3 = x_3.$$

Тогда

$$Q = y_1^2 - 1/3y_2^2 + 8y_3^2.$$

Матрица $\mathbf{B}$ преобразования $\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{y}$ будет треугольной вида

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/3 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Это неортогональная матрица и, следовательно, новая система координат не содержит взаимно ортогональных единичных векторов. Однако, тем не менее, конгруэнтное преобразование $\mathbf{B}^T\mathbf{A}\mathbf{B}$ приводит квадратичную форму к сумме квадратов.

Результаты предшествующего рассмотрения показывают, что действительная квадратичная форма посредством неособенного действительного преобразования может быть приведена к виду (4.9.8) или, в случае если конгруэнтное преобразование неортогональное, к виду

$$Q = \alpha_1 z_1^2 + \alpha_2 z_2^2 + \ldots + \alpha_p z_p^2 - \alpha_{p+1} z_{p+1}^2 - \ldots - \alpha_n z_n^2. \qquad (4.9.9)$$

Число положительных членов p называется индексом квадратичной формы.

Если квадратичная форма имеет ранг r, то в уравнении (4.9.9) присутствуют только r членов. При введении неособенного преобразования

$$w_i = \sqrt{\alpha_i} z_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, r),$$
$$w_i = z_i \qquad i = (r+1, \ldots, n)$$

уравнение (4.9.9) принимает вид

$$Q = w_1^2 + w_2^2 + \ldots + w_p^2 - w_{p+1}^2 - \ldots - w_r^2. \qquad (4.9.10)$$

Уравнение (4.9.10) может рассматриваться как прямое следствие преобразования к канонической форме (4.8.15).

Подобным образом эрмитова форма ранга r может быть приведена к диагональным формам

$$Q = \alpha_1 z_1^* z_1 + \alpha_2 z_2^* z_2 + \ldots + \alpha_r z_r^* z_r = w_1^* w_1 + w_2^* w_2 + \ldots + w_p^* w_p - \\ - w_{p+1}^* w_{p+1} - \ldots - w_r^* w_r. \qquad (4.9.11)$$

Последняя форма вытекает из определения канонической матрицы (4.8.18).

Определенные и полуопределенные формы. Квадратичная форма $Q = \langle \mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{x} \rangle$ называется *положительно определенной*,

если она неотрицательна при всех действительных значениях $\mathbf{x}$ и равна нулю только тогда, когда $\mathbf{x}$ — нулевой вектор. Если выполняются эти условия, то из уравнения (4.9.10) ясно, что $\mathbf{A}$ должна быть неособенной матрицей и что индекс (число положительных членов) квадратичной формы должен совпадать с ее рангом. Из уравнения (4.9.8) очевидно, что квадратичная форма положительно определена в том и только в том случае, если все характеристические числа неособенной матрицы $\mathbf{A}$ положительные. Любое из этих условий применимо для определения положительной определенности квадратичной формы.

Говорят, что если квадратичная форма $\langle \mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{x} \rangle$ положительно определена, то матрица $\mathbf{A}$ также положительно определена. Действительная симметрическая матрица положительно определена в том и только в том случае, если существует такая неособенная матрица $\mathbf{C}$, что

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}^T\mathbf{C}. \tag{4.9.12}$$

Чтобы показать это, предположим, что $\mathbf{A}$ приведена к единичной матрице посредством конгруэнтного преобразования. Поэтому $\mathbf{A}$ может быть записана как $\mathbf{A} = \mathbf{B}^T\mathbf{I}_n\mathbf{B}$. Так как $\mathbf{I}_n^2 = \mathbf{I}_n$ и $\mathbf{I}_n^T = \mathbf{I}_n$, то $\mathbf{A} = (\mathbf{B}^T\mathbf{I}_n^T)(\mathbf{I}_n\mathbf{B})$. Пусть $\mathbf{C} = \mathbf{I}_n\mathbf{B}$. Тогда $\mathbf{A} = \mathbf{C}^T\mathbf{C}$. Эти этапы справедливы также и тогда, когда $\mathbf{A}$ приводится посредством конгруэнтного преобразования к канонической форме

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right].$$

В последнем случае $\mathbf{C}$ имеет ранг r, а $\mathbf{A}$ положительно полуопределена.

Квадратичная форма называется *положительно полуопределенной*, если она неотрицательна. Она может равняться нулю при отличном от нуля векторе $\mathbf{x}$. Данный случай возникает при особенной матрице $\mathbf{A}$. Из уравнения (4.7.8) следует, что если $\mathbf{A}$ — особенная матрица ранга r, то она должна обладать равными нулю $n-r$ характеристическими корнями. Тогда в уравнении (4.9.8) $n-r$ членов тождественно равны нулю даже тогда, когда соответствующие составляющие y_i отличны от нуля.

Аналогично выше приведенным определениям квадратичная форма может быть отрицательна определенной и отрицательно полуопределенной. Условия, удовлетворяющие этим формам, а также для соответствующего случая эрмитовых форм, сведены в таблицу 4.9.1.

Определение положительной определенности при помощи главных миноров. Существенно определить, является ли квадратичная форма положительно определенной или нет, не прибегая к решению задачи о собственных значениях или к приве-

Таблица 4.9.1

	$\lvert \mathbf{A} \rvert$	Ранг и индекс	Характеристические числа	$\mathbf{A}$	Форма	Главные миноры
			Положительно определенная			
Действительная квадратичная форма	$\lvert \mathbf{A} \rvert > 0$	$r = p = n$	$\lambda_i > 0$	$\mathbf{A} = \mathbf{C}^T\mathbf{C}$ $\lvert \mathbf{C} \rvert > 0$	$Q = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2$	$\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ все положительные
Эрмитова форма				$\mathbf{A} = \mathbf{C}^{*T}\mathbf{C}$ $\lvert \mathbf{C} \rvert > 0$	$Q = z_1^* z_1 + z_2^* z_2 + \ldots + z_n^* z_n$	
			Положительно полуопределенная			
Действительная квадратичная форма	$\lvert \mathbf{A} \rvert = 0$	$r = p < n$	$n - r$ корней равны нулю; остальные положительные	$\mathbf{A} = \mathbf{C}^T\mathbf{C}$ $\lvert \mathbf{C} \rvert = 0$	$Q = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_r^2$	$\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_r$ все положительные
Эрмитова форма				$\mathbf{A} = \mathbf{C}^{*T}\mathbf{C}$ $\lvert \mathbf{C} \rvert = 0$	$Q = z_1^* z_1 + z_2^* z_2 + \ldots + z_r^* z_r$	$\Delta_{r+1}, \ldots, \Delta_{n-1}$ неотрицательные
			Отрицательно определенная			
Действительная квадратичная форма	$(-1)^n \lvert \mathbf{A} \rvert > 0$	$r = n$		$\mathbf{A} = -\mathbf{C}^T\mathbf{C}$ $\lvert C \rvert > 0$	$Q = -y_1^2 - y_2^2 - \ldots - y_n^2$	$-\Delta_1, \Delta_2, \ldots, (-1)^n \Delta_n$ все положительные
Эрмитова форма		$p = 0$	$\lambda_i > 0$	$A = -C^{*T}C$ $\lvert C \rvert > 0$	$Q = -z_1^* z_1 - z_2^* z_2 - \ldots - z_n^* z_n$	
			Отрицательно полуопределенная			
Действительная квадратичная форма		$r < n$	$n - r$ корней равны нулю; остальные отрицательные	$\mathbf{A} = -\mathbf{C}^T\mathbf{C}$ $\lvert \mathbf{C} \rvert = 0$	$Q = -y_1^2 - y_2^2 - \ldots - y_r^2$	$-\Delta_1, \Delta_2, \ldots, (-1)^r \Delta_r$ все положительные
Эрмитова форма	$\lvert \mathbf{A} \rvert = 0$	$p = 0$		$\mathbf{A} = -\mathbf{C}^{*T}\mathbf{C}$ $\lvert \mathbf{C} \rvert = 0$	$Q = -z_1^* z_1 - z_2^* z_2 - \ldots - z_r^* z_r$	$(-1)^r \Delta_{r+1}, \ldots, (-1)^n \Delta_{n-1}$ неположительные

дению **A** к канонической форме. Это можно сделать, исследуя главные миноры **A**. Главным минором **A** является минор, диагональные элементы которого являются также диагональными элементами **A**. *Главный минор* **A** *порядка* m, обозначаемый через Δ_m, определяется как определитель, получаемый исключением последних $n-m$ столбцов и строк **A**. Так как матрица **A** симметрическая, то главные миноры равны:

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_n = |\mathbf{A}|. \tag{4.9.13}$$

Эти главные миноры **A** называются также *дискриминантами* данной квадратичной формы.

Сейчас покажем, что действительная квадратичная форма положительно определена в том и только в том случае, если *все* ее главные миноры положительны. Исходной точкой доказательства служит уравнение (4.9.12), $\mathbf{A} = \mathbf{C}^T\mathbf{C}$. Без потери общности, пусть

$$\mathbf{C} = \Lambda^{1/2}\mathbf{D}, \tag{4.9.14}$$

где Λ — диагональная матрица с диагональными элементами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ и **D** — треугольная матрица вида

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & d_{12} & d_{13} & \ldots & d_{1n} \\ 0 & 1 & d_{23} & \ldots & d_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & d_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}.$$

Подстановка уравнения (4.9.14) в уравнение (4.9.12) дает

$$\mathbf{A} = \mathbf{D}^T\Lambda\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ d_{12} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ d_{13} & d_{23} & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d_{1n} & d_{2n} & d_{3n} & \ldots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & d_{12} & d_{13} & \ldots & d_{1n} \\ 0 & 1 & d_{23} & \ldots & d_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & d_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.9.15}$$

Если новая переменная $\mathbf{y}$ определяется линейным преобразованием

$$\mathbf{y} = \mathbf{D}\mathbf{x}, \tag{4.9.16}$$

то действительная квадратичная форма $Q = \langle \mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{x} \rangle$ может быть выражена как

$$Q = \langle \mathbf{y}, \Lambda\mathbf{y} \rangle = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2. \tag{4.9.17}$$

Действительная квадратичная форма Q положительно определена в том и только в том случае, если все диагональные элементы $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ положительные. Однако, так как матрица $\mathbf{D}$ выбрана треугольной с равными единице диагональными элементами, то определитель $\mathbf{D}$ и $\mathbf{D}^T$ равен единице. Следовательно,

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{D}^T||\Lambda||\mathbf{D}| = |\Lambda| = \lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_n. \tag{4.9.18}$$

Если переменная x_n считается равной нулю, то переменная y_n также равна нулю. Тогда квадратичная форма, соответствующая $x_n = 0$, имеет вид

$$Q^1 = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_{n-1} y_{n-1}^2.$$

На основе подобных рассуждений дискриминант квадратичной формы Δ_{n-1} будет равен

$$\Delta_{n-1} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \ldots \lambda_{n-1}. \tag{4.9.19}$$

В общем случае дискриминант Δ_k, полученный при $x_{k+1} = x_{k+2} = \ldots = x_n = 0$, равен

$$\Delta_k = \lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_k. \tag{4.9.20}$$

Решение для элементов $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \Delta_1, \\ \lambda_2 &= \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \\ \lambda_3 &= \frac{\Delta_3}{\Delta_2}, \\ &\ldots\ldots \\ \lambda_n &= \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}. \end{aligned} \tag{4.9.21}$$

Ясно, что для того, чтобы все элементы λ_i были положительными, необходимо, чтобы все *главные миноры* $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ были положительными. Таким образом, действительная квадратичная форма $Q = \langle \mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{x} \rangle$ положительно определена в том и только в том случае, если все главные миноры $\mathbf{A}$ положительны.

Для эрмитовых форм можно привести аналогичные формулировки. Полезные результаты, относящиеся к действительным квадратичным и эрмитовым формам, собраны в таблице 4.9.1. Условия отрицательной определенности форм могут быть получены, если потребовать положительную определенность матрицы $(-\mathbf{A})$.

§ 4.10. Матричные многочлены. Бесконечные ряды и функции от матриц

В этом параграфе излагаются некоторые основные идеи, относящиеся к матричным многочленам и бесконечным рядам. Теоремы, относящиеся к матричным многочленам и бесконечным рядам, имеют (с небольшими модификациями) непосредственные аналоги среди теорем для скалярных переменных. Дополнительно рассматривается несколько важных теорем о функциях от матриц. Эти теоремы существенны для решения линейных векторных дифференциальных уравнений.

Степени матриц. Произведение матриц $\mathbf{AAA}\ldots\mathbf{A}$, где $\mathbf{A}$ — квадратная матрица порядка n, можно записать в виде $\mathbf{A}^k$, где k означает число множителей, входящих в произведение. Умножение степеней матрицы следует из обычных правил скалярной алгебры. Матрица $\mathbf{A}^0$ определяется как единичная матрица порядка n.

$$\begin{gathered}\mathbf{A}^k\mathbf{A}^m = \mathbf{A}^{k+m},\\ (\mathbf{A}^k)^m = \mathbf{A}^{km},\\ \mathbf{A}^0 = \mathbf{I}_n.\end{gathered} \tag{4.10.1}$$

Те же правила справедливы при возведении матрицы в отрицательную степень при условии, что матрица неособенная, т. е. существует обратная матрица. Имеем

$$(\mathbf{A}^{-1})^m = \mathbf{A}^{-m}. \tag{4.10.2}$$

Подобные правила применяются и в случае вычисления дробной степени матрицы. Так, если $\mathbf{A}^m = \mathbf{B}$, где $\mathbf{A}$ — квадратная матрица, то $\mathbf{A}$ является корнем m-й степени $\mathbf{B}$. Не существует общего правила определения, каким количеством корней степени m обладает матрица $\mathbf{B}$, — число корней m-й степени зависит от вида матрицы.

Пример 4.10.1. Найти квадратный корень $\mathbf{A}$, где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Пусть

$$\mathbf{B}^2 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{A}.$$

Тогда

$$\begin{bmatrix} b_{11}^2 + b_{12}b_{21} & b_{12}(b_{11} + b_{22}) \\ b_{21}(b_{11} + b_{22}) & b_{12}b_{21} + b_{22}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Приравнивая соответствующие члены, имеем

$$b_{11}^2 + b_{12}b_{21} = a_{11}, \quad b_{12}(b_{11} + b_{22}) = a_{12},$$

$$b_{21}(b_{11} + b_{22}) = a_{21}, \quad b_{12}b_{21} + b_{22}^2 = a_{22}.$$

Это система из четырех нелинейных уравнений. Неединственность решения иллюстрируется на двух числовых примерах.

Пусть

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда $b_{21} = 0$, $b_{11} = \pm 2$, $b_{22} = \pm 1$ и $b_{12} = \pm \frac{1}{3}$. Квадратный корень $\mathbf{A}$ равен

$$\mathbf{B} = \pm \begin{bmatrix} 2 & 1/3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Во втором примере положим

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Одно из возможных решений

$$\mathbf{B} = \pm \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Однако это решение не является единственным. Другое решение равно

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & -b_{11} \end{bmatrix},$$

где $b_{11}^2 + b_{12}b_{21} = 4$. Следовательно, существует бесконечное число квадратных корней $\mathbf{A}$.

Матричные многочлены. Рассмотрим многочлен n-го порядка, причем аргументом многочлена служит скалярная переменная x, т. е.

$$N(x) = p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \ldots + p_1 x + p_0. \qquad (4.10.3)$$

Если скалярную переменную x заменить квадратной матрицей $\mathbf{A}$ размерности $(n \times n)$, то соответствующий матричный многочлен определяется в виде

$$\mathbf{N}(\mathbf{A}) = p_n\mathbf{A}^n + p_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \ldots + p_1\mathbf{A} + p_0\mathbf{I}_n. \qquad (4.10.4)$$

Заметим, что последний член умножен на единичную матрицу $\mathbf{I}_n$ n-го порядка.

Пример 4.10.2. Пусть $N(x)=3x^2+2x+1$ и

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Определить $\mathbf{N}(\mathbf{A})$.

$$\mathbf{N}(\mathbf{A})=3\mathbf{A}^2+2\mathbf{A}+\mathbf{I}=3\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}+2\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 17 & 14 \\ 0 & 17 \end{bmatrix}.$$

Факторизация матричного многочлена. Многочлен $N(x)$ можно представить в форме

$$N(x)=p_n(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\ldots(x-\lambda_n),$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — корни многочлена $N(x)=0$, которые предполагаются различными. Подобным образом разложение на множители матричного многочлена имеет вид

$$\mathbf{N}(\mathbf{A})=p_n(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I})\ldots(\mathbf{A}-\lambda_n\mathbf{I}). \qquad (4.10.5)$$

Эта форма используется в дальнейшем при доказательстве теоремы Сильвестра.

Бесконечные ряды матриц. Рассмотрим бесконечный ряд по скалярной переменной x

$$S(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k.$$

Если аргумент данного бесконечного ряда заменить квадратной матрицей $\mathbf{A}$ n-го порядка, то бесконечный ряд по $\mathbf{A}$ можно записать в виде

$$\mathbf{S}(\mathbf{A})=a_0\mathbf{I}_n+a_1\mathbf{A}+a_2\mathbf{A}^2+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\mathbf{A}^k. \qquad (4.10.6)$$

Можно показать, что при стремлении k к бесконечности данный ряд сходится, если сходятся соответствующие скалярные ряды $S(\lambda_i)$, $i=1, 2, \ldots, n$, где λ_i — характеристические числа $\mathbf{A}$. Детальное рассмотрение вопросов сходимости матричных рядов здесь не приводится ввиду их сложности. Укажем некоторые из наиболее важных бесконечных матричных рядов. Геометрический ряд:

$$\mathbf{G}(\mathbf{A})=\mathbf{I}+a\mathbf{A}+a^2\mathbf{A}^2+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}a^k\mathbf{A}^k. \qquad (4.10.7)$$

Экспоненциальная функция:

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}}&=\exp\mathbf{A}=\mathbf{I}+\mathbf{A}+\frac{\mathbf{A}^2}{2!}+\frac{\mathbf{A}^3}{3!}+\ldots+\frac{\mathbf{A}^k}{k!}+\ldots \\ e^{-\mathbf{A}}&=\exp(-\mathbf{A})=\mathbf{I}-\mathbf{A}+\frac{\mathbf{A}^2}{2!}-\frac{\mathbf{A}^3}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^k\mathbf{A}^k}{k!}+\ldots \end{aligned} \qquad (4.10.8)$$

Можно показать, что этот ряд сходится равномерно и абсолютно [13]. Умножение скаляров $e^x e^y$ можно записать как $e^x e^y$, так и $e^y e^x$; однако соответствующее произведение матриц $e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}}$ нельзя представить в виде $e^{\mathbf{B}} e^{\mathbf{A}}$, если матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ некоммутативны. Поэтому

$$e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{B}} e^{\mathbf{A}} = e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}, \quad \text{если} \quad \mathbf{AB} = \mathbf{BA}. \tag{4.10.9}$$

Ясно, что это условие выполняется при $\mathbf{B} = \mathbf{A}$ или $\mathbf{B} = -\mathbf{A}$. При $\mathbf{B} = -\mathbf{A}$ уравнение (4.10.9) получается так:

$$e^{\mathbf{A}} e^{-\mathbf{A}} = e^{(\mathbf{A}-\mathbf{A})} = \mathbf{I}. \tag{4.10.10}$$

Из уравнения (4.10.10) можно заключить, что $(e^{\mathbf{A}})^{-1} = e^{-\mathbf{A}}$ или что $e^{-\mathbf{A}}$ является матрицей обратной $e^{\mathbf{A}}$. Синусоидальная функция:

$$\sin \mathbf{A} = \mathbf{A} - \frac{\mathbf{A}^3}{3!} + \frac{\mathbf{A}^5}{5!} + \ldots = \frac{\exp[j\mathbf{A}] - \exp[-j\mathbf{A}]}{2j}. \tag{4.10.11}$$

Косинусоидальная функция:

$$\cos \mathbf{A} = \mathbf{I} - \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^4}{4!} - \ldots = \frac{\exp[j\mathbf{A}] + \exp[-j\mathbf{A}]}{2}, \tag{4.10.12}$$

где комплексная экспонента определяется заменой в уравнении (4.10.8) $\mathbf{A}$ на $j\mathbf{A}$:

$$\exp(j\mathbf{A}) = \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^4}{4!} - \ldots\right) + \\ + j\left(\mathbf{A} - \frac{\mathbf{A}^3}{3!} + \frac{\mathbf{A}^5}{5!} - \ldots\right) = \cos \mathbf{A} + j \sin \mathbf{A}, \tag{4.10.13}$$

$$\exp(-j\mathbf{A}) = \cos \mathbf{A} - j \sin \mathbf{A}.$$

Гиперболический синус:

$$\operatorname{sh} \mathbf{A} = \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^3}{3!} + \frac{\mathbf{A}^5}{5!} + \ldots = \frac{\exp \mathbf{A} - \exp(-\mathbf{A})}{2}. \tag{4.10.14}$$

Гиперболический косинус:

$$\operatorname{ch} \mathbf{A} = \mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^4}{4!} + \ldots = \frac{\exp \mathbf{A} + \exp(-\mathbf{A})}{2}. \tag{4.10.15}$$

Тригонометрические тождества. Матричные тригонометрические тождества имеют соответствующие аналоги скалярных тригонометрических тождеств и выводятся с использованием приведенных выше определений матричных тригонометрических функций. Например, равенство

$$\operatorname{ch}^2 \mathbf{A} - \operatorname{sh}^2 \mathbf{A} = \mathbf{I} \tag{4.10.16}$$

выводится на основе

$$\operatorname{ch}^2 \mathbf{A} = \left(\frac{\exp \mathbf{A} + \exp(-\mathbf{A})}{2}\right)\left(\frac{\exp \mathbf{A} + \exp(-\mathbf{A})}{2}\right) = \frac{\exp 2\mathbf{A} + \exp(-2\mathbf{A})}{4} + \frac{\mathbf{I}}{2},$$

$$\operatorname{sh}^2 \mathbf{A} = \left(\frac{\exp \mathbf{A} - \exp(-\mathbf{A})}{2}\right)\left(\frac{\exp \mathbf{A} - \exp(-\mathbf{A})}{2}\right) = \frac{\exp 2\mathbf{A} + \exp(-2\mathbf{A})}{4} - \frac{\mathbf{I}}{2}.$$

Действительная матрица размерности (2×2), аналог скалярной величине $j = \sqrt{-1}$, определяется как

$$\mathbf{J}_0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.10.17}$$

Заметим, что $\mathbf{J}_0^2 = -\mathbf{I}$, $\mathbf{J}_0^3 = -\mathbf{J}_0$, $\mathbf{J}_0^4 = \mathbf{I}$, ..., и т. д. Данная матрица оказывается полезной при выводе ряда тригонометрических тождеств. Например, если $\mathbf{A} = a\mathbf{J}_0$, то уравнение (4.10.11) записывается как

$$\sin(a\mathbf{J}_0) = a\mathbf{J}_0 + \frac{a^3\mathbf{J}_0}{3!} + \frac{a^5}{5!}\mathbf{J}_0 + \ldots = \mathbf{J}_0 \operatorname{sh} a. \tag{4.10.18}$$

Подобным образом

$$\cos(a\mathbf{J}_0) = \mathbf{I} \operatorname{ch} a. \tag{4.10.19}$$

Теорема Кэли — Гамильтона. Обобщение уравнения (4.7.18) в виде $\mathbf{A}^p = \mathbf{M}\Lambda^p\mathbf{M}^{-1}$ позволяет получить интересное и полезное соотношение. Если $N(\lambda)$ — многочлен от λ вида

$$N(\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \ldots + c_{n-1}\lambda + c_n,$$

то тогда согласно этому обобщению многочлен с переменной $\mathbf{A}$ равен

$$\mathbf{N}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + c_1\mathbf{A}^{n-1} + \ldots + c_{n-1}\mathbf{A} + c_n\mathbf{I} = \mathbf{M}\mathbf{N}(\Lambda)\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}\begin{bmatrix} N(\lambda_1) & & & & \\ & N(\lambda_2) & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ & & & & N(\lambda_n) \end{bmatrix}\mathbf{M}^{-1}, \tag{4.10.20}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — не нули многочлена $N(\lambda)$.

Если выбранный многочлен является характеристическим многочленом, т. е. $N(\lambda)=P(\lambda)$, то $N(\lambda_1)=N(\lambda_2)=\ldots=N(\lambda_n)=0$. Отсюда следует

$$\mathbf{P}(\mathbf{A})=[0], \quad \text{где} \quad P(\lambda)=|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}|. \tag{4.10.21}$$

Полученный результат известен как *теорема Кэли — Гамильтона*. Из данной теоремы следует, что «матрица **A** удовлетворяет своему собственному характеристическому уравнению». Приведенное доказательство основывалось на предположении о том, что характеристические корни **A** различные. Однако можно показать, что теорема справедлива для произвольной *квадратной* матрицы [14]. Знание данной теоремы чрезвычайно важно для нахождения различных функций от матрицы **A**.

Пример 4.10.3. Матрица

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

имеет характеристический многочлен

$$P(\lambda)=\lambda^2+3\lambda+2.$$

Показать, что $\mathbf{P}(\mathbf{A})=[0]$.

Подстановка **A** вместо λ дает

$$\mathbf{P}(\mathbf{A})=\mathbf{A}^2+3\mathbf{A}+2\mathbf{I}=\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}+3\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}+2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, $\mathbf{P}(\mathbf{A})=$ нулевой матрице $=[0]$.

Пример 4.10.4. На основе теоремы Кэли — Гамильтона найти $\mathbf{A}^{-1}$ для матрицы, приведенной в предыдущем примере.

Так как **A** удовлетворяет своему характеристическому уравнению, то

$$\mathbf{A}^2+3\mathbf{A}+2\mathbf{I}=[0]$$

или

$$\mathbf{A}+3\mathbf{I}+2\mathbf{A}^{-1}=[0].$$

Следовательно,

$$\mathbf{A}^{-1}=-\frac{1}{2}\mathbf{A}-\frac{3}{2}\mathbf{I}=\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Зачастую это удобный способ вычисления обратной матрицы.

Понижение порядка многочленов. На основе теоремы Кэли — Гамильтона можно представить многочлен n-го порядка от матрицы **A** в виде линейной комбинации $\mathbf{I}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^2$, ..., $\mathbf{A}^{n-1}$ или многочлена n-й степени относительно **A**. Наилучшим образом это иллюстрируется на примере.

Пример 4.10.5. Найти $\mathbf{N}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^4 + \mathbf{A}^3 + \mathbf{A}^2 + \mathbf{A} + \mathbf{I}$, если

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$. Следовательно,

$$\mathbf{A}^2 + 3\mathbf{A} + 2\mathbf{I} = [0] \quad \text{или} \quad \mathbf{A}^2 = -3\mathbf{A} + 2\mathbf{I}.$$

В результате имеем:

$$\mathbf{A}^4 = 9\mathbf{A}^2 + 12\mathbf{A} + 4\mathbf{I} = 9(-3\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) + 12\mathbf{A} + 4\mathbf{I} = -15\mathbf{A} - 14\mathbf{I}.$$

Подобным же образом:

$$\mathbf{A}^3 = -3\mathbf{A}^2 - 2\mathbf{A} = -3(-3\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) - 2\mathbf{A} = 7\mathbf{A} + 6\mathbf{I}.$$

Поэтому

$$\mathbf{N}(\mathbf{A}) = (-15\mathbf{A} - 14\mathbf{I}) + (7\mathbf{A} + 6\mathbf{I}) + (-3\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) + \mathbf{A} + \mathbf{I} =$$
$$= -10\mathbf{A} - 9\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -9 & -10 \\ 20 & 21 \end{bmatrix}.$$

Это многочлен первой степени от $\mathbf{A}$.

Теорема Сильвестра *). Теорема Сильвестра представляет собой эффективный метод получения функции от матрицы, если эта функция может выражаться в виде матричного многочлена. Приведем формулировку теоремы Сильвестра для случая n различных корней матрицы $\mathbf{A}$.

Если $\mathbf{N}(\mathbf{A})$ — матричный многочлен от $\mathbf{A}$ и если квадратная матрица $\mathbf{A}$ содержит n различных характеристических чисел, то многочлен от $\mathbf{A}$ можно записать в виде

$$\mathbf{N}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} N(\lambda_i)\,\mathbf{Z}_0(\lambda_i), \tag{4.10.22}$$

где

$$\mathbf{Z}_0(\lambda_i) = \frac{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I})}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (\lambda_i - \lambda_j)}.$$

Согласно теореме Кэли — Гамильтона произвольный матричный многочлен $N(\mathbf{A})$ заменяется многочленом от $\mathbf{A}$ с наивысшей степенью $n-1$. Поэтому $\mathbf{N}(\mathbf{A})$ можно записать как

$$\mathbf{N}(\mathbf{A}) = a_1\mathbf{A}^{n-1} + a_2\mathbf{A}^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\mathbf{A} + a_n\mathbf{I}. \tag{4.10.23}$$

*) Приводимое доказательство этой теоремы близко к доказательству, данному в [15].

Для доказательства теоремы Сильвестра запишем уравнение (4.10.23) в виде

$$\begin{aligned}\mathbf{N}(\mathbf{A}) = {} & c_1[(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I})(\mathbf{A}-\lambda_3\mathbf{I})\ldots(\mathbf{A}-\lambda_n\mathbf{I})] + \\ & + c_2[(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})(\mathbf{A}-\lambda_3\mathbf{I})\ldots(\mathbf{A}-\lambda_n\mathbf{I})] + \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ & + c_k\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}(\mathbf{A}-\lambda_j\mathbf{I}) + \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ & + c_n[(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I})\ldots\ \mathbf{A}-\lambda_{n-1}\mathbf{I})]\end{aligned}$$

или

$$\mathbf{N}(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^{n} c_k \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I}). \tag{4.10.24}$$

Очевидно, что многочлен $\mathbf{N}(\mathbf{A})$ имеет степень $n-1$ и содержит n произвольных постоянных (каждый из членов содержит $n-1$ сомножителей). Обозначив характеристические векторы $\mathbf{A}$ через $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ и умножив уравнение (4.10.24) справа на $\mathbf{u}_i$, получим соотношение

$$\mathbf{N}(\mathbf{A})\,\mathbf{u}_i = \left[\sum_{k=1}^{n} c_k \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}(\mathbf{A}-\lambda_j\mathbf{I})\right]\mathbf{u}_i. \tag{4.10.25}$$

Однако, так как $\mathbf{A}\mathbf{u}_i = \lambda_i\mathbf{u}_i$ или $(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I})\,\mathbf{u}_i = \mathbf{0}$, то все члены, кроме i-го, равны нулю. i-й член отличен от нуля, так как он не содержит множителя $(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I})$.

Следовательно,

$$\mathbf{N}(\mathbf{A})\,\mathbf{u}_i = \left[c_i \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I})\right]\mathbf{u}_i = \left[c_i \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(\lambda_i-\lambda_j)\right]\mathbf{u}_i. \tag{4.10.26}$$

Если характеристические числа $\mathbf{A}$ различны, то $\mathbf{N}(\mathbf{A})\mathbf{u}_i = N(\lambda_i)\mathbf{u}_i$, откуда

$$c_i = \frac{N(\lambda_i)}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(\lambda_i-\lambda_j)}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{N}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} N(\lambda_i) \frac{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} (\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I})}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} (\lambda_i - \lambda_j)},$$

что и завершает доказательство теоремы Сильвестра.

Пример 4.10.6. Для матрицы $\mathbf{A}$ из примера 4.10.5, используя теорему Сильвестра, вычислить $e^{\mathbf{A}}$.

Так как $e^{\mathbf{A}}$ раскладывается в бесконечный сходящийся ряд по $\mathbf{A}$, то теорему Сильвестра можно непосредственно использовать для $e^{\mathbf{A}}$, а не бесконечного ряда по $\mathbf{A}$. Очевидно, что если бесконечный ряд для $e^{\mathbf{A}}$ сходится, то применима теорема Сильвестра. Следовательно,

$$e^{\mathbf{A}} = \sum_{i=1}^{2} e^{\lambda_i} \mathbf{Z}_0(\lambda_i),$$

где

$$\mathbf{Z}_0(\lambda_1) = \frac{\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad \text{и} \quad \mathbf{Z}_0(\lambda_2) = \frac{\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Для

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

и $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$ имеем

$$\mathbf{Z}_0(\lambda_1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z}_0(\lambda_2) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$e^{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2e^{-1} - e^{-2} & e^{-1} - e^{-2} \\ -2(e^{-1} - e^{-2}) & -(e^{-1} - 2e^{-2}) \end{bmatrix}.$$

Пример 4.10.7. Для матрицы $\mathbf{A}$ предыдущего примера определить, используя теорему Сильвестра, $\mathbf{A}^k$.

$$\mathbf{A}^k = \sum_{i=1}^{2} (\lambda_i)^k \mathbf{Z}_0(\lambda_i).$$

На основе $\mathbf{Z}_0(\lambda_1)$ и $\mathbf{Z}_0(\lambda_2)$, определенных в предыдущем примере, имеем

$$\mathbf{A}^k = \begin{bmatrix} 2(-1)^k - (-2)^k & (-1)^k - (-2)^k \\ -2(-1)^k + 2(-2)^k & -(-1)^k + 2(-2)^k \end{bmatrix}.$$

Можно показать [16], что

$$\frac{\prod\limits_{j \neq i} (\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I})}{\prod\limits_{j \neq i} (\lambda_i - \lambda_j)} = \left. \frac{\operatorname{Adj}[\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}]}{dP(\lambda)/d\lambda} \right|_{\lambda = \lambda_i}, \tag{4.10.27}$$

где $P(\lambda)$ — характеристический многочлен $\mathbf{A}$, а потому уравнение (4.10.22) также записывается в виде

$$\mathbf{N}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{N(\lambda_i)\,\mathrm{Adj}\,[\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A}]}{dP(\lambda)/d\lambda\,|_{\lambda=\lambda_i}}. \tag{4.10.28}$$

Теорема Сильвестра. Вырожденная форма. Уравнение (4.10.28) нуждается в модификации, если матрица $\mathbf{A}$ содержит кратные характеристические числа. Модифицированная форма уравнения (4.10.28) называется вырожденной формой теоремы Сильвестра *). Предположим, что характеристический корень имеет порядок s. Можно показать, что составляющая $\mathbf{N}(\mathbf{A})$, обусловленная i-м корнем λ_i, равна

$$\frac{1}{(s-1)!}\left\{\frac{d^{s-1}}{d\lambda^{s-1}}\left[\frac{N(\lambda)\,\mathrm{Adj}\,(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}(\lambda-\lambda_j)^s}\right]\right\}_{\lambda=\lambda_i}. \tag{4.10.29}$$

Сумма составляющих, обусловленных всеми различными корнями, и образует $\mathbf{N}(\mathbf{A})$. Значит,

$$\mathbf{N}(\mathbf{A}) = \sum_i \frac{1}{(s-1)!}\left\{\frac{d^{s-1}}{d\lambda^{s-1}}\left[\frac{N(\lambda)\,\mathrm{Adj}\,(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}(\lambda-\lambda_j)^s}\right]\right\}_{\lambda=\lambda_i}, \tag{4.10.30}$$

где суммирование производится по всем корням, причем кратные корни входят в сумму только один раз.

Уравнение (4.10.30) представляет собой вырожденную форму теоремы Сильвестра. Член суммы, соответствующий кратному корню λ_i, можно представить в виде

$$\frac{1}{(s-1)!}\left\{\frac{d^{s-1}}{d\lambda^{s-1}}\left[\frac{N(\lambda)\,\mathrm{Adj}\,(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}(\lambda-\lambda_j)^s}\right]\right\}_{\lambda=\lambda_i} = \sum_{k=1}^{s}\frac{N^{(k-1)}(\lambda_i)\,\mathbf{Z}_{s-k}(\lambda_i)}{(k-1)!}, \tag{4.10.31}$$

где

$$N^{(k)}(\lambda_i) = \frac{d^k N(\lambda)}{d\lambda^k}\bigg|_{\lambda=\lambda_i}$$

и

$$\mathbf{Z}_k(\lambda_i) = \frac{1}{k!}\left\{\frac{d^k}{d\lambda^k}\left[\frac{\mathrm{Adj}\,(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}(\lambda-\lambda_j)^s}\right]\right\}_{\lambda=\lambda_i}.$$

*) Доказательство теоремы для этого случая можно найти в [17].

Пример 4.10.8. Найти общий вид произвольной матричной функции от $\mathbf{A}$, представленной в виде матричного многочлена,

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 2 \\ -5 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Из вычисления

$$|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}|=P(\lambda)=\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$$

следует, что характеристическое уравнение содержит два корня $\lambda=1$ и один корень $\lambda=2$. Составляющая $\mathbf{N}(\mathbf{A})$, обусловленная простым корнем, равна

$$\frac{\mathbf{N}(2)\operatorname{Adj}(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})|_{\lambda=2}}{(2-1)^2}.$$

Так как

$$\operatorname{Adj}[\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}]=\begin{bmatrix} (\lambda^2-4\lambda-4) & (\lambda+2) & (3\lambda+2) \\ (6\lambda-34) & (\lambda^2-4\lambda+15) & (2\lambda+18) \\ (12-5\lambda) & (2\lambda-5) & (\lambda^2-6) \end{bmatrix}$$

и

$$\operatorname{Adj}[\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}]_{\lambda=2}=\begin{bmatrix} -8 & 4 & 8 \\ -22 & 11 & 22 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix},$$

то составляющая $\mathbf{N}(\mathbf{A})$, порождаемая простым корнем $\lambda=2$, равна

$$N(2)\begin{bmatrix} -8 & 4 & 8 \\ -22 & 11 & 22 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Составляющая $\mathbf{N}(\mathbf{A})$, обусловленная кратным корнем $\lambda=1$, равна

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\frac{N(\lambda)\operatorname{Adj}[\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}]}{\lambda-2}\right]_{\lambda=1}$$

или, согласно уравнению 4.10.31, имеем

$$\mathbf{Z}_1(1)=\frac{d}{d\lambda}\left[\frac{\operatorname{Adj}(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})}{\lambda-2}\right]_{\lambda=1}=\left[-\operatorname{Adj}(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})-\frac{d}{d\lambda}\operatorname{Adj}(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})\right]_{\lambda=1},$$

$$\mathbf{Z}_0(1)=-\operatorname{Adj}[\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}]_{\lambda=1}.$$

Из

$$\frac{d}{d\lambda}\{\operatorname{Adj}[\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}]\}=\begin{bmatrix} 2\lambda-4 & 1 & 3 \\ 6 & 2\lambda-4 & 2 \\ -5 & 2 & 2\lambda \end{bmatrix}$$

следует, что

$$\mathbf{Z}_1(1)=\begin{bmatrix} 7 & -3 & -5 \\ 28 & -12 & -20 \\ -7 & 3 & 5 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -6 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9 & 4 & -8 \\ 22 & -10 & -22 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Z}_0(1)=\begin{bmatrix} 7 & -3 & -5 \\ 28 & -12 & -20 \\ -7 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, составляющая $\mathbf{N}(\mathbf{A})$, порождаемая кратным корнем $\lambda=1$, имеет вид

$$N(1)\,\mathbf{Z}_1(1)+\frac{d}{d\lambda}N(\lambda)\,|_{\lambda=1}\,\mathbf{Z}_0(1).$$

Сумма всех составляющих тогда равна

$$\mathbf{N}(\mathbf{A})=N(2)\begin{bmatrix} -8 & 4 & 8 \\ -22 & 11 & 22 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}+$$

$$+N(1)\begin{bmatrix} 9 & -4 & -8 \\ 22 & -10 & -22 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}+\frac{dN(\lambda)}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=1}\begin{bmatrix} 7 & -3 & -5 \\ 28 & -12 & -20 \\ -7 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Пусть, например, $\mathbf{N}(\mathbf{A})=e^{\mathbf{A}t}$ или $N(\lambda)=e^{\lambda t}$. Тогда

$$N(2)=e^{2t},\quad N(1)=e^{t}\quad \text{и}\quad \frac{dN(\lambda)}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=1}=te^{t}$$

и

$$\mathbf{N}(\mathbf{A})=e^{\mathbf{A}t}=$$

$$=\begin{bmatrix} (9e^t+7te^t-8e^{2t}) & (-4e^t-3te^t+4e^{2t}) & (-8e^t-5te^t+8e^{2t}) \\ (22e^t+28te^t-22e^{2t}) & (-10e^t-12te^t+11e^{2t}) & (-22e^t-20te^t+22e^{2t}) \\ (-2e^t-7te^t+2e^{2t}) & (e^t-3te^t-e^{2t}) & (3e^t+5te^t-2e^{2t}) \end{bmatrix}.$$

Метод Кэли — Гамильтона. Кроме описанной процедуры вычисления функции от матрицы, существует схема (которая зачастую проще приведенной), основанная на теореме Кэли — Гамильтона. Сначала рассмотрим случай, когда степень матричного многочлена $\mathbf{N}(\mathbf{A})$ выше, чем порядок $\mathbf{A}$.

Разделив $N(\lambda)$ на характеристический многочлен $\mathbf{A}$, получим

$$\frac{N(\lambda)}{P(\lambda)}=Q(\lambda)+\frac{R(\lambda)}{P(\lambda)}, \tag{4.10.32}$$

где $R(\lambda)$ — остаточный член. Тогда, умножив уравнение (4.10.32) на $P(\lambda)$, в результате получим

$$N(\lambda)=Q(\lambda)\,P(\lambda)+R(\lambda). \tag{4.10.33}$$

При $P(\lambda)=0$ уравнение (4.10.33) превращается в

$$N(\lambda)=R(\lambda). \tag{4.10.34}$$

Соответственно, так как (согласно теореме Кэли — Гамильтона) $\mathbf{P}[\mathbf{A}]=[0]$, то матричная функция $\mathbf{N}(\mathbf{A})$ равна $\mathbf{R}(\mathbf{A})$.

Пример 4.10.9. Решить пример 4.10.5, используя метод Кэли — Гамильтона.

$$\mathbf{N}(\mathbf{A})=\mathbf{A}^4+\mathbf{A}^3+\mathbf{A}^2+\mathbf{A}+\mathbf{I}$$

или

$$N(\lambda)=\lambda^4+\lambda^3+\lambda^2+\lambda+1.$$

Характеристический многочлен

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

равен $\lambda^2+3\lambda+2=0$. Разделив $N(\lambda)$ на $P(\lambda)$, получим

$$\frac{\lambda^4+\lambda^3+\lambda^2+\lambda+1}{\lambda^2+3\lambda+2}=\lambda^2-2\lambda+5+\frac{(-10\lambda-9)}{\lambda^2+3\lambda+2}.$$

Тогда остаточный член $R(\lambda)$ равен $R(\lambda)=-10\lambda-9$. Поэтому $\mathbf{N}(\mathbf{A})=\mathbf{R}(\mathbf{A})=-10\mathbf{A}-9\mathbf{I}$, что целиком совпадает с результатом, полученным в примере 4.10.5.

Описанный выше метод справедлив только для случая, когда $\mathbf{N}(\mathbf{A})$ является полиномиальной функцией от $\mathbf{A}$. Предыдущий метод можно распространить на случай, когда требуется определить $\mathbf{F}(\mathbf{A})$, где $F(\lambda)$ — аналитическая функция λ в окрестности начала координат. Если $F(\lambda)$ является аналитической функцией в какой-либо области, то она может быть в этой области представлена в виде бесконечного сходящегося ряда по λ. Поэтому функция $\mathbf{F}(\mathbf{A})$ может быть представлена в виде многочлена от $\mathbf{A}$ степени $n-1$. Следовательно, остаточный член $R(\lambda)$ уравнения (4.10.33) должен быть многочленом степени $n-1$. Из этого следует, что если $Q(\lambda)$ — аналитическая функция в области, то

$$F(\lambda)=Q(\lambda)P(\lambda)+R(\lambda), \tag{4.10.35}$$

где $P(\lambda)$ — характеристический многочлен $\mathbf{A}$, а $R(\lambda)$ — многочлен вида

$$R(\lambda)=\alpha_0+\alpha_1\lambda+\alpha_2\lambda^2+\ldots+\alpha_{n-1}\lambda^{n-1}. \tag{4.10.36}$$

Коэффициенты $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ находятся путем последовательной подстановки $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ в уравнение (4.10.35). Учитывая, что $P(\lambda_i)=0$, получим уравнения

$$\left.\begin{aligned} F(\lambda_1)&=R(\lambda_1),\\ F(\lambda_2)&=R(\lambda_2),\\ &\cdots\cdots\\ F(\lambda_n)&=R(\lambda_n). \end{aligned}\right\} \tag{4.10.37}$$

Это — система n линейных уравнений относительно n неизвестных. Следовательно, все коэффициенты многочлена $R(\lambda)$ определяются однозначно.

Теперь остается показать, что

$$Q(\lambda) = \frac{F(\lambda) - R(\lambda)}{P(\lambda)} \tag{4.10.38}$$

является аналитической функцией λ. Так как нули знаменателя $Q(\lambda)$ служат также нулями и числителя, то функция $Q(\lambda)$ является аналитической в области аналитичности $F(\lambda)$. Поэтому уравнение (4.10.35) справедливо для всех значений λ в области аналитичности $F(\lambda)$. Из этого следует, что если область аналитичности содержит все характеристические числа $\mathbf{A}$, то вместо переменной λ можно подставить $\mathbf{A}$. Подстановка дает

$$\mathbf{F}(\mathbf{A}) = \mathbf{Q}(\mathbf{A})\,\mathbf{P}(\mathbf{A}) + \mathbf{R}(\mathbf{A}). \tag{4.10.39}$$

Так как согласно теореме Кэли — Гамильтона $\mathbf{P}(\mathbf{A})$ тождественно равен нулю, то из этого следует, что

$$\mathbf{F}(\mathbf{A}) = \mathbf{R}(\mathbf{A}), \tag{4.10.40}$$

т. е. требуемый результат.

Прежде чем рассматривать на примерах изложенный метод, исследуем задачу кратных характеристических корней. Очевидно, что если $\mathbf{A}$ содержит характеристический корень λ_i порядка s, в результате подстановки λ_i в уравнение (4.10.35) получим лишь одно линейно независимое уравнение. Остальные $s-1$ линейных уравнений, которые необходимо получить для нахождения α_i, находятся дифференцированием обеих частей уравнения (4.10.35). Поэтому, если $\mathbf{A}$ имеет характеристическое число порядка s, для нахождения единственного решения для коэффициентов многочлена уравнения (4.10.36) необходимо составить систему линейных уравнений вида

$$\left.\frac{d^k F(\lambda)}{d\lambda^k}\right|_{\lambda=\lambda_i} = \left.\frac{d^k R(\lambda)}{d\lambda^k}\right|_{\lambda=\lambda_i}, \qquad k = 0, 1, \ldots, s-1. \tag{4.10.41}$$

Пример 4.10.10. Найти $e^{\mathbf{A}t}$, используя в качестве $\mathbf{A}$ матрицу примера 4.10.9.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = -2.$$

Так как $\mathbf{A}$ — матрица второго порядка, то многочлен $R(\lambda)$ — первого порядка, т. е.

$$R(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda.$$

Поэтому в результате подстановки λ_1 и λ_2 в уравнение (4.10.35) получим два линейных уравнения

$$F(\lambda_1) = R(\lambda_1), \qquad F(\lambda_2) = R(\lambda_2),$$
$$e^{\lambda_1 t} = \alpha_0 + \alpha_1\lambda_1, \qquad e^{\lambda_2 t} = \alpha_0 + \alpha_1\lambda_2,$$
$$e^{-t} = \alpha_0 - \alpha_1, \qquad e^{-2t} = \alpha_0 - 2\alpha_1,$$

откуда

$$\alpha_0 = 2e^{-t} - e^{-2t},$$
$$\alpha_1 = e^{-t} - e^{-2t}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{F}(\mathbf{A}) = e^{\mathbf{A}t} = \alpha_0\mathbf{I} + \alpha_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & 0 \\ 0 & \alpha_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \alpha_1 \\ -2\alpha_1 & -3\alpha_1 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2(e^{-t} - e^{-2t}) & -(e^{-t} - 2e^{-2t}) \end{bmatrix}.$$

Пример 4.10.11. Определить $e^{\mathbf{A}t}$, где $\mathbf{A}$ — матрица из примера 4.10.8.

Данная матрица имеет два корня $\lambda=1$ и один корень $\lambda=2$. Так как это матрица третьего порядка, многочлен $R(\lambda)$ равен $R(\lambda)=\alpha_0+\alpha_1\lambda+\alpha_2\lambda^2$. Три уравнения относительно α_i задаются $F(\lambda_1)=R(\lambda_1)$ и

$$\left.\frac{dF(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_1} = \left.\frac{dR(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_1},$$

где $\lambda_1=1$, и $F(\lambda_2)=R(\lambda_2)$, причем $\lambda_2=2$. Таким образом, α_i определяются из системы

$$\begin{bmatrix} e^t \\ te^t \\ e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix},$$

откуда имеем

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^t \\ te^t \\ e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Поучительно решить эту систему уравнений, используя теорему Кэли — Гамильтона с целью нахождения матрицы, обратной матрице коэффициентов. Характеристический многочлен матрицы коэффициентов равен $\lambda^3-6\lambda^2+4\lambda-1=0$. Следовательно,

$$\mathbf{C}^3 - 6\mathbf{C}^2 + 4\mathbf{C} + 4\mathbf{I} = [0], \text{ где } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}^2 - 6\mathbf{C} + 4\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Поэтому

$$\alpha_0 = -2te^t + e^{2t},$$
$$\alpha_1 = 2e^t + 3te^t - 2e^{2t},$$
$$\alpha_2 = -e^t - te^t + e^{2t}.$$

Следовательно,

$$e^{\mathbf{A}t} = \alpha_0\mathbf{I} + \alpha_1\mathbf{A} + \alpha_0\mathbf{A}^2,$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 2 \\ -5 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} -9 & 6 & 14 \\ -10 & 10 & 26 \\ -8 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

В результате имеем

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} (9e^t + 7te^t - 8e^{2t}) & (-4e^t - 3te^t + 4e^{2t}) & (-8e^t - 5te^t + 8e^{2t}) \\ (22e^t + 28te^t - 22e^{2t}) & (-10e^t - 12te^t + 11e^{2t}) & (-22e^t - 20te^t + 22e^{2t}) \\ (-2e^t - 7te^t + 2e^{2t}) & (e^t + 3te^t - e^{2t}) & (3e^t + 5te^t - 2e^{2t}) \end{bmatrix}.$$

Эта матрица совпадает с полученной в примере 4.10.8 на основе теоремы Сильвестра. Любой из методов требует значительного труда; обычно с этим сталкиваются, когда порядок матрицы больше двух. Как правило, метод Кэли — Гамильтона связан с гораздо меньшими трудностями, чем при использовании теоремы Сильвестра.

Пример 4.10.12. Обобщить рассмотренный выше метод Кэли — Гамильтона на произвольные аналитические функции от **A**. Предполагается, что **A** имеет различные характеристические числа.

n уравнений, определяющие коэффициенты α_i, записываются в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} F(\lambda_1) \\ F(\lambda_2) \\ \cdots \\ F(\lambda_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \ldots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \cdots \\ \alpha_{n-1} \end{bmatrix},$$

или $\mathbf{F}(\lambda) = \mathbf{C}\alpha$, где $\mathbf{C}$ — приведенная матрица коэффициентов. Имеем $\alpha = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{F}(\lambda)$. Следовательно,

$$\mathbf{F}(\mathbf{A}) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \mathbf{A}^i,$$

где α_i определяются из уравнения $\alpha = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{F}(\lambda)$.

Альтернативная процедура, опять-таки в предположении различных корней, должна привести **A** к диагональному виду посредством преобразования подобия. Эта процедура иллюстрируется на простом примере.

В примере 4.7.6 рассматривалась матрица

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Определенные там модальные матрицы **M** и $\mathbf{M}^{-1}$ равны

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{2} & -2/\sqrt{5} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{5} & -\sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}\Lambda\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{M}^{-1}.$$

Из обобщения уравнения (4.10.20) имеем $\mathbf{F}(\mathbf{A}) = \mathbf{M}\mathbf{F}(\Lambda)\mathbf{M}^{-1}$. Если требуется найти $\mathbf{F}(\mathbf{A}) = e^{\mathbf{A}t}$, то

$$\mathbf{F}(\mathbf{A}) = \mathbf{M}\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}\mathbf{M}^{-1}.$$

В результате выполнения указанных операций умножения матриц получим

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2\left(e^{-t} - e^{-2t}\right) & -\left(e^{-t} - 2e^{-2t}\right) \end{bmatrix},$$

что совпадает с результатом примера 4.10.10.

Процедура нахождения аналитической функции от матрицы по известной модальной матрице очень удобна. Однако эта процедура требует выполнения всех операций, связанных с анализом характеристических векторов.

§ 4.11. Дополнительные сведения о матрицах

Известные понятия дифференцирования и интегрирования первоначально разработанные для скалярных переменных, переносятся на матрицы и произведения матриц при условии, что сохраняется первоначальный порядок входящих множителей. Однако, учитывая, что подобные действия часто выполняются в последних главах над экспоненциальными функциями от матриц и квадратичными формами, их рассмотрение дается специально в этом аспекте.

Дифференцирование экспоненциальной функции. Если $\mathbf{A}$ — постоянная матрица, а t — скалярная переменная, то экспоненциальная функция $e^{\mathbf{A}t}$ определяется подобно уравнению (4.10.8) в виде бесконечного ряда

$$e^{\mathbf{A}t} = \exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3t^3}{3!} + \ldots \tag{4.11.1}$$

Этот ряд сходится равномерно и абсолютно для всех значений скалярной переменной t. Производная от экспоненциальной функции $e^{\mathbf{A}t}$ по t находится почленным дифференцированием уравнения (4.11.1) или

$$\frac{d}{dt}\left[e^{\mathbf{A}t}\right] = \mathbf{A} + \mathbf{A}^2t + \frac{\mathbf{A}^3t^2}{2!} + \ldots = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A}. \tag{4.11.2}$$

Введя оператор $p = d/dt$, получим

$$\frac{d^k}{dt^k}\left[e^{\mathbf{A}t}\right] = p^k\left(e^{\mathbf{A}t}\right) = \mathbf{A}^k e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A}^k. \tag{4.11.3}$$

В общем случае, если $N(p)$ — многочлен от оператора дифференцирования p, то

$$N(p)\,e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{N}(\mathbf{A})\,e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{N}(\mathbf{A}). \tag{4.11.4}$$

Распространен случай воздействия операторного многочлена $N(p)$ на произведение матриц $e^{\mathbf{A}t}\boldsymbol{B}(t)$. Предполагается, что существует произведение $\mathbf{A}\mathbf{B}(t)$ и не существует $\mathbf{B}(t)\mathbf{A}$. В этом случае

$$p\,[e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}(t)] = e^{\mathbf{A}t}\dot{\mathbf{B}}(t) + e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A}\mathbf{B}(t) = e^{\mathbf{A}t}[p\mathbf{I} + \mathbf{A}]\,\mathbf{B}(t),$$

$$p^2\,[e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}(t)] = e^{\mathbf{A}t}\ddot{\mathbf{B}}(t) + 2e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A}\dot{\mathbf{B}}(t) + e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A}^2\mathbf{B}(t) = e^{\mathbf{A}t}(p\mathbf{I} + \mathbf{A})^2\,\mathbf{B}(t).$$

В общем случае

$$p^k\,[e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}(t)] = e^{\mathbf{A}t}(p\mathbf{I} + \mathbf{A})^k\,\mathbf{B}(t). \tag{4.11.5}$$

Следовательно,

$$N(p)\,[e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}(t)] = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{N}(p\mathbf{I} + \mathbf{A})\,\mathbf{B}(t). \tag{4.11.6}$$

Интегрирование экспоненциальной функции. Интеграл от экспоненциальной функции $e^{\mathbf{A}t}$, где $\mathbf{A}$ — постоянная матрица, можно найти путем интегрирования бесконечного ряда, представляющего $e^{\mathbf{A}t}$, т. е.

$$\int_0^t e^{\mathbf{A}t}\,dt = \int_0^t \mathbf{I}\,dt + \int_0^t \mathbf{A}t\,dt + \int_0^t \frac{\mathbf{A}^2t^2}{2!}\,dt + \int_0^t \frac{\mathbf{A}^3t^3}{3!}\,dt + \ldots =$$

$$= \mathbf{I}t + \frac{\mathbf{A}t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^2t^3}{3!} + \frac{\mathbf{A}^3t^4}{4!} + \ldots,$$

откуда

$$\mathbf{A}\int_0^t e^{\mathbf{A}t}\,dt = e^{\mathbf{A}t} - \mathbf{I}.$$

Предполагая, что матрица $\mathbf{A}$ — неособенная, получим

$$\int_0^t e^{\mathbf{A}t}\,dt = \mathbf{A}^{-1}(e^{\mathbf{A}t} - \mathbf{I}) = (e^{\mathbf{A}t} - \mathbf{I})\,\mathbf{A}^{-1}. \tag{4.11.7}$$

Пример 4.11.1. Найти $\int_0^t e^{\mathbf{A}t}\,dt$, где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Из результата примера 4.10.10 следует, что

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2(e^{-t} - e^{-2t}) & -(e^{-t} - 2e^{-2t}) \end{bmatrix}.$$

Поэтому

$$\int_0^t e^{\mathbf{A}t}\,dt = \begin{bmatrix} -2e^{-t}+\dfrac{e^{-2t}}{2}+\dfrac{3}{2} & -e^{-t}+\dfrac{e^{-2t}}{2}+\dfrac{1}{2} \\ 2e^{-t}-e^{-2t}-1 & e^{-t}-e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Проверка этого результата может быть произведена на основе уравнений (4.11.7)

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -\dfrac{3}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1}e^{\mathbf{A}t} - \mathbf{A}^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\dfrac{3}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t} \\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\dfrac{3}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -2e^{-t}+\dfrac{e^{-2t}}{2}+\dfrac{3}{2} & -e^{-t}+\dfrac{e^{-2t}}{1}+\dfrac{1}{2} \\ 2e^{-t}-e^{-2t}-1 & e^{-t}-e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Решение линейного матричного дифференциального уравнения с изменяющимися во времени коэффициентами часто зависит от экспоненциальной функции

$$\exp\left[\int_0^t \mathbf{A}(\lambda)\,d\lambda\right].$$

Эта экспоненциальная функция представляется в виде бесконечного ряда

$$\exp\left[\int_0^t \mathbf{A}(\lambda)\,d\lambda\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left[\int_0^t \mathbf{A}(\lambda)\,d\lambda\right]^k. \tag{4.11.8}$$

Пример 4.11.2. Найти

$$\exp\left[\int_0^t \mathbf{A}(\lambda)\,d\lambda\right] \quad \text{для} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix}.$$

Интеграл от этой матрицы равен

$$\int_0^t \mathbf{A}(\lambda)\,d\lambda = \begin{bmatrix} \dfrac{t^2}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{t^2}{2} \end{bmatrix},$$

откуда

$$\exp\left[\int_0^t \mathbf{A}(\lambda)\,d\lambda\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\begin{bmatrix} \dfrac{t^2}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{t^2}{2} \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} e^{t^2/2} & 0 \\ 0 & e^{t^2/2} \end{bmatrix}.$$

Дифференцирование квадратичных форм. С дифференцированием квадратичной формы приходится часто встречаться при анализе устойчивости динамических систем. Для квадратичной формы $Q=\langle \mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{x}\rangle$, где $\mathbf{A}$ — симметрическая матрица,

$$\mathbf{grad}_{\mathbf{x}}\, Q = 2\mathbf{A}\mathbf{x}. \tag{4.11.9}$$

$\mathbf{grad}_{\mathbf{x}}$ обозначает оператор-вектор

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\right] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dfrac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \tag{4.11.10}$$

Часто используется также матричный оператор, образованный внешним произведением $\mathbf{grad}_{\mathbf{x}}$ и $\mathbf{grad}_{\mathbf{y}}$

$$\mathbf{grad}_{\mathbf{x}} \rangle\langle \mathbf{grad}_{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dfrac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix} \left[\frac{\partial}{\partial y_1}\ \frac{\partial}{\partial y_2} \cdots \frac{\partial}{\partial y_m}\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2}{\partial x_1\,\partial y_1} & \dfrac{\partial^2}{\partial x_1\,\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2}{\partial x_1\,\partial y_m} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x_2\,\partial y_1} & \dfrac{\partial^2}{\partial x_2\,\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2}{\partial x_2\,\partial y_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x_n\,\partial y_1} & \dfrac{\partial^2}{\partial x_n\,\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2}{\partial x_n\,\partial y_m} \end{bmatrix}. \tag{4.11.11}$$

Пример 4.11.3. Вычислить градиент $Q = \langle \mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{x}\rangle$, где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

При $Q = x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_1x_2$ градиент относительно переменных x_1, x_2 задается соотношением

$$\mathbf{grad}_{\mathbf{x}}\, Q = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial Q}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + 6x_2 \\ 4x_2 + 6x_1 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что

$$2\mathbf{A}\mathbf{x} = 2\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + 6x_2 \\ 4x_2 + 6x_1 \end{bmatrix}.$$

Если как $\mathbf{A}$, так и переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ являются функциями времени, то производная по t от квадратичной формы задается выражением

$$\frac{d}{dt}[Q(t)] = \frac{d}{dt}\langle \mathbf{x}(t), \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)\rangle =$$
$$= \langle \dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)\rangle + \langle \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{A}}(t)\mathbf{x}(t)\rangle + \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{A}(t)\dot{\mathbf{x}}(t)\rangle.$$

Учитывая то, что матрица $\mathbf{A}$ — симметрическая, имеем

$$\dot{Q}(t) = 2\langle \dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)\rangle + \langle \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{A}}(t)\mathbf{x}(t)\rangle =$$
$$= \langle \mathbf{grad}_{\mathbf{x}} Q, \dot{\mathbf{x}}(t)\rangle + \langle \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{A}}(t)\mathbf{x}(t)\rangle. \qquad (4.11.12)$$

Если $\mathbf{A}$ не зависит от времени, то приведенное выражение сводится к

$$\dot{Q}(t) = \langle \mathbf{grad}_{\mathbf{x}} Q, \dot{\mathbf{x}}(t)\rangle = 2\langle A\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)\rangle. \qquad (4.11.13)$$

Пример 4.11.4. Найти производную от $Q(t) = \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)\rangle$, где

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} t^2 & 2t \\ 2t & 1 \end{bmatrix}.$$

При $Q(t) = t^2x_1^2(t) + x_2^2(t) + 4tx_1(t)x_2(t)$ производная $Q(t)$ по t равна

$$\dot{Q}(t) = 2tx_1^2(t) + 2t^2x_1(t)\dot{x}_1(t) + 2x_2(t)\dot{x}_2(t) + 4x_1(t)x_2(t) +$$
$$+ 4t\dot{x}_1(t)x_2(t) + 4tx_1(t)\dot{x}_2(t) = \dot{x}_1(t)[2t^2x_1(t) + 4tx_2(t)] +$$
$$+ \dot{x}_2(t)[2x_2(t) + 4tx_1(t)] + 2tx_1^2(t) + 4x_1(t)x_2(t).$$

Заметим, что $\dot{Q}(t)$ равна сумме

$$2\langle \dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)\rangle = 2[\dot{x}_1(t)\ \dot{x}_2(t)]\begin{bmatrix} t^2 & 2t \\ 2t & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} =$$
$$= \dot{x}_1(t)[2t^2x_1(t) + 4tx_2(t)] + \dot{x}_2(t)[2x_2(t) + 4tx_1(t)]$$

и

$$\langle \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{A}}(t)\mathbf{x}(t)\rangle = [x_1(t)\quad x_2(t)]\begin{bmatrix} 2t & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = 2tx_1^2(t) + 4x_1(t)x_2(t).$$

§ 4.12. Функциональное пространство

Настоящий параграф посвящен распространению векторных понятий § 4.5 на задачу определения базиса в «функциональном пространстве». Раньше было показано, что любые n линейно независимых векторов образуют базис в n-мерном пространстве, так что все векторы этого пространства можно описать в виде линейной комбинации $c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \ldots + c_n\mathbf{x}_n$.

Теперь рассмотрим такую систему из n функций $f_1(t), \ldots$ $\ldots, f_n(t)$, определенных на интервале (a, b), что ни одна функция $f_i(t)$ не является линейной комбинацией любых других $(n-1)$ функций из этого интервала. Линейная комбинация $c_1f_1(t)+c_2f_2(t)+\ldots+c_nf_n(t)$, конечно, не описывает всех функций, которые могут быть определены на интервале (a, b). Однако можно таким образом выбрать базис, что любая функция, удовлетворяющая сформулированным ниже условием регулярности, может быть выражена в виде линейной комбинации составляющих выбранного базиса.

Рассматриваемая здесь проблема представляет существенный интерес для адаптивных и оптимальных систем. Управляемые системы становятся все более сложными — все меньше известно об их внутреннем строении и связи между параметрами. Идентификация и моделирование таких систем является существенным первым шагом для осуществления адаптивного или оптимального управления. При этом становится чрезвычайно полезным нахождение подходящего ортонормированного базиса функций для описания характеристик системы.

Скалярное (внутреннее) произведение. Скалярное произведение двух вещественных функций $f(t)$ и $g(t)$, заданных на интервале (a, b), определяется как *)

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt. \tag{4.12.1}$$

Для комплексных функций действительного переменного t скалярное произведение определяется как

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f^*(t)\, g(t)\, dt. \tag{4.12.2}$$

Норма функции. Норма вещественной функции аналогична длине вектора и определяется как

$$\text{норма } f = \|f\|^{1/2} = \langle f, f\rangle^{1/2} = \left[\int_a^b f^2(t)\, dt\right]^{1/2}. \tag{4.12.3}$$

Нормированной функцией называется функция, норма которой равна единице. Если норма функции равна нулю, то $f(t)$ также

*) Предполагается, что все функции удовлетворяют условию Лебега $\int_a^b |f(t)|^2\, dt < \infty$.

должна равняться нулю на интервале (a, b) (за исключением конечного числа точек интервала).

Ортогональные функции. Две функции, $f(t)$ и $g(t)$, являются ортогональными на интервале (a, b), если их скалярное произведение равно нулю, т. е.

$$\langle f, g\rangle = 0. \tag{4.12.4}$$

Система нормированных функций $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots$ называется ортонормированной, если составляющие этой системы удовлетворяют соотношению

$$\langle \varphi_i, \varphi_j\rangle = \delta_{ij}. \tag{4.12.5}$$

Подобно подходу, используемому в методе ортогонализации Грама — Смита, можно использовать систему n линейно независимых функций для нахождения надлежащей системы ортонормированных функций *).

Ортогональные функции в качестве базиса функционального пространства. Если рассматривать бесконечную ортонормированную систему функций $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots$ в качестве координатных векторов или координатных функций в бесконечномерном пространстве, то по аналогии с векторным пространством функция $f(t)$ может рассматриваться как вектор этого пространства, причем соответствующие разложения этой функции по координатным функциям задаются в виде

$$c_k = \langle f, \varphi_k\rangle. \tag{4.12.6}$$

Указанные составляющие разложения функции по координатным функциям называются коэффициентами разложения (или коэффициентами Фурье) данной функции относительно ортонормированной системы $\varphi_k(t)$.

Если функция $f(t)$ аппроксимируется линейной комбинацией n ортонормированных функций

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(t) \qquad (a < t < b), \tag{4.12.7}$$

то наилучшая (в смысле «минимума квадратов») аппроксимация соответствует $a_k = c_k$. Это можно показать, минимизируя $\mathscr{E}$ —

*) Система функций $f_1, f_2, \ldots, f_n$ называется линейно зависимой, если соотношение $\sum_{i=1}^{n} c_i f_i = 0$ выполняется для всех значений скалярного аргумента функций и все c_i не равны нулю. Если указанное соотношение не выполняется, то функции считаются линейно независимыми.

квадрат нормы от разности между $f(t)$ и $\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(t)$, т. е.

$$\mathscr{E} = \left\| f(t) - \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(t) \right\|^2 = \int_a^b \left[f(t) - \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(t) \right]^2 dt.$$

Приравнивая к нулю производную от $\mathscr{E}$ по a_j, имеем

$$\int_a^b f(t)\varphi_j(t)\,dt = \int_a^b \left[\varphi_j(t) \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(t) \right] dt.$$

Из $\langle f, \varphi_j\rangle = c_j$ и $\langle \varphi_j, \varphi_k\rangle = \delta_{jk}$ следует $c_j = a_j$. Таким образом, коэффициенты a_k должны совпадать с коэффициентами разложения c_k. Указанная аппроксимация из условия минимизации среднего квадрата ошибки известна как аппроксимация «в среднем».

Учитывая, что $\mathscr{E}$ не может быть отрицательным, имеем

$$\int_a^b f^2(t)\,dt - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \geqslant 0. \tag{4.12.8}$$

Уравнение (4.12.8) известно как неравенство Бесселя. Ввиду того, что члены аппроксимирующего ряда ортонормированные, добавление ортонормированных членов $\varphi_{n+1}(t), \varphi_{n+2}(t), \ldots$ должно уменьшить среднеквадратичную ошибку между функцией и аппроксимирующими членами. Однако, несмотря на то, что сумма ряда $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$ сходится к положительному числу, не превосходящему $\int_a^b f^2(t)\,dt$, это положительное число может не быть тождественно равным данному интегралу. Хорошей иллюстрацией сказанному служит тот факт, что ряд Фурье для данной функции может состоять из системы взаимно ортогональных косинусов, если функция четная, или из системы взаимно ортогональных синусов, если функция нечетная. Если же функция не является на рассматриваемом интервале ни четной, ни нечетной, то для ее представления требуются одновременно системы синусов и косинусов. Ни одна из систем в отдельности в общем случае не сходится к этой функции.

Заданная ортонормированная система $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, ..., $\varphi_n(t)$ называется «полной», если произвольная кусочно-непрерывная

функция $f(t)$ может аппроксимироваться в среднем этой системой со сколь угодно малой ошибкой при достаточно большом числе ее членов, т. е.

$$\int_a^b \left[f(t) - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(t) \right]^2 dt \leqslant \varepsilon \quad \text{для полной системы ортонормированных функций} \tag{4.12.9}$$

или

$$\| f \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2. \tag{4.12.10}$$

Уравнение (4.12.10) известно как «соотношение полноты». Достаточное условие полноты системы ортонормированных функций состоит в том, что уравнение (4.12.10) должно удовлетворяться для всех значений $f(t)$ на интервале (a, b), при которых функция непрерывна. Существенно отметить, что из условия полноты не следует

$$f(t) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(t).$$

При сходимости ряда к $f(t)$ в среднем, среднеквадратическая ошибка, конечно, стремится на интервале (a, b) к нулю. Ряд тогда описывает $f(t)$ в данной точке, если он сходится равномерно на интервале (a, b), и $f(t)$ является непрерывной функцией на этом интервале. Однако даже в случае полной системы ортонормированных функций доказательство сходимости ряда представляет довольно трудную задачу и здесь не рассматривается [18].

Ортогональная система «с весом». В определение ортонормированных функций можно ввести весовую функцию $w(t)$:

$$\int_a^b \varphi_i(t) \varphi_j(t) w(t) dt = \delta_{ij}.$$

Весовая функция выбирается главным образом для выделения интересующей нас области на интервале (a, b). Тогда говорят, что функции $\varphi_k(t)$ ортонормированы относительно данной весовой функции. Коэффициенты Фурье функции $f(t)$ относительно весовой функции определяются как

$$c_k = \int_a^b f(t) \varphi_k(t) w(t) dt.$$

Пример 4.12.1. Необходимо аппроксимировать данную функцию $f(t)$ рядом ортонормированных функций. В качестве ортонормированных функций следует выбрать многочлены t. В случае рассматриваемого интервала $0<t<\infty$ и весовой функции e^{-t} ортонормированные функции известны как многочлены Лагерра.

Многочлены Лагерра имеют вид

$$L_0 = 1,$$
$$L_1 = -t + 1,$$
$$L_2 = \frac{t^2}{2} - 2t + 1,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$L_n = \frac{1}{n!} e^t \frac{d^n}{dt^n} [t^n e^{-t}].$$

Приведенные полиномиальные функции ортонормированы относительно весовой функции e^{-t}, так как

$$\int_0^\infty L_i(t) L_j(t) e^{-t} dt = \delta_{ij}.$$

Коэффициенты разложения c_k заданной функции $f(t)$ равны

$$c_k = \int_0^\infty f(t) L_k(t) e^{-t} dt.$$

Если, например, функцию $f(t) = e^{-t}$ следует представить рядом Лагерра, то коэффициенты разложения для первых пяти членов равны

$$c_0 = \frac{1}{2}, \quad c_1 = \frac{1}{4}, \quad c_2 = \frac{1}{8}, \quad c_3 = \frac{1}{16}, \quad c_4 = \frac{1}{32}.$$

Следовательно,

$$f(t) \doteq \sum_{k=0}^{4} c_k L_k = \frac{31}{32} - \frac{13}{16} t + \frac{1}{4} t^2 - \frac{1}{32} t^3 + \frac{1}{768} t^4.$$

Квадрат нормы функции относительно множителя веса равен

$$\|f\|_w^2 = \int_0^\infty f^2(t) w(t) dt = \int_0^\infty e^{-3t} dt = \frac{1}{3}.$$

Средний квадрат ошибки аппроксимации равен

$$\mathscr{E} = \|f\|_w^2 - \sum_{k=0}^{n} c_k^2.$$

Как следует из таблицы 4.12.1 добавление каждого ортонормированного члена аппроксимирующего ряда уменьшает средний квадрат ошибки.

Таблица 4.12.1

№ членов	$\mathscr{E}$	$\%\mathscr{E}$	Аппроксимация при $t=2$	Аппроксимация ошибки при $t=2$	Ряд Маклорена $1-t+\frac{t^2}{2!}-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}$ при $t=2$
1	0,0833	24,99	0,5	+0,3647	+1,0
2	0,0208	6,24	0,25	+0,1147	−1,0
3	0,0052	1,56	0,125	−0,0103	+1,0
4	0,0013	0,39	0,1042	−0,0311	−0,3333
5	0,0003	0,09	0,115	−0,0203	+0,3333

Вычисление функции $f(t)$ при данном значении t иллюстрирует интересный факт. В таблице 4.12.1 приведена аппроксимация $f(t)$ для $t=2$ при последовательном введении добавочных ортонормированных членов. Точное значение $f(t)$ при $t=2$ равно $e^{-2}=0{,}1353$. Заметим, что ошибка при $t=2$ в действительности возрастает при введении четвертого члена, а затем уменьшается при введении пятого члена. В противоположность этому среднеквадратичная ошибка на всем интервале уменьшается по мере добавления каждого члена. Как показано, приведенное разложение функции $f(t)$ при $t=2$ в ряд Маклорена дает низкую точность.

Задачи

4.1. Выполнить простейшие действия $\mathbf{A}+\mathbf{B}$, $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ и $\mathbf{AB}$ над следующими матрицами:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & -5 & 1\\ 4 & 0 & 2\end{bmatrix},\qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}3 & -4 & 1\\ 1 & 5 & 0\\ 2 & -2 & 3\end{bmatrix};$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix},\qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}b_{11} & 0\\ 0 & b_{22}\end{bmatrix};$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix},\qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}.$$

4.2. Каким условиям должны удовлетворять элементы a_{ij} и b_{ij} матриц (2×2) $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, чтобы выполнялось $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$?

4.3. Вычислить $\mathbf{AB}$, где

$$\mathbf{A}=\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right],\qquad \mathbf{B}=\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 0 & 1\\ \hline 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{array}\right].$$

4.4. При каких условиях $(\mathbf{A}\pm\mathbf{B})^2=\mathbf{A}^2+2\mathbf{AB}+\mathbf{B}^2$?

4.5. Дано матричное уравнение $\mathbf{AB}=\mathbf{AC}$. При каких условиях $\mathbf{L}\neq\mathbf{C}$?

4.6. Найти $\int_0^t \mathbf{A}(t)\,dt$ и $(d/dt)\,\mathbf{A}(t)$ для

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} \cos t & t^2 \\ 1 & \operatorname{th} t \end{bmatrix}.$$

4.7. Найти значение следующего определителя только на основе формулировки этого понятия:

$$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix} -7 & -4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -5 & 2 \\ 6 & 4 & 0 & -4 \\ 6 & 4 & 1 & -5 \end{vmatrix}.$$

4.8. Найти все миноры и алгебраические дополнения определителя в задаче 4.7. Показать, что разложение Лапласа по элементам произвольной строки совпадает с разложением по элементам произвольного столбца.

4.9. Найти значение определителя в задаче 4.7. на основе метода опорного элемента.

4.10. Показать, что произведение определителей $|\mathbf{A}|$, $|\mathbf{B}|$ равно определителю произведения $|\mathbf{AB}|$, где

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & 5 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

4.11 Найти производную d/dx от определителя

$$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix} x^2-1 & x-1 & 1 \\ x^4 & x^3 & 2x+5 \\ x+1 & x^2 & x \end{vmatrix}.$$

4.12. Найти Adj **A** для

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 7 & 4 \end{bmatrix}.$$

4.13. Доказать, что если **A** имеет порядок n и ранг $n-1$, то Adj **A** имеет ранг 1.

4.14. Доказать, что если **A** имеет порядок n и ранг $< n-1$, то Adj $\mathbf{A}=0$

4.15. Показать, что $|\operatorname{Adj}\mathbf{A}|=|\mathbf{A}|^{n-1}$, если **A** — матрица n-го порядка.

4.16. Для матриц задачи 4.12 найти $\mathbf{A}^{-1}$.

4.17. Решить повторно задачу 4.16, предварительно разбив матрицы на блоки.

4.18. При помощи метода опорного элемента по заданной невырожденной матрице можно определить обратную.

Построим вначале следующую таблицу:

$$
\begin{array}{c|cccc|cccc}
 & & & & & \multicolumn{4}{c}{\overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{n}} \\
 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots & a_{1n} & -1 & 0 & 0 \ldots & 0 \\
 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots & a_{2n} & 0 & -1 & 0 \ldots & 0 \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \ldots & a_{nn} & 0 & 0 & 0 \ldots & -1 \\
\hline
n & 1 & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 \\
n & 0 & 1 & 0 \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 \\
n & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
n & 0 & 0 & 0 \ldots & 1 & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 \ldots & 1 & 1 & & &
\end{array}
$$

Используя идеи метода опорного элемента, превратим в нуль часть таблицы слева от пунктирной линии. Обратная матрица окажется в нижнем правом углу, где каждый элемент следует разделить на элемент строки $2n+1$ и столбца $n+1$. Найти обратную матрицу от

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}
$$

посредством метода опорного элемента и проверить результат на основе $\mathbf{A}^{-1} = \operatorname{Adj} \mathbf{A}/|\mathbf{A}|$. Почему «работает» описанный метод?

4.19. При помощи метода опорного элемента решить повторно задачу 4.16.

4.20. Найти $\mathbf{A}^{-1}$ и $(d/dt)\mathbf{A}^{-1}$ для

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2t-2 & t+2 & -3 \\ 3t-1 & t & -1 \\ -1 & 4t-3 & -t+1 \end{bmatrix}.
$$

4.21. Показать, что в случае симметрической матрицы $\mathbf{A}$ для нахождения $\mathbf{A}^{-1}$ требуется вычислить только $(n/2)(n+1)$ алгебраических дополнений.

4.22. Говорят, что матрица $\mathbf{A}$ размерности $(m \times n)$ имеет правую обратную $\mathbf{B}$, если $\mathbf{AB}=\mathbf{I}$, и левую обратную $\mathbf{C}$, если $\mathbf{CA}=\mathbf{I}$. Доказать, что $\mathbf{B}$ существует только в том случае, если $\mathbf{A}$ имеет ранг m, и что $\mathbf{C}$ существует, если только $\mathbf{A}$ имеет ранг n.

4.23. Показать, что $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$, где

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.
$$

4.24. Показать, что если симметрическая матрица неособенная, то обратная матрица $\mathbf{A}^{-1}$ также симметрическая.

4.25. Найти внутреннее и внешнее произведения следующих пар векторов:

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{y}=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1+j\\-1-j\\2+j2\end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{y}=\begin{bmatrix}-1-j\\1+j\\1-j\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1\\0\\2\\3\end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{y}=\begin{bmatrix}2\\-1\\1\\1\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}2+j3\\1-j2\\3\\0\end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{y}=\begin{bmatrix}1+j2\\0\\1+j\\2\end{bmatrix}.$$

4.26. Найти величину α, доставляющую минимум $\|\mathbf{x}-\alpha\mathbf{y}\|$. Показать, что при этом значении α вектор $\mathbf{x}-\alpha\mathbf{y}$ ортогонален вектору $\mathbf{y}$ и что $\|\mathbf{x}-\alpha\mathbf{y}\|^2+\|\alpha\mathbf{y}\|^2=\|\mathbf{x}^2\|$. Вектор $\alpha\mathbf{y}$ называется *проекцией* $\mathbf{x}$ на $\mathbf{y}$. Начертить диаграмму для случая двумерных $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$.

4.27. Найти проекцию вектора $(1, 1, 1)$ на плоскость

$$x_1+2x_2+3x_3=0.$$

4.28. Доказать, что четыре вектора трехмерного пространства $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ и $(1, 1, 1)$ образуют линейно зависимую систему, но любые три из этих векторов образуют линейно независимую систему.

4.29. Представить вектор $\mathbf{y}=(6, 3)$ в виде комбинации базисных векторов $\mathbf{x}_1=(-1, 2)$, $x_2=(1, 3)$. Определить двойственный базис.

4.30. Используя метод ортогонализации Грама — Смита, найти ортонормированный базис, взяв в качестве базисных векторов $\mathbf{x}_1=(1, 1, 1)$, $\mathbf{x}_2=(1, 0, 0)$ и $\mathbf{x}_3=(0, 1, 0)$.

4.31. Какова размерность векторного пространства, образованного следующей системой векторов:

(*a*) $\mathbf{x}_1=(1, 2, 2, 1)$, $\mathbf{x}_2=(1, 0, 0, 1)$, $\mathbf{x}_3=(3, 4, 4, 3)$,

(*b*) $\mathbf{x}_1=(1, 1, 1)$, $\mathbf{x}_2=(1, 0, 1)$, $\mathbf{x}_3=(1, 2, 1)$,

(*c*) $\mathbf{x}_1=(1, 0, 1, 0)$, $\mathbf{x}_2=(0, 0, 5, 0)$, $\mathbf{x}_3=(1, 0, 0, 1, 0)$, $\mathbf{x}_4=(5, 0, 7, 0)$,

(*d*) $\mathbf{x}_1=(1, 0, 0)$, $\mathbf{x}_2=(0, 1, 0)$, $\mathbf{x}_3=(0, 0, 1)$, $\mathbf{x}_4=(1, 1, 1)$.

4.32. Найти ранг и дефект следующих матриц:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & -2 & 3\\10 & -4 & 5\\5 & -4 & 6\end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}7 & 4 & -1\\4 & 7 & -1\\-4 & -4 & 4\end{bmatrix}.$$

4.33. Найти дефект произведения $\mathbf{AB}$, где $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — матрицы из примера 4.32.

4.34. Пусть S_1 — подпространство n-мерного пространства S. Показать, что произвольный вектор $\mathbf{x}$, не принадлежащий S_1, может быть представлен в виде

$$\mathbf{x}=\mathbf{y}+\mathbf{y}_1,$$

где $\mathbf{y}$ — вектор, принадлежащий S_1, а $\mathbf{y}_1=\mathbf{x}-\mathbf{y}$ ортогонален всем векторам S_1. Начертить схему в трехмерном пространстве, иллюстрирующую эту теорему (см. задачу 4.26).

4.35. Показать, что если n-мерный вектор $\mathbf{x}$ ортогонален базисным векторам n-мерного пространства, то $\mathbf{x}=\mathbf{0}$.

4.36. Используя правило Крамера, решить следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4&=10,\\ 3x_1+x_2-x_3-4x_4&=-14,\\ 2x_1+2x_2-x_3+x_4&=7,\\ x_1+3x_2+4x_3-x_4&=15. \end{aligned}$$

4.37. Найти решение уравнения $\mathbf{y}=\mathbf{A}\mathbf{x}$, определяя обратную матрицу $\mathbf{A}^{-1}$, где

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{bmatrix},\quad \mathbf{y}=\begin{bmatrix} 1\\ 3\\ 5 \end{bmatrix}.$$

4.38. Удобная схема метода опорного элемента для вычисления n неизвестных системы n-го порядка состоит в следующем.

Дополнить матрицу коэффициентов столбцом из отрицательных значений элементов правой части уравнения. Дополнить полученную матрицу $(n+1)$-й вспомогательными строками, имеющими диагональными элементами единицы, а остальные члены — нули.

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots & a_{1n} & -y_1\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots & a_{2n} & -y_2\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \ldots & a_{nn} & -y_n\\ \hline 1 & 0 & 0 \ldots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 \ldots & 0 & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & 1 \end{array}\Bigg\}\, n+1.$$

В качестве опорного элемента выбрать произвольный элемент a_{mk}, где m и k меньше или равны n. Согласно методу опорного элемента строки и столбцы полученной матрицы уменьшаются последовательно до тех пор, пока не останется только лишь столбец $n+1$, который состоит из $n+1$ элементов c_1, c_2, ..., c_{n+1}. Тогда решение для k-й неизвестной x_k дается в виде

$$x_k=\frac{c_k}{c_{n+1}}.$$

Решить следующую систему уравнений, используя метод опорного элемента:

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=2,\\ x_1-x_2+x_3&=-2,\\ 2x_1-x_2+x_3&=-1. \end{aligned}$$

Показать, почему «работает» этот метод.

4.39. Решить следующую систему линейных уравнений:

$$(a)\quad \begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4&=0,\\ x_1+x_2+x_3-x_4&=4,\\ x_1+x_2-x_3+x_4&=-4,\\ x_1-x_2+x_3+x_4&=2. \end{aligned}$$

$$(b)\quad \begin{aligned} x_1+2x_2+9x_3&=0,\\ 2x_1\qquad\quad+2x_3&=0,\\ 3x_1-2x_2-5x_3&=0. \end{aligned}$$

$$(c)\quad \begin{aligned} 2x_1+x_3-x_4&=0,\\ x_1+3x_2+2x_3+4x_4&=0,\\ x_1+x_2+x_3+x_4&=0. \end{aligned}$$

4.40. Найти характеристические числа и характеристические векторы для следующих матриц:

$$(a)\ \begin{bmatrix} 2 & -1\\ -1 & 3 \end{bmatrix},\quad (b)\ \begin{bmatrix} 1 & 1\\ -1 & 1 \end{bmatrix},\quad (c)\ \begin{bmatrix} 3/2 & 1 & 3/2\\ -1/2 & 0 & -3/2\\ 1/2 & -1 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

4.41. Найти характеристические векторы, модальную матрицу и диагональную форму для матриц:

$$(a)\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix},\quad (b)\ \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix},\quad (c)\ \begin{bmatrix} 7 & 4 & -1\\ 4 & 7 & -1\\ -4 & -4 & 4 \end{bmatrix}.$$

4.42. Показать, что

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}\quad \text{и}\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1\\ 0 & 2 & -1\\ -3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

имеют одинаковые характеристические числа, но не являются подобными матрицами.

4.43. Доказать, что присоединенная матрица $\operatorname{Adj}[\lambda_s\mathbf{I}-\mathbf{A}]$ и все ее производные, включая $(d^{q-2}/d\lambda^{q-2})[\operatorname{Adj}(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})]_{\lambda=\lambda_s}$, равны нулю, если характеристическое уравнение $p(\lambda_s)=0$ с кратным корнем порядка s имеет дефект $q>1$.

4.44. Матрица

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

содержит кратные корни. Показать, что при добавлении возмущающей матрицы

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_2 & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

все характеристические корни $\mathbf{A}$ станут различными. Показать, что при стремлении ε к нулю все характеристические векторы сходятся к одному характеристическому вектору.

4.45. Найти сумму и произведение характеристических чисел

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

4.46. Показать, что ранг $\lambda_i\mathbf{I}-\mathbf{A}$, где $\mathbf{A}$ — матрица n-го порядка с характеристическим числом λ_i кратности q, не меньше $n-q$ и что размерность соответствующего инвариантного векторного пространства («нулевого» пространства) не больше q.

4.47. Доказать, что характеристические числа унитарной матрицы $[\mathbf{A}^{-1}=(\mathbf{A}^T)^*]$ и ортогональной матрицы $(\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^T)$ имеют абсолютные значения, равные единице.

4.48. Доказать, что если λ_i — отличное от нуля характеристическое число $\mathbf{A}$, то $|\mathbf{A}|/\lambda_i$ — характеристическое число $\operatorname{Adj}\mathbf{A}$.

4.49. Показать, что если матрица $\mathbf{A}$ имеет характеристические числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, то

(*a*) $\mathbf{A}^m$ имеет характеристические числа $\lambda_1^m, \ldots, \lambda_n^m$,

(*b*) $\mathbf{A}^{-1}$ имеет характеристические числа $1/\lambda_1, \ldots, 1/\lambda_n$,

(*c*) $\mathbf{A}^T$ имеет характеристические числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$,

(*d*) $k\mathbf{A}$ имеет характеристические числа $k\lambda_1, \ldots, k\lambda_n$.

4.50. Показать, что если у треугольной матрицы $\mathbf{A}$ (элементы, лежащие выше или ниже главной диагонали, равны нулю) элементы главной диагонали служат характеристическими числами $\mathbf{A}$.

4.51. Вектор $\mathbf{x}_k$, удовлетворяющий $(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I})^{k-1}\mathbf{x}_k\neq\mathbf{0}$, но для которого $(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I})^k\mathbf{x}_k=\mathbf{0}$, называется «обобщенным характеристическим вектором» или характеристическим вектором ранга k, соответствующим характеристическому корню λ_i. Обобщенные характеристические векторы используются при нахождении модальной матрицы для систем, имеющих кратные характеристические числа.

(*a*) Показать, что характеристические векторы различного ранга линейно независимы.

(*b*) Найти обобщенные характеристические векторы для

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

(*c*) Для матрицы пункта (*b*) найти модальную матрицу $\mathbf{M}$.

4.52. Преобразование $\mathbf{A}^*$, сопряженное к линейному преобразованию $\mathbf{A}$, определяется выражением $\langle\mathbf{Ax}, \mathbf{y}\rangle=\langle\mathbf{x}, \mathbf{A}^*\mathbf{y}\rangle$. Показать, что $(\mathbf{A}^*)^*=\mathbf{A}$.

4.53. На основе лишь элементарных преобразований строк решить следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned} x_1+2x_2-\ \ x_3&=2,\\ 2x_1+\ \ x_2+\ \ x_3&=7,\\ 5x_1-3x_2+3x_3&=8. \end{aligned}$$

4.54. Привести матрицу

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

к каноническому виду (4.8.16).

4.55. Привести матрицу

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 6j & j & 1+j \\ j & 2j & -1 \\ -1+j & 1 & j \end{bmatrix}$$

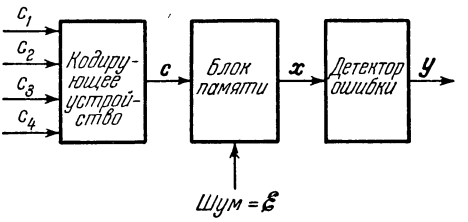
к каноническому виду (4.8.19).

4.56. Привести матрицу

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

к каноническому виду (4.8.15).

4.57. *Введение в линейные коды.* Предположим, что в память машины необходимо ввести четыре двоичные цифры $\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$, причем каждая из c может быть либо нулем либо единицей. Одна или более цифр в течение циклов считывания или записи может непредвиденным образом измениться. Поэтому члены, вводимые из памяти $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, могут содержать ошибку. Оказывается, эту ситуацию можно улучшить путем введения «двоичных цифр проверки на четность» c_5, c_6, c_7, как это показывается ниже. Закодированная информация $(c_1, \ldots, c_7)$ хранится затем в памяти в виде семи двоичных цифр.



К задаче 4.57.

Эта процедура иллюстрируется системой, изображенной на рисунке. c_5, c_6 и c_7 вычисляются в кодирующем устройстве по c_1, c_2, c_3, c_4. Числа $x_1, \ldots, x_7$ впоследствии выводятся из памяти и проходят через дешифратор.

$$\mathbf{c}=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_7 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon=\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon_7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{x}=\mathbf{c}+\varepsilon$$

c_5, c_6, c_7 выбираются следующим образом:

c_5 выбирается так, чтобы число единиц в последовательности в двоичном коде $s_1=\{c_2, c_3, c_4, c_5\}$ было четным;

c_6 выбирается так, чтобы сделать четным число единиц в двоичном коде $s_2=\{c_1, c_2, c_4, c_6\}$,

c_7 выбирается таким образом, чтобы сделать четным число единиц в двоичном коде $s_3 = \{x_1, x_3, x_4, x_7\}$. Ошибки обнаруживаются путем проверки на четность последовательностей, соответствующих s_1, s_2, s_3 в векторе $\mathbf{x}$. Определим вектор $\mathbf{y}$ так, чтобы

$$\mathbf{y} = \begin{cases} 1, & \text{если в двоичном коде } s_1 \text{ четное,} \\ 0, & \text{если в двоичном коде } s_1 \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Подобным образом связаны y_2 с s_2 и y_3 с s_3.

Оказывается, что в случае не более, чем одной ошибки (т. е. $\mathbf{x}$ и $\mathbf{c}$ отличаются не более, чем одним элементом) можно восстанавливать $\mathbf{c}$ непосредственно по вычисленному $\mathbf{y}$. Этот код называется кодом Гамильтона. Задача формулируется в терминах векторных пространств и линейных преобразований. Вся арифметика имеет модуль 2.

$$\begin{aligned} 0+0&=0, & 0\cdot 0&=0, \\ 0+1&=1, & 0\cdot 1&=0, \\ 1+0&=1, & 1\cdot 0&=0, \\ 1+1&=0, & 1\cdot 1&=1. \end{aligned}$$

(*a*) Показать, что переход от векторов $\mathbf{x}$ к векторам $\mathbf{y}$ является линейным преобразованием T. Найти матрицу $\mathbf{A}$ этого преобразования T по отношению к базису в V_7 и в V_3 (соответственно в семимерном и трехмерном пространстве).

(*b*) Записать восемь векторов ошибки $\boldsymbol{\varepsilon}$, соответствующие:

(1) отсутствию ошибки;

(2) ошибке в i-м месте при $i=1, 2, \ldots, 7$.

Заметим: $\mathbf{x}=\mathbf{c}+\boldsymbol{\varepsilon}$ определяет $\boldsymbol{\varepsilon}$.

(*c*) Показать, что векторы $\mathbf{c}$ образуют «нулевое» пространство $\mathbf{A}$. Найти матрицу вида $\begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}$, векторы-столбцы которой являются базисами «нулевого» пространства.

(*d*) Показать, что если возможны лишь ошибки, указанные в (*b*), то в этом случае, вычисляя $\mathbf{y}$, всегда можно определить вид ошибки $\boldsymbol{\varepsilon}$. Для каждого $\mathbf{y}$ записать соответствующий вектор $\boldsymbol{\varepsilon}$.

(*e*) В общем случае произвольная матрица из нулей и единиц определяет некоторый «линейный код». Кроме $\mathbf{A}$, существуют другие матрицы размерности 3×7, определяющие линейные коды с такими же корректирующими свойствами. Каково их число и какова их связь с $\mathbf{A}$?

(*f*) Какие условия должны в общем случае накладываться на векторы преобразования $\{T(\boldsymbol{\varepsilon}_1), \ldots, T(\boldsymbol{\varepsilon}_p)\}$ в V_m, если код, определяемый матрицей $\mathbf{A}(m\times n)$ линейного преобразования T из V_n в V_m, должен исправлять возможные ошибки, описываемые n-мерными векторами ошибки $\{\mathbf{0}, \boldsymbol{\varepsilon}, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_p\}$? Аргументировать ответ, используя свойство линейности T.

(*g*) Можно ли построить код, исправляющий одну ошибку, подобно описанному выше, посредством матрицы (3×8)? матрицы (3×6)? Объяснить, почему, ссылаясь на (*f*)?

4.58. Если матрица коэффициентов $\mathbf{A}$ линейного преобразования $\mathbf{y}=\mathbf{A}\mathbf{x}$ является особенной, то «нулевое» пространство $\mathbf{A}$ представляет собой векторное пространство, образованное векторами, удовлетворяющими уравнению $\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{0}$. Найти «нулевое» пространство для

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

4.59. Данная задача дается с целью иллюстрации на примере двумерных пространств значения характеристических векторов и характеристических чисел.

(*a*) Рассмотрим линейное преобразование, поворачивающее векторы на угол θ (см. рисунок 4.59 (а))

(1) Найти матрицу T по отношению к $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$.

(2) Найти все характеристические векторы и характеристические числа.

(*b*) Рассмотрим линейное преобразование $T(\mathbf{e}) = \mathbf{A}\mathbf{e}$, где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} k_1 & (k_2 - k_1) \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}.$$

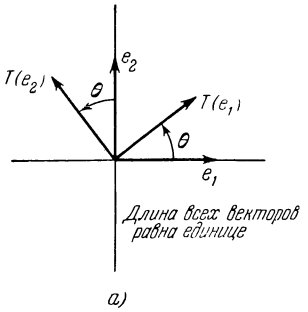
1) Найти характеристические векторы и характеристические числа.

2) Вычертить в плоскости e_1, e_2 характеристические векторы ρ_1 и ρ_2 и их преобразования $T(\rho_1)$ и $T(\rho_2)$.

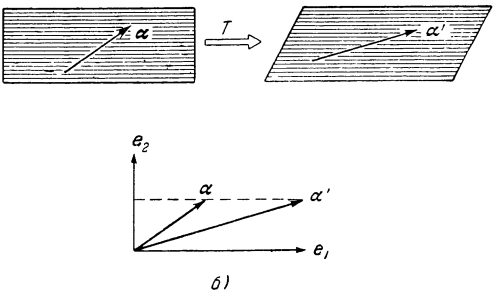
3) Пусть $k_1 = k_2$. Описать этот случай

i) геометрически; (ii) при помощи характеристических векторов и характеристических чисел.

(*c*) Чтобы пояснить возможность существования только одного характеристического вектора, рассмотрим линейное преобразование, получаемое



К задаче 4.59 (а).



К задаче 4.59 (б).

следующим образом. Установим колоду игральных карт на ребро. Проведем вектор α по ребру колоды. Теперь «сносим» колоду как показано на рисунке 4.59(б) и отметим полученный «новый» вектор $\alpha' = T\alpha$. Какой является матрица T по отношению к $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$?

(1) Найти характеристический вектор (второго порядка) и характеристическое число.

(2) Найти нормальную форму Жордана.

(*d*) Рассмотрим преобразование, получающееся в результате выполнения вначале (*b*) при $k_1 = \sqrt{2}$ и $k_2 = 1/\sqrt{2}$, а затем — преобразования (*a*) при $\theta = 45°$.

(1) Какова матрица этого преобразования?

(2) Найти характеристический вектор (второго порядка) и характеристическое число; объяснение связать с (*c*).

4.60. Ортогональная матрица второго порядка должна иметь вид

$$\mathbf{A}_p = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad \mathbf{A}_n = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}.$$

(*a*) Доказать справедливость этого утверждения.

(*b*) Рассмотрим линейное преобразование $\mathbf{y}=\mathbf{A}\mathbf{x}$, где $\mathbf{A}=\mathbf{A}_p$. Что можно сказать о связи составляющих вектора в исходной системе координат с соответствующими составляющими в преобразованной координатной системе? Какова связь между двумя различными векторами в исходной системе координат?

Изобразить это преобразование графически.

(*c*) Повторить пункт (*b*) для $\mathbf{A}=\mathbf{A}_n$.

4.61. В задаче 4.59 показано различие между линейными преобразованиями, форма Жордана которых содержит или не содержит единицу рядом с главной диагональю. Для второго порядка это иллюстрировалось на примере с колодой карт. Провести аналогию (оперируя не обязательно с картами) в трехмерном пространстве для жордановых форм:

$$(a)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad (b)\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Случаи (*a*) и (*b*) изобразить графически, ясно указав направление *всех* характеристических векторов.

4.62. Найти жорданову форму и модальную матрицу для следующих матриц:

$$(a)\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad (b)\ \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$(c)\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (d)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$(e)\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4.63. Определить, являются ли данные матрицы: (1) положительно определенными, (2) положительно полуопределенными, (3) отрицательно определенными, (4) отрицательно полуопределенными.

$$(a)\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (b)\ \begin{bmatrix} 3/2 & 1/6 & -1/3 \\ 1/6 & 7/6 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & -1 \end{bmatrix},$$

$$(c)\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad (d)\ \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad (e)\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

4.64. Рассмотрим квадратное уравнение $\langle \mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{x} \rangle = 1$; $\mathbf{x}$ — действительный вектор, $\mathbf{A}(2\times 2)$ — действительная симметрическая матрица, $a_{11} > 0$. Данное уравнение определяет на плоскости $\mathbf{x}$ кривую.

(*a*) Показать, что если **A** положительно определена, то кривая является эллипсом.

(1) Какое значение имеют характеристические векторы при определении ориентации эллипса?

(2) Каково значение характеристических чисел?

(3) Дать графическую иллюстрацию (1) и (2).

(4) Пояснить случай лишь одного характеристического числа.

(*b*) Показать, что если $|\mathbf{A}| < 0$, то кривая является гиперболой. Для гиперболы повторно проделать пункты (1), (2) и (3).

(*c*) Пояснить случай равенства одного характеристического числа нулю.

(*d*) Начертить кривые, определяемые данным уравнением, для следующих значений **A** Найти характеристические числа и характеристические векторы в каждом из случаев и указать их величины на чертеже.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

4.65. Рассмотрим функцию $Q(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{x} \rangle$, где **A** — действительная симметрическая матрица.

(*a*) Показать, что $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ является стационарной точкой.

(*b*) Какой должна быть **A**, чтобы $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ соответствовал максимум? Доказать это.

(*c*) Какой должна быть **A**, чтобы $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ соответствовал минимум? Доказать это.

(*d*) Чему соответствует $\mathbf{x}=\mathbf{0}$, если **A** — неособенная матрица, не удовлетворяющая ни одному из указанных условий?

(*e*) Что характеризует особенная матрица **A** с простой или многократной вырожденностью?

(*f*) Ответы к пунктам (*b*)—(*e*) для приведенных ниже матриц (1)—(4) сопроводить рисунками кривых.

$$(1)\quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2)\quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$(3)\quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4)\quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

4.66. Для матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Найти (*a*) $\mathbf{A}^{1/2}$, (*b*) $\cos \mathbf{A}$, (*c*) $\operatorname{sh} \mathbf{A}$.

4.67. Используя теоремы Кэли — Гамильтона и Сильвестра, найти $e^{\mathbf{A}}$ для

$$(a)\quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad (b)\quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -7 & 3 & 6 & 6 \\ -4 & 2 & 4 & 4 \\ -3 & 5 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 4 & 5 \end{bmatrix},$$

$$(c)\quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}, \quad (d)\quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

4.68. Найти $\mathbf{A}^{10}$ для $\mathbf{A}$ вида

$$(a)\quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&2\\0&2&2\end{bmatrix},\quad (b)\quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{3}&0\\3&-1&0\\4&-\frac{4}{3}&-\frac{1}{3}\end{bmatrix}.$$

4.69. Согласно уравнению (4.11.7) интеграл $\int\limits_0^t e^{\mathbf{A}t}dt$ вычисляется через $\mathbf{A}^{-1}$. Как можно выполнить это интегрирование в случае особенной матрицы $\mathbf{A}$?

4.70. Доказать уравнение (4.11.9).

4.71. Доказать, что $\|f(x)-g(x)\|=\|f(x)\|+\|g(x)\|$ [f и g определены на интервале (a, b)] только в том случае, если $f(x)$ и $g(x)$ ортогональны на рассматриваемом интервале (a, b).

4.72. Показать, что среднее значение функции на данном интервале всегда меньше или равно среднеквадратическому значению функции на этом интервале.

4.73. Показать, что задача 4.72 представляет собой частный случай неравенства Шварца

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right|\leqslant\left(\sqrt{\int\limits_a^b f^2(x)\,dx}\right)\left(\sqrt{\int\limits_a^b g^2(x)\,dx}\right).$$

Доказать, что равенство выполняется лишь при $g(x)=kf(x)$, где k — постоянная величина.

4.74. Доказать, что многочлены Лагерра ортонормированы на интервале $(0, \infty)$.

4.75. Один из методов, предложенный для идентификации линейного объекта на основе лишь записи его входа и выхода основан на моделировании объекта при помощи системы ортогональных передаточных функций. В данном методе выход модели объекта представляется в виде линейной суммы выходов ортогональных передаточных функций. Вход модели совпадает со входом объекта (см. рисунок). Коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_N$ настраиваются до тех пор, пока среднеквадратическая разность между выходом объекта $y(t)$ и выходом модели $z(t)$ не станет минимальной. В этом случае говорят, что система ортогональных передаточных функций «моделирует» объект.

(a) Показать, что при

$$z(t)=\sum_{i=1}^{N} a_i z_i(t)$$

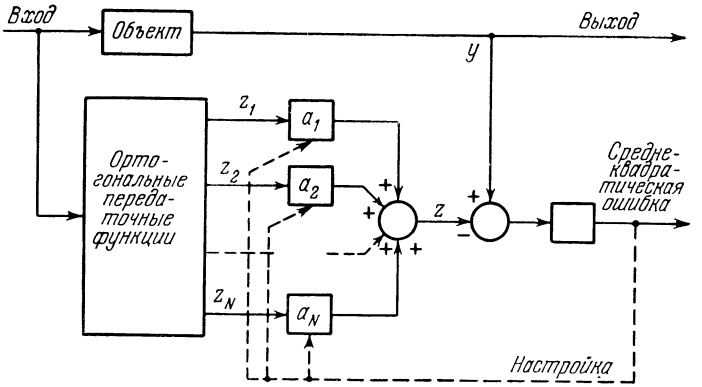
оптимальное значение коэффициентов задается выражением

$$a_j=\frac{\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} y(t)\,z_j(t)\,dt}{\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} z_j^2(t)\,dt}=\frac{\text{среднее по времени значение } y(t)\,z_j(t)}{\text{среднеквадратическое значение } z_j(t)}.$$

(*b*) Используя систему линейно независимых передаточных функций

$$F_i(s) = \frac{1}{s + s_i}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

построить на интервале $0 \leqslant t \leqslant \infty$ систему n ортонормированных функций.



К задаче 4.75.

Показать, что ортонормированные передаточные функции (называемые ортогональными фильтрами Каца) имеют вид

$$\Phi_1(s) = \frac{\sqrt{2s_1}}{s + s_1},$$

$$\Phi_n(s) = \sqrt{2s_n}\,\frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(s - s_k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(s + s_k)}, \qquad n \geqslant 2.$$

(*c*) Показать, что при введении весового множителя $w(t) = e^{-2\alpha t}$ ортонормированные передаточные функции имеют вид

$$\Phi_1(s) = \frac{\sqrt{2(s_1 + \alpha)}}{s + s_1}, \quad \Phi_2(s) = \frac{\sqrt{2(s_2 + \alpha)}\,(s - 2\alpha - s_1)}{(s + s_1)(s + s_2)},$$

$$\Phi_n(s) = \sqrt{2(s_n + \alpha)}\,\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}(s - 2\alpha - s_k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(s + s_k)}, \qquad n > 2.$$

(*d*) Показать, что ортонормированные функции, строящиеся по передаточным функциям, имеющим комплексно сопряженные полюсы $s = -\alpha_i \pm j\beta_i$,

при весовом множителе $e^{-2\alpha t}$ равны

$$\Phi_1(s) = \sqrt{2(\alpha+\alpha_1)}\,\frac{s-\alpha+|s_1|}{(s+\alpha_1)^2+\beta_1^2},$$

$$\Phi_2(s) = \sqrt{2(\alpha+\alpha_1)}\,\frac{s-\alpha-|s_1|}{(s+\alpha_1)^2+\beta_1^2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Phi_{2i-1}(s) = \sqrt{2(\alpha+\alpha_i)}\,\frac{(s-\alpha+|s_1|)\prod\limits_{k=1}^{i}\left[(s-2\alpha-\alpha_k)^2+\beta_k^2\right]}{\prod\limits_{k=1}^{i}\left[(s+\alpha_k)^2+\beta_k^2\right]},$$

$$\Phi_{2i}(s) = \sqrt{2(\alpha+\alpha_i)}\,\frac{(s-\alpha-|s_i|)\prod\limits_{k=1}^{i}\left[(s-2\alpha-\alpha_k)^2+\beta_k^2\right]}{\prod\limits_{k=1}^{i}\left[(s+\alpha_k)^2+\beta_k^2\right]},$$

где $i=1, 2, \ldots, n/2$ и n равно числу комплексных корней

$$|s_k|^2 = (\alpha+\alpha_k)^2+\beta_k^2.$$

Указание. Из теоремы Парсеваля следует:

$$\int_0^\infty f_1(t)\,f_2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1(s)\,F_2(-s)\,ds.$$

При весовом множителе $w(t)=e^{-2\alpha t}$ и системе ортонормированных функций $\varphi_i(t)$

$$\int_0^\infty \varphi_i(t)\,\varphi_j(t)\,e^{-2\alpha t}\,dt = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \Phi_i(s+\alpha)\,\Phi_j(-s+\alpha)\,ds = \delta_{ij}.$$

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. F. Chio, Mémoire sur les Fonctions Connues sous le Nom de Résultantes ou de Determinants, Turin, 1853, стр. 11.
2. L. A. Pipes, Matrix Methods for Engineering, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N. J, 1963, стр. 10—12.
3. B. Friedman, Principles and Techniques of Applied Mathematics, John Wiley and Sons, New York, 1956, стр. 2—5.
4. M. Bocher, Introduction to Higher Albegra, The Macmillan Co., New York, стр. 296.
5. Р. Фрезер, Б. Дункан, А. Коллар, Теория матриц и ее приложения к дифференциальным уравнениям и динамике, ИЛ, 1950.
6. Там же, стр. 65.
7. E. A. Guillemin, The Mathematics of Circuit Analysis, John Wiley and Sons, New York, 1949, стр. 113—114.

8. F. B. Hildebrand, Methods of Applied Mathematics, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1952, стр. 61.
9. Л. С. Понтрягин, Обыкновенные дифференциальные уравнения, «Наука», 1965.
10. Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, «Наука», 1967.
11. F. Ayres, Theory and Problems of Matrices, Schaum Publishing Co., New York, 1962, стр. 188—195, 203—214.
12. H. W. Turnbull and A. C. Aiken, An Introduction to the Theory of Canonical Matrices, Blackie and Son, London, 1932.
13. Е. Коддингтон, Н. Левинсон, Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, ИЛ, 1950.
14. Frazer, Duncan and Collar, op. cit., стр. 70.
15. Hildebrand, op. cit., стр. 65—67.
16. Frazer, Duncan and Collar, op. cit., стр. 78.
17. Ibid., стр. 83.
18. Р. Курант, Д. Гильберт, Методы математической физики, Гостехиздат, т. 1, главы II, V и VI, 1951.

ГЛАВА 5

ПЕРЕМЕННЫЕ СОСТОЯНИЯ И ЛИНЕЙНЫЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ СИСТЕМЫ

§ 5.1. Введение

Рассмотренные в четвертой главе операции с матрицами, а также основные понятия векторного пространства привлекаются в настоящей главе для изучения систем с многими входами и выходами. В связи с возрастающей потребностью в высококачественных сложных системах были проведены исследования с целью разработки методов, пригодных для проектирования таких систем. Подобные методы должны быть действенными не только с точки зрения вычислений, но также, что более важно, должны способствовать выработке общего подхода к таким задачам. Наиболее опытные инженеры обладают определенной интуицией, а потому любой предлагаемый метод должен дать возможность инженеру «схватить» его техническую сторону, произвести оценку на основе практического опыта.

Анализ и синтез систем с многими входами и выходами, называемых многосвязными, представляет собой сложную задачу. Определение взаимно связанных воздействий и управление ими в многосвязных системах встречает определенные трудности, наилучшим образом разрешаемые привлечением электронных вычислительных машин. Инженер, производящий вычисления на машине, должен быть осведомлен о всех возможных методах решения исследуемой им задачи. По этой причине (а также и в связи с рядом других) исследование методов решения указанных задач базируется на подходе с позиций «переменных состояния».

С точки зрения математики подход, основанный на понятии переменных состояния, представляет собой использование методов матричного исчисления и векторного анализа для операций с большим числом переменных, входящих в исследуемые задачи. Указанный подход по сути не содержит новых методов, скорее это открытие нового применения для существующих математических методов. Существенную помощь они оказывают в решении линейных многосвязных задач. Более важным является, однако, то, что подход основанный на понятии переменных со-

стояния, способствует становлению «общего взгляда» на указанные линейные задачи, а также и нелинейные. Более того, он позволяет подойти к линейным и нелинейным задачам, часто рассматриваемым инженерами как не связанным друг с другом, с единых позиций.

§ 5.2. Схемы моделирования

Математические уравнения, описывающие систему, удобно представить в виде блок-схемы, подобной вычерчиваемой иногда для моделирования на аналоговых вычислительных устройствах. Такая схема состоит из блоков, внутри которых указывается функция, моделируемая блоком. Наиболее часто в качестве основных элементов используются (рис. 5.2.1) идеальные интегрирующие звенья (интеграторы), идеальные усилительные звенья (усилители) и идеальные суммирующие звенья (сумматоры). Слово «идеальные» употребляется в том смысле, что на практике при моделировании следует предварительно произвести учет таких факторов, как фазовый сдвиг, перемену знака, нагрузку.

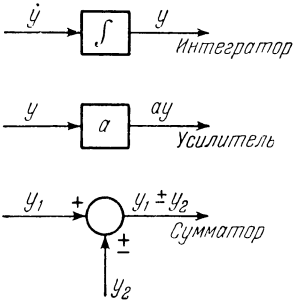


Рис. 5.2.1.

Используемый при построении блок-схемы линейного дифференциального уравнения метод состоит в последовательном интегрировании наивысших производных уравнения, получении всех производных низшего порядка и зависимых переменных. Блок-схема составляется из условия удовлетворения данному дифференциальному уравнению, т. е. производные умножаются на соответствующие им коэффициенты и эти члены суммируются, образуя «замкнутую цепь». Поясним этот метод на нескольких примерах.

Пример 5.2.1. Начертить блок-схему системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by = v,$$

где v — входная, а y — выходная величины.

Разрешая уравнение относительно старшей производной $\ddot{y}$, имеем

$$\ddot{y} = v - a\dot{y} - by.$$

Интегрируя $\ddot{y}$ дважды, получим в соответствии с рис. 5.2.2, *а* $\dot{y}$ и y. Замкнутый контур образуется из условия удовлетворения дифференциальному уравнению

$$\ddot{y} = v - a\dot{y} - by.$$

Полная схема приведена на рис. 5.2.2, *б*.

Рис. 5.2.2, *б*, в сущности, соответствует блок-схеме моделирования этой системы на аналоговом вычислительном устройстве. Последняя, однако, должна также учитывать изменение знака, вносимое интеграторами, усилителями и сумматорами, начальные условия системы и масштабные коэффициенты времени и амплитуды. Таким образом, рис. 5.2.2, *б* служит лишь математическим описанием данной системы при нулевых начальных условиях, а не является рабочей блок-схемой моделирования.

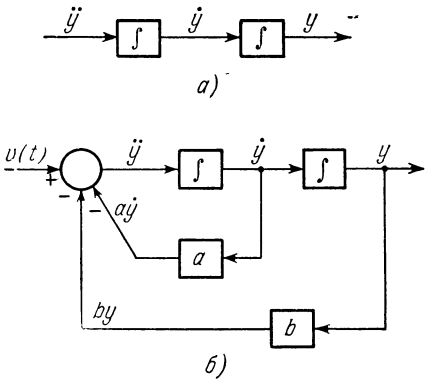


Рис. 5.2.2.

Пример 5.2.2. Начертить блок-схему системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by = \dot{v} + v.$$

Единственное изменение по сравнению с предыдущей блок-схемой состоит в добавлении звена, соответствующего члену $\dot{v}$, как это показано на рис. 5.2.3, *а*. Однако блок, осуществляющий дифференцирование, как правило, не используется. Дифференциаторы принадлежат к устройствам, «притягивающим» шумы, а потому в аналоговых моделях они не применяются.

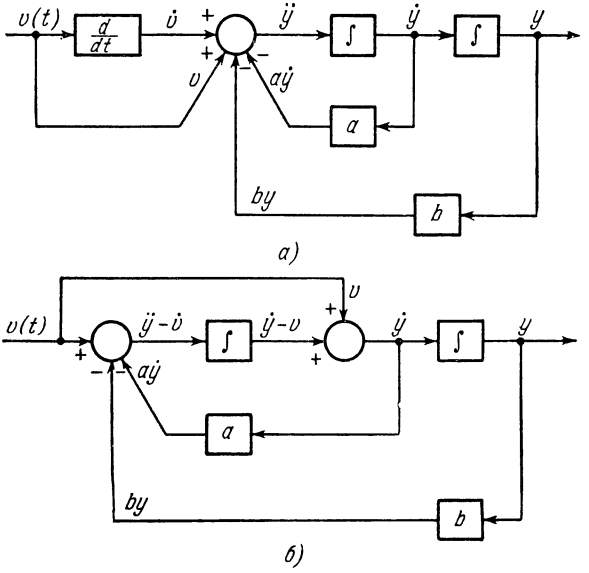


Рис. 5.2.3.

Чтобы исключить из схемы дифференцирующее звено, предположим, что вход первого интегратора равен $\ddot{y} - \dot{v}$. Поэтому

$$\ddot{y} - \dot{v} = v - a\dot{y} - by.$$

Это уравнение моделируется, как показано на рис. 5.2.3, *б*. Выход первого интегратора равен $\dot{y} - v$. Суммируя с v, получим $\dot{y}$. Схема окончательно

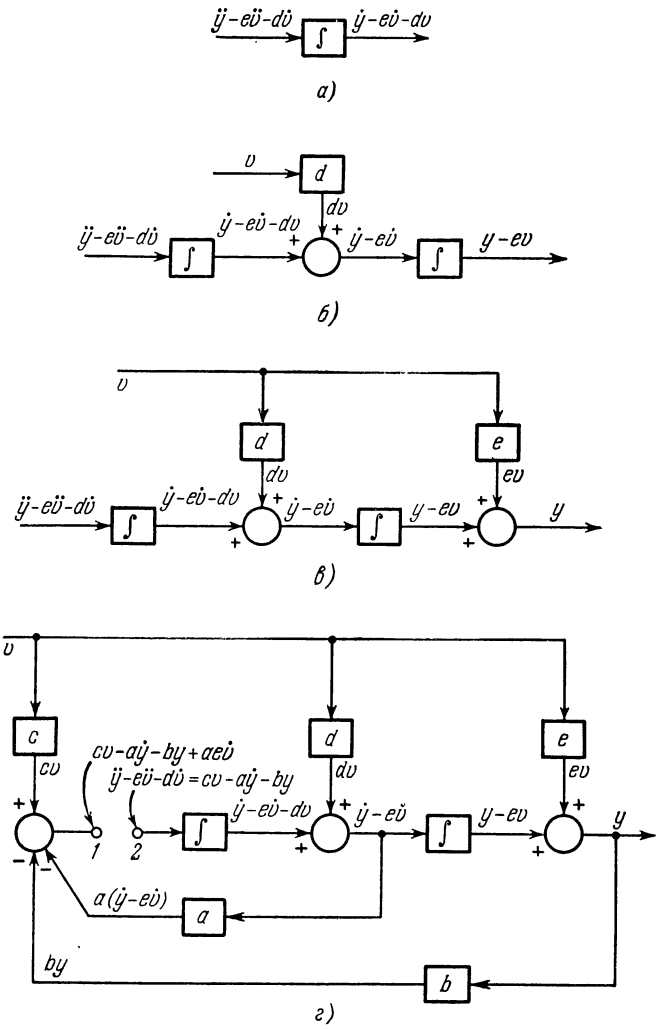


Рис. 5.2.4.

строится как и в предыдущем примере. В сущности, вход $\dot{v}$ на рис. 5.2.3, *а* перенесен в точку справа от первого интегратора и исключены операторы дифференцирования и интегрирования.

Пример 5.2.3. Начертить блок-схему системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by = e\ddot{v} + d\dot{v} + cv,$$

где a, b, c, d, e — постоянные величины.

Подобно способу, рассмотренному в предыдущем примере, предположим, что вход первого интегратора равен $\ddot{y} - e\ddot{v} - d\dot{v}$, как это показано на рис. 5.2.4, *а*. Член $-dv$ исключается подачей dv на вход первого интегратора (рис. 5.2.4, *б*).

Член $-ev$ можно устранить, подавая ev на вход второго интегратора. Это показано на рис. 5.2.4, *в*. Однако при попытке замкнуть схему из условия удовлетворения данному дифференциальному уравнению, видно, что производная $\dot{y}$ не фигурирует отдельно в какой-либо точке схемы. Точка *1* на рис. 5.2.4, *г* отвечает величине $cv - a\dot{y} - by + ae\dot{v}$ и не отвечает дифференциальному уравнению

$$\ddot{y} - e\ddot{v} - d\dot{v} = cv - a\dot{y} - by. \tag{5.2.1}$$

На вход первого интегратора поступает дополнительный член $ae\dot{v}$. Тем не менее система может моделироваться и в указанном виде при модификации блоков, содержащих коэффициенты c, d и e.

Рассмотрим тогда схему на рис. 5.2.5, *а*, где b_0, b_1 и b_2 — надлежащие коэффициенты. Обозначим входную величину первого интегратора через $\ddot{q}$. Величины в других точках указаны на рис. 5.2.5, *а*. Данная блок-схема моделирует дифференциальное уравнение

$$\ddot{q} = -a\dot{q} - bq + (b_0 - ab_1 - bb_2)\,v - bb_1 \int v\,dt. \tag{5.2.2}$$

Из условия равенства выхода схемы величине y имеем

$$q = y - b_1 \int v\,dt - b_2 v. \tag{5.2.3}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \dot{y} - b_1 v - b_2 \dot{v}, \\ \ddot{q} &= \ddot{y} - b_1 \dot{v} - b_2 \ddot{v}. \end{aligned} \tag{5.2.4}$$

Подстановка уравнений (5.2.2) и (5.2.3) в уравнение (5.2.4) дает

$$\ddot{y} - b_1\dot{v} - b_2\ddot{v} = -a\,(\dot{y} - b_1 v - b_2\dot{v}) - b\left(y - b_1 \int v\,dt - b_2 v\right) + \\ + (b_0 - ab_1 - bb_2)\,v - bb_1 \int v\,dt. \tag{5.2.5}$$

Группируя члены, получим

$$\ddot{y} - b_2\ddot{v} - (b_1 + ab_2)\,\dot{v} = b_0 v - a\dot{y} - by. \tag{5.2.6}$$

Сопоставляя уравнение (5.2.6) с уравнением (5.2.1) и приравнивая подобные члены, находим требуемые b_0, b_1 и b_2,

$$\begin{aligned} &b_2 = e, \\ &b_1 + ab_2 = d \quad \text{или} \quad b_1 = d - ae, \\ &b_0 = c. \end{aligned} \tag{5.2.7}$$

Схема показана на рис. 5.2.5, *в*.

Приведенная общая процедура для линейных систем используется в параграфе § 5.5 при выводе стандартной формы линейного векторного дифференциального уравнения. Устранение выходного сигнала первого интегратора

в схеме (на рис. 5.2.4, *г*), вызываемого при замыкании схемы паразитным входным сигналом $ae\ddot{v}$, осуществляется путем изменения коэффициента усиления блока d. Это видно из сравнения рис. 5.2.4, *в* и 5.2.5, *б*.

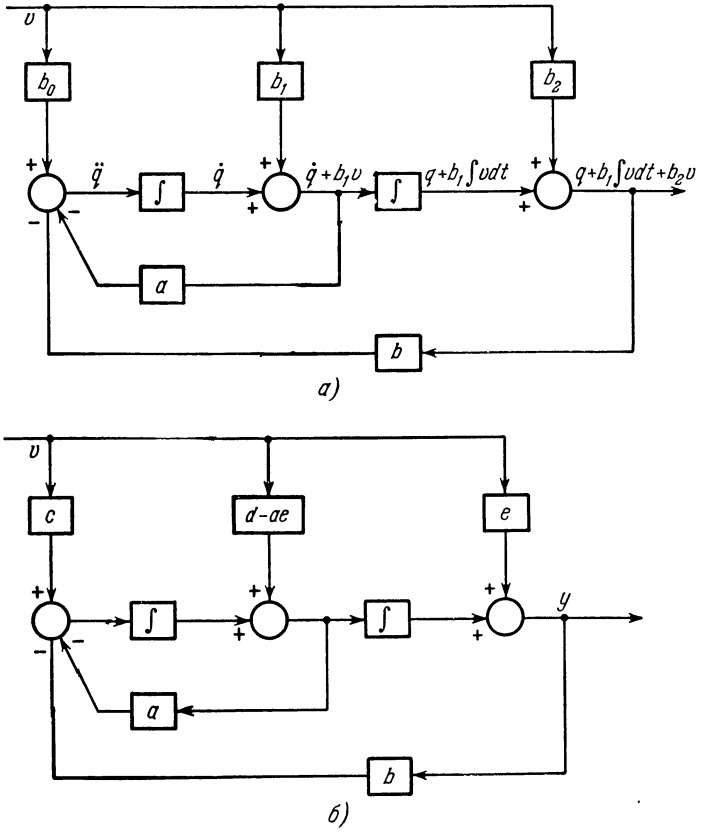


Рис. 5.2.5.

Системы с переменными параметрами. Системы с изменяющимися во времени параметрами можно представить в виде блоков с зависящими от времени коэффициентами усиления. Если в дифференциальное уравнение входят производные от входного сигнала, то процедура, указанная в примере 5.2.3, становится более сложной. Этот случай предлагается в качестве упражнения в конце данной главы.

Пример 5.2.4. Начертить блок-схему для системы с изменяющимися во времени параметрами, описываемую уравнением

$$\ddot{y} + a(t)\,\dot{y} + b(t)\,y = v.$$

Схема моделирования с использованием усилителей с переменными коэффициентами усиления показана на рис. 5.2.6.

Нелинейные системы. Использование так называемых блоков умножения и функциональных блоков позволяет чертить схемы и для нелинейных систем. Эти два блока показаны на рис. 5.2.7.

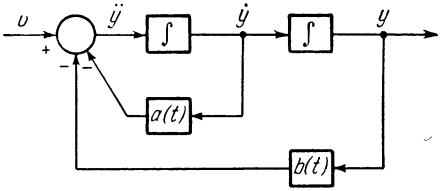


Рис. 5.2.6.

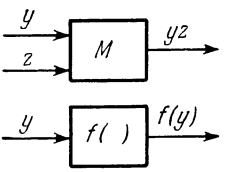


Рис. 5.2.7.

Пример 5.2.5. Начертить блок-схему для системы, дифференциальное уравнение которой равно

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by^2 = v.$$

Схема моделирования этой системы изображена на рис. 5.2.8, *а*. Данную систему можно также представить в виде схемы на рис. 5.2.8, *б*. Вместо двух

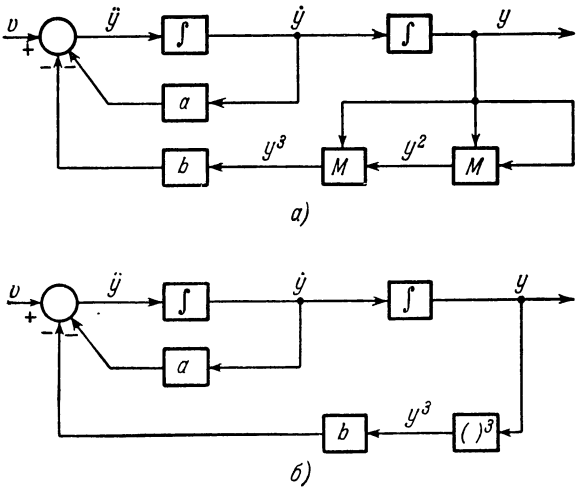


Рис. 5.2.8.

блоков умножения на нем указан блок $(\ )^3$. В этом случае формируется функция $f(y) = y^3$.

Пример 5.2.6. Начертить блок-схему для системы

$$\ddot{y} + ay\dot{y} + by^3 = v.$$

В этом случае следует использовать как функциональный блок, так и блок умножения. Схема моделирования дана на рис. 5.2.9.

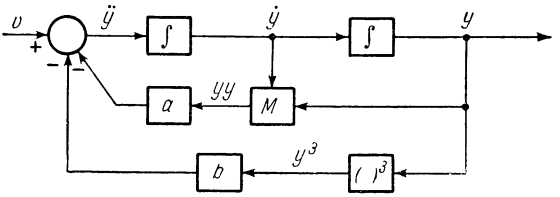


Рис. 5.2.9.

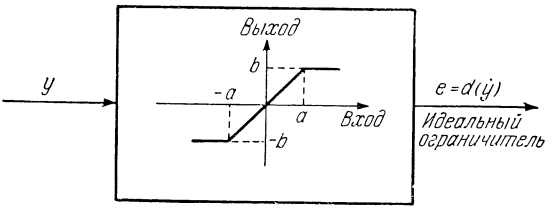
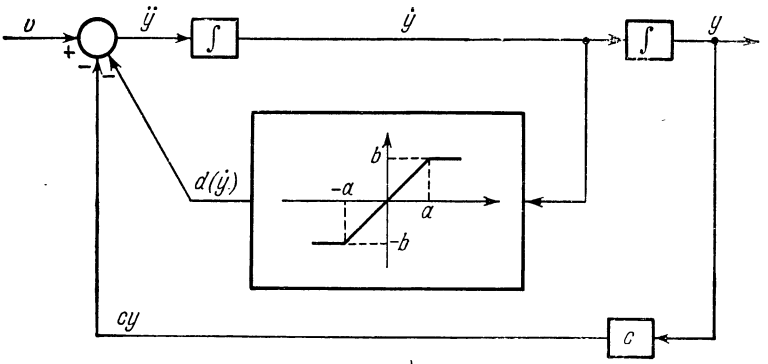
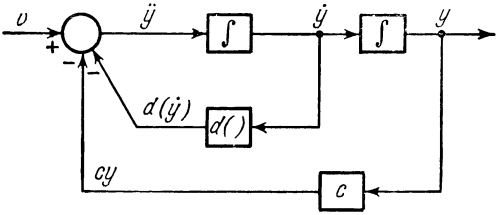


Рис. 5.2.10.



а)



б)

Рис. 5.2.11.

Пример 5.2.7. Обозначив функциональную связь между входом $\dot{y}$ и выходом e блока как $e=d(\dot{y})$, начертить блок-схему для дифференциального уравнения

$$\ddot{y}+d(\dot{y})+by=v.$$

Нелинейностью служит идеальный ограничитель, изображенный на рис. 5.2.10.

В случае, если формируемая функциональная зависимость не может быть выражена в удобной математической форме, соотношение вход — выход желаемой функции часто вычерчивают непосредственно на блоке. Большей

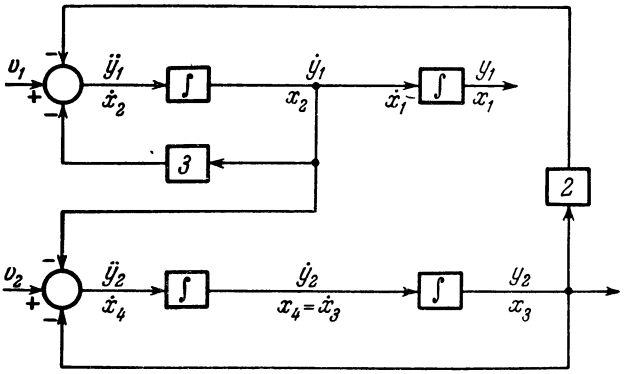


Рис. 5.2.12.

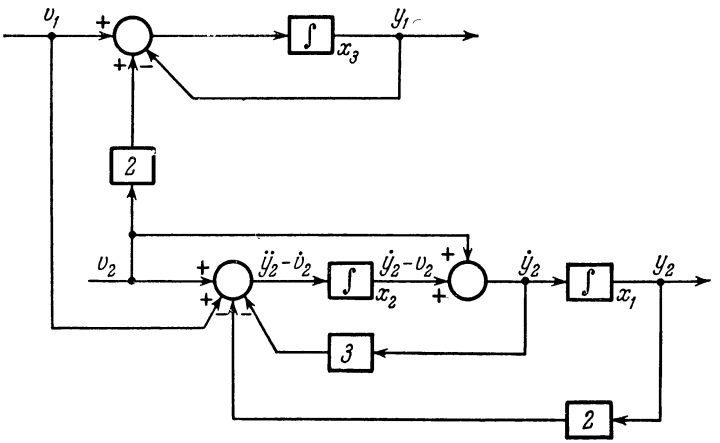


Рис. 5.2.13.

частью это делают при кусочно-линейной зависимости между входом и выходом. Примером служит схема на рис. 5.2.11, *а*, которая несет в себе больше информации, чем на рис. 5.2.11, *б*. Из рис. 5.2.11, *а* непосредственно видно существование нелинейности и не требуется обращаться к другой схеме, определяющей $d(\dot{y})$.

Многосвязные системы. Для многосвязных систем, в сущности, пригоден тот же самый метод. На примерах 5.2.8 и 5.2.9 иллюстрируются два случая.

Пример 5.2.8. Начертить схему многосвязной системы

$$\ddot{y}_1 + 3\dot{y}_1 + 2y_2 = v_1,$$
$$\ddot{y}_2 + \dot{y}_1 + y_2 = v_2.$$

Схема моделирования, показанная на рис. 5.2.12, получена на основе описанной ранее методики.

Пример 5.2.9. Начертить схему многосвязной системы

$$\dot{y}_1 + y_1 = v_1 + 2v_2,$$
$$\ddot{y}_2 + 3\dot{y}_2 + 2y_2 = v_1 + v_2 + \dot{v}_2.$$

При этом член $\dot{v}_2$ следует перенести в левую часть уравнения, как в примере 5.2.2. Схема моделирования изображена на рис. 5.2.13.

§ 5.3. Передаточные матричные функции

Понятие передаточной функции $H(s)$ введено в § 3.5 для линейных систем с постоянными параметрами, содержащими одну входную и одну выходную величины. Для систем, имеющих больше одной входной или выходной величины, представляют интерес передаточные функции между различными входами и выходами. Понятие передаточной функции легко распространяется на этот более общий случай. Передаточная функция $H_{ij}(s)$, являющаяся передаточной функцией между j-м входом и i-м выходом, определяется посредством

$$H_{ij}(s) = \frac{Y_i(s)}{V_j(s)}; \quad V_k(s) = 0, \quad k \neq j. \tag{5.3.1}$$

Таблица из элементов $H_{ij}(s)$, где первый индекс i обозначает строку, а второй индекс j обозначает столбец, называется *передаточной матричной функцией.*

Пример 5.3.1. Система с двумя входами и двумя выходами описывается дифференциальными уравнениями

$$\ddot{y}_1 + 5\dot{y}_1 + 6y_1 = \ddot{v}_1 + 3\dot{v}_1 + 4\dot{v}_2 + 8v_2,$$
$$\dot{y}_2 + y_2 = \dot{v}_1 + 2\dot{v}_2 + 2v_2.$$

Определить ее передаточную матричную функцию и начертить блок-схему.

Применение преобразования к обеим уравнениям, предполагая нулевыми начальные условия, дает

$$(s+2)(s+3)Y_1(s) = s(s+3)V_1(s) + 4(s+2)V_2(s),$$
$$(s+1)Y_2(s) = sV_1(s) + 2(s+1)V_2(s)$$

или

$$Y_1(s) = \frac{s}{s+2} V_1(s) + \frac{4}{s+3} V_2(s),$$

$$Y_2(s) = \frac{s}{s+1} V_1(s) + 2V_2(s).$$

Тогда передаточная матричная функция $\mathbf{H}(s)$ равна

$$\mathbf{H}(s) = \begin{bmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s}{s+2} & \frac{4}{s+3} \\ \frac{s}{s+1} & 2 \end{bmatrix}.$$

Блок-схема, соответствующая передаточной функции, показана на рис. 5.3.1.

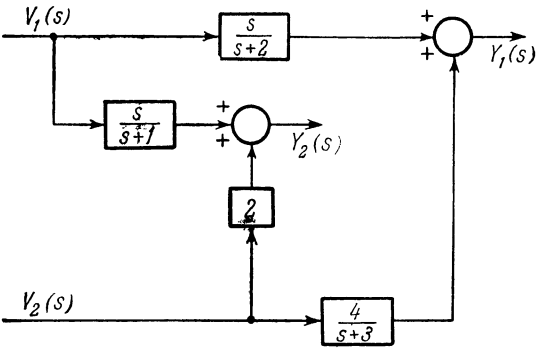


Рис. 5.3.1.

Пример 5.3.2. Система с двумя входами и двумя выходами описывается дифференциальными уравнениями

$$\dot{y}_1 + y_2 = v_1 + v_2,$$
$$\dot{y}_2 + y_1 = v_2.$$

Определить передаточную матричную функцию и начертить блок-схему.

Преобразуя уравнения, считая нулевыми начальные условия, получим

$$sY_1(s) + Y_2(s) = V_1(s) + V_2(s),$$
$$sY_2(s) + Y_1(s) = V_2(s).$$

Разрешая эти уравнения относительно $Y_1(s)$, $Y_2(s)$, имеем

$$Y_1(s) = \frac{s}{(s+1)(s-1)} V_1(s) + \frac{1}{s+1} V_2(s),$$

$$Y_2(s) = \frac{-1}{(s+1)(s-1)} V_1(s) + \frac{1}{s+1} V_2(s).$$

Следовательно,

$$\mathbf{H}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{s}{(s+1)(s-1)} & \dfrac{1}{s+1} \\ \dfrac{-1}{(s+1)(s-1)} & \dfrac{1}{s+1} \end{bmatrix}.$$

Блок-схема этой системы, соответствующая ее передаточной функции, показана на рис. 5.3.2.

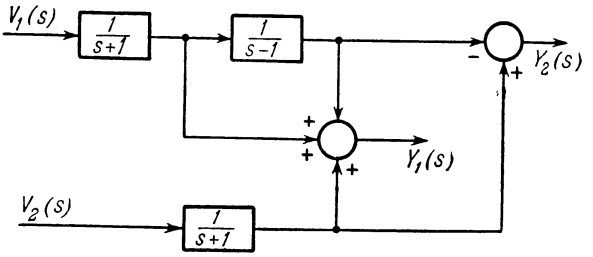


Рис. 5.3.2.

Следует отметить, что передаточные функции $1/(s+a)$ и $s/(s+a)$, обычно встречающиеся в подобных схемах, можно сформировать при помощи одного интегратора. Это показано на рис. 5.3.3. Здесь обращается внимание на важное обстоятельство, связанное с тем фактом, что блок-схема на рис. 5.3.2 содержит три интегратора. Вывод о том, что соответствующая схеме система является системой третьего порядка, неверный. Для схемы, отвечающей исходному дифференциальному уравнению, как показано на рис. 5.3.4, требуются только два интегратора. Схема моделирования, полученная на основе первоначального дифференциального уравнения, всегда указывает правильный порядок системы. Блок-схему, соответствующую передаточной функции, следует применять, ясно представляя физическую сторону задачи; в противном случае возможна ошибочная оценка порядка рассматриваемой системы. Блок-схема,

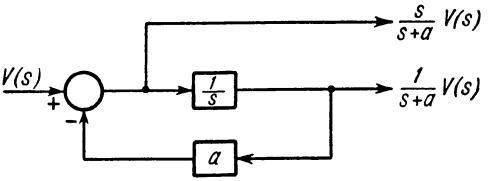


Рис. 5.3.3.

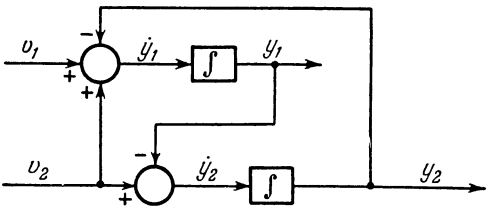


Рис. 5.3.4.

соответствующая передаточной функции, часто скрывает физические свойства системы. Об этом более подробно остановимся в § 5.7 при рассмотрении управляемости и наблюдаемости многосвязных систем.

§ 5.4. Понятие состояния

Рассмотрим электрическую цепь известной структуры, содержащую один вход и один выход.

Входным сигналом цепи служит функция времени $v(t)$, а выходным — функция времени $y(t)$. Имея полную информацию о цепи, для определения выхода $y(t)$ на интервале времени $(-\infty, t)$ достаточно знать входной сигнал $v(t)$ на всем данном временно́м интервале. Однако, если вход известен лишь на интервале времени (t_0, t), для определения выхода $y(t)$ на указанном интервале необходимо знать токи, протекающие через индуктивности, и напряжения на емкостях в некоторый момент времени t_1, где $t_0 \leqslant t_1 \leqslant t$ (обычно $t_1 = t_0$).

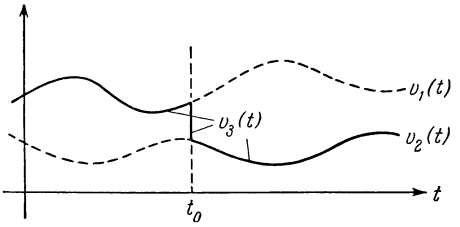


Рис. 5.4.1.

Эти токи и напряжения образуют «состояние» цепи в момент t_1. В этом смысле состояние цепи связывается с ее памятью. В случае чисто активной цепи (с нулевой памятью) для определения текущего значения выхода требуется только знание текущего значения входа.

В качестве другого примера состояния системы рассмотрим решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами при $t \geqslant t_0$. Так как общее решение получается зависящим от произвольных постоянных, то эти постоянные можно определить из условия удовлетворения системы граничным условиям в момент времени t_0. Никакой иной информации не требуется. Граничные условия могут трактоваться как состояние системы в момент t_0. Эвристически состояние системы отделяет будущее от прошлого, так что состояние содержит всю информацию о прошлом системы, необходимую для определения реакции на произвольный входной сигнал.

Понятие состояния является основным понятием и, следовательно, не может быть определено более полно, чем, например, слово «множество» в математике. Наибольшее, что можно сделать в этом плане, это сформулировать *свойства*, какими должна обладать система, поведение которой отвечает понятию

состояния. Рассматриваемые здесь системы относятся к детерминированным. *Детерминированная* система определяется следующими образом *):

1) Существует класс функций времени $\mathbf{v}(t)$, называемых допустимыми функциями входа;

2) для *каждого* момента времени t определяется множество X_t, элементы которого $\mathbf{x}(t)$ являются возможными состояниями;

3) каждой паре $\mathbf{v}(t)$, $\mathbf{x}(t)$ отвечает по крайней мере одна функция времени, называемая функцией выхода, и для всякого $t' > t$ в $X_{t'}$ содержится единственный элемент $\mathbf{x}(t')$.

Указанные множества состояний и введенные функции в случае системы с определенным состоянием должны удовлетворять следующей последовательности условий.

1) Если $v_1(t)$ и $v_2(t)$ — допустимые функции входа, то

$$v_3(t) = v_1(t), \quad t \leqslant t_0;$$
$$v_3(t) = v_2(t), \quad t > t_0$$

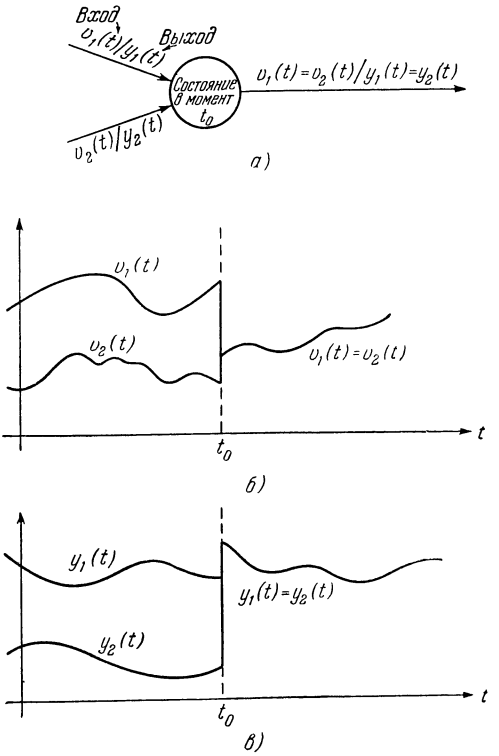


Рис. 5.4.2.

также должна являться допустимой функцией. Рис. 5.4.1 служит иллюстрацией скалярного случая.

2) Будущие значения выхода не зависят от характера достижения системой ее текущего состояния. Состояние системы в данный момент времени, а также текущие и будущие значения ее входов единственным образом определяют настоящие и будущие значения ее выходов. Поэтому для каждого $\mathbf{x}(t_0)$,

*) Пункт 2) учитывает возможность изменения пространства состояний во времени, а пункт 3) содержит понятие *конечного* состояния для каждого начального состояния в момент t. Эти понятия несколько отличаются от более общих понятий, введенных Заде и Дезоером [1] и исходящих из характеристики системы посредством описания всех наблюдаемых пар «вход — выход».

принадлежащего X_{t_0}, и при допустимых функциях входов $\mathbf{v}_1(t)$, $\mathbf{v}_2(t)$ (где $\mathbf{v}_1(t) = \mathbf{v}_2(t)$ при $t > t_0$) *произвольная* функция выхода, соответствующая $\mathbf{x}(t_0)$ и $\mathbf{v}_1(t)$, *тождественна произвольной* функции выхода, соответствующей $\mathbf{x}(t_0)$ и $\mathbf{v}_2(t)$ при $t > t_0$. Скалярный случай иллюстрируется на рис. 5.4.2.

3) Если заданы начальное состояние системы и вход $\mathbf{v}(t)$, $t \geqslant t_0$, то выход $\mathbf{y}(t)$, $t \geqslant t_0$, определяется единственным образом. Предположим, что известные функции времени входа и выхода разделены двумя интервалами времени. На втором интервале может существовать множество начальных состояний, которым при заданной на этом интервале функции входа соответствует данная функция выхода. Однако по крайней мере одно из этих возможных начальных состояний *должно* быть конечным состоянием для первого интервала. Это показано на рис. 5.4.3. Точнее, пусть при любых $\mathbf{x}(t_0)$, принадлежащих X_{t_0}, и при функции входа $\mathbf{v}(t)$ X_1, содержащееся в X_1 $(t_1 > t_0)$, будет множеством всех состояний, для которых функция выхода, соответствующая $\mathbf{v}(t)$ и $\mathbf{x}$, принадлежащих X_1, совпадает при $t > t_1$ с функцией выхода, соответствующей $\mathbf{v}(t)$ и $\mathbf{x}(t_0)$. Тогда $\mathbf{x}(t_1)$ содержится в X_1.

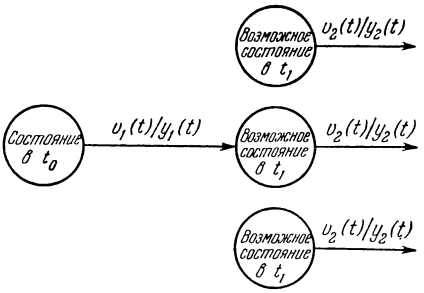


Рис. 5.4.3.

Приведенные три условия можно записать в виде двух уравнений, называемых *уравнениями состояния*:

$$\mathbf{y}(t_0, t) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(t_0):\ \mathbf{v}(t_0, t)], \tag{5.4.1}$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t_0);\ \mathbf{v}(t_0, t)], \tag{5.4.2}$$

где как $\mathbf{g}$, так и $\mathbf{f}$ являются *однозначными* функциями. Из уравнения (5.4.1) следует, что выходной сигнал $\mathbf{y}$ на интервале (t_0, t) является однозначной функцией входного сигнала $\mathbf{v}$ на этом интервале времени и состояния в начале интервала. Состояние в конце интервала, как это следует из уравнения (5.4.2), является однозначной функцией такого же аргумента. Указанные два уравнения задают *систему с определенным в ней состоянием.*

В качестве составляющих вектора состояния в схеме моделирования большей частью используются выходы интеграторов.

Вектор состояния определяется в n-мерном пространстве состояний с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Движение *конца* вектора состояния в пространстве состояний называется *траекторией* вектора состояния.

Несмотря на то, что выходы интеграторов в схеме моделирования образуют естественный вектор состояния, эти переменные могут не быть доступными измерению в реальной системе. Эффективные законы управления многосвязной системой должны формироваться на базе доступной измерению информации. Подробнее на этом остановимся в дальнейшем.

§ 5.5. Представление линейных уравнений состояния при помощи матриц

В предыдущем параграфе уравнения состояния непрерывной детерминированной системы определялись в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= \mathbf{g}[\mathbf{x}(t_0),\ \mathbf{v}(t_0, t)], \\ \mathbf{x}(t) &= \mathbf{f}[\mathbf{x}(t_0),\ \mathbf{v}(t_0, t)]. \end{aligned} \tag{5.5.1}$$

Для системы, описываемой системой *обыкновенных линейных*

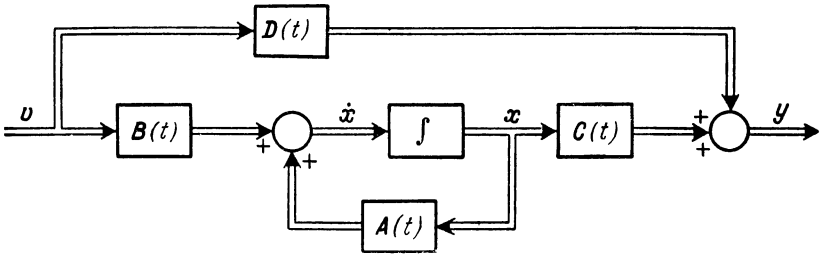


Рис. 5.5.1.

дифференциальных уравнений, уравнения состояния записываются как

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{v}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{v}(t), \end{aligned} \tag{5.5.2}$$

где $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$, $\mathbf{C}(t)$ и $\mathbf{D}(t)$ являются в общем случае матрицами с изменяющимися во времени элементами, а

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_p \end{bmatrix}.$$

В общем виде блок-схема, соответствующая этим уравнениям, показана на рис. 5.5.1. В случае системы с постоянными (неизменяющимися во времени) параметрами матрицы $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$, $\mathbf{C}(t)$ и $\mathbf{D}(t)$ постоянные и могут записываться просто как $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$.

Пример 5.5.1. Написать уравнения состояния для системы на рис. 5.2.12.

Для указанных на рис. 5.2.12 x_i, v_i и y_i имеем

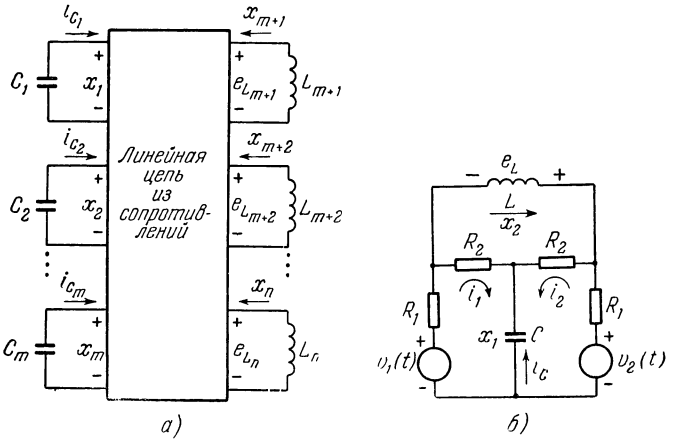


Рис. 5.5.2.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + [0 \quad 0] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix},$$

откуда

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = [0],$$

Пример 5.5.2. Определить систему уравнений состояния для обычной линейной, не зависящей от времени цепи, состоящей из сопротивлений, индуктивностей и емкостей.

Без потери общности данная цепь может быть представлена в виде, указанном на рис. 5.5.2, *а*. Определим переменные состояния.

$x_1, x_2, \ldots, x_m$ равны напряжениям на клеммах, связанным соответственно с $C_1, C_2, \ldots, C_m$ и приложенным к активному участку цепи, и

$x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ равны токам, протекающим к верхним клеммам активного участка цепи, связанным соответственно с $L_{m+1}, L_{m+2}, \ldots, L_n$.

Тогда цепь можно описать уравнением $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}$ или

$$\dot{x}_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j,$$

где a_{ij} должны быть определены.

Предположим, что цепь первоначально находится в покое, $x_i=0$, $i=1, 2, \ldots, n$. При подаче в момент $t=0$ единичного скачка напряжения на участок, содержащий j-ю емкость, все емкости в начальный момент эквивалентны зашунтированным накоротко участкам электрической цепи, а индуктивности — разомкнутым участкам электрической цепи. Это справедливо по той причине, что при действии ограниченного сигнала напряжения на емкостях и токи через индуктивности не могут изменяться мгновенно. Ток через i-ю емкость при $t=0+$ равен

$$i_{C_i}(0+)=-C_i\dot{x}_i(0+)=-C_ia_{ij}x_j(0+).$$

Эта величина соответствует постоянному току, протекающему через i-е клеммы при замкнутых накоротко емкостях и разомкнутых индуктивностях и действии источника напряжения в 1 *в*. Поэтому

$$a_{ij}=-\frac{g_{ij}}{C_i} \qquad (i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

где g_{ij} — ток через замкнутую накоротко C_i при действии в месте расположения C_j единичного скачка источника напряжения. Заметим, что непосредственно исследуемая для нахождения a_{ij} цепь является чисто активной.

При действии такого же скачка напряжения в момент $t=0$ на участке, включенном последовательно с j-й емкостью, напряжение на i-й индуктивности равно

$$e_{L_i}(0+)=-L_i\dot{x}_i(0+)=-L_ia_{ij}x_j(0+),$$

откуда

$$a_{ij}=-\frac{\alpha_{ij}}{L_i} \qquad \begin{matrix}(i=m+1,\ m+2,\ \ldots,\ n;\\ j=1,2,\ \ldots,\ m),\end{matrix}$$

где α_{ij} — напряжение на i-й паре клемм разомкнутой индуктивности при действии в месте расположения C_j источника в 1 *в*. Все емкости и индуктивности соответственно замкнуты накоротко или разомкнуты, так что снова анализ ограничивается исследованием чисто активной цепи.

Если, в отличие от приведенного, параллельно с j-й индуктивностью в момент $t=0$ действует единичный скачок тока, то напряжение на i-й индуктивности при $t=0+$ равно

$$e_{L_i}(0+)=-L_i\dot{x}_i(0+)=-L_ia_{ij}x_j(0+),$$

откуда

$$a_{ij}=-\frac{r_{ij}}{L_i} \qquad (i,\ j=m+1,\ m+2,\ \ldots,\ n),$$

где r_{ij} — напряжение на r-й паре разомкнутых клемм при действии единичного источника тока, приложенного к j-й паре клемм.

При действии такого же тока в момент $t=0$ параллельно с j-й индуктивностью ток через i-ю емкость при $t=0+$ равен

$$i_{C_i}=-C_i\dot{x}_i(0+)=-C_ia_{ij}x_j(0+),$$

откуда

$$a_{ij}=-\frac{\beta_{ij}}{C_i} \qquad \begin{matrix}(i=1,\ 2,\ \ldots,\ m;\\ j=m+1,\ m+2,\ \ldots,\ n),\end{matrix}$$

где β_{ij} — ток через i-ю замкнутую накоротко пару клемм при действии единицы тока на j-ю пару клемм. При помощи подобных простых операций, исследуя чисто активные цепи, можно найти матрицу **A** обычной линейной стационарной RLC-цепи. В качестве специальной проверки указанной процедуры читатель может убедиться, что матрица **A** для электрической цепи на рис. 5.5.2, *б* равна

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\dfrac{2}{(R_1+R_2)\,C} & 0 \\ 0 & -\dfrac{2R_1R_2}{(R_1+R_2)\,L} \end{bmatrix}.$$

Используя форму записи уравнения (5.5.2), можно характеризующее систему обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка переписать в виде системы n дифференциальных уравнений первого порядка относительно переменных состояния **x**.

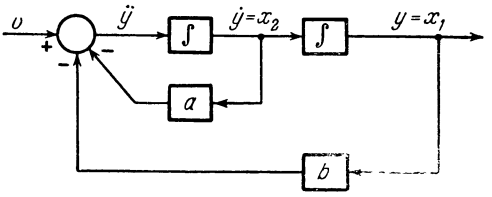


Рис. 5.5.3.

Пример 5.5.3. Описать систему уравнением

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by = v,$$

где $v(t)$ — входная, а $y(t)$ — выходная величины, в терминах пространства состояний.

Схема моделирования системы показана на рис. 5.5.3. Удобно в качестве переменных состояния выбрать выходы интеграторов, т. е. y и $\dot{y}$. Пусть $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$, откуда

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -bx_1 - ax_2 + v.$$

Данная система в векторной форме имеет вид

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v,$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0]\, v.$$

Следовательно,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0], \quad \mathbf{D} = [0].$$

Теперь рассмотрим обобщение методики, изложенной в примере 5.5.3 на случай линейной системы с постоянными параметрами, одним входом и выходом, описываемой уравнением

$$(p^n + \alpha_{n-1}p^{n-1} + \ldots + \alpha_1 p + \alpha_0)\, y = \\ = (\beta_n p^n + \beta_{n-1}p^{n-1} + \ldots + \beta_1 p + \beta_0)\, v, \qquad (5.5.3)$$

где $p = d/dt$. Схема моделирования этой системы изображена на рис. 5.5.4. В качестве переменных состояния выбираются выходы интеграторов. Постоянные величины a_i и b_i должны быть выражены через α_i и β_i из условия удовлетворения схемы уравнению (5.5.3).

Непосредственно из схемы моделирования следует

$$\begin{aligned} y &= x_1 + b_0 v, \\ \dot{x}_k &= x_{k+1} + b_k v, \quad k < n, \\ \dot{x}_n &= -(a_0 x_1 + a_1 x_2 + \ldots + a_{n-1} x_n) + b_n v. \end{aligned} \tag{5.5.4}$$

Дифференцируя y, получим

$$py = \dot{x}_1 + b_0 \dot{v}.$$

Последующая подстановка $\dot{x}_1$ из уравнения (5.5.4) дает

$$py = x_2 + b_1 v + b_0 \dot{v}. \tag{5.5.5}$$

Согласно приводимой процедуре вторая и старшие производные y равны

$$\begin{aligned} p^2 y &= \dot{x}_2 + b_1 \dot{v} + b_0 \ddot{v} = x_3 + b_2 v + b_1 \dot{v} + b_2 \ddot{v}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p^{n-1} y &= x_n + b_{n-1} v + b_{n-2} p v + \ldots + b_0 p^{n-1} v, \\ p^n y &= -(a_0 x_1 + a_1 x_2 + \ldots + a_{n-1} x_n) + b_n v + b_{n-1} p v + \ldots + b_0 p^n v. \end{aligned} \tag{5.5.6}$$

Подставив y, py, ..., $p^{n-1}y$ из уравнений (5.5.4), (5.5.5) и (5.5.6) в уравнение (5.5.3) и сопоставляя результат с выражением

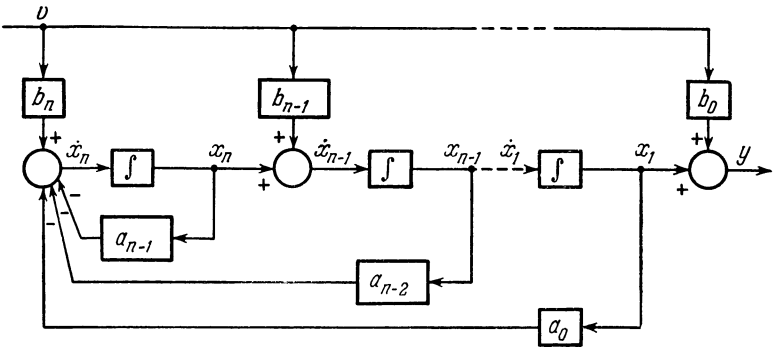


Рис. 5.5.4.

для $p^n y$, задаваемым уравнением (5.5.6), получим выражения для a_i и b_i в виде

$$a_i = \alpha_i \tag{5.5.7}$$

и

$$\begin{aligned} b_0 &= \beta_n, \\ b_1 &= \beta_{n-1} - \alpha_{n-1} b_0, \\ b_2 &= \beta_{n-2} - \alpha_{n-1} b_1 - \alpha_{n-2} b_0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_n &= \beta_0 - \alpha_{n-1} b_{n-1} - \alpha_{n-2} b_{n-2} - \ldots - \alpha_0 b_0. \end{aligned} \tag{5.5.}$$

Уравнение (5.5.8) представляет собой удобную форму записи выражения для b_i. В данном случае b_i находятся путем последовательных подстановок. Так как из уравнения (5.5.8) следует, что β_i можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} \beta_n \\ \beta_{n-1} \\ \beta_{n-2} \\ \vdots \\ \beta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

то b_i можно также определить, умножив обе части этого выражения на обратную матрицу коэффициентов. Согласно полученным выражениям одна из форм матриц **A**, **B**, **C** и **D** для системы, описываемой уравнением (5.5.3), имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \tag{5.5.9}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_{n-1} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \beta_n \\ \beta_{n-1} \\ \beta_{n-2} \\ \vdots \\ \beta_0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad 0 \dots 0],$$

$$\mathbf{D} = b_0 = \beta_n.$$

Приведенные уравнения состояния соответствуют так называемому *стандартному виду системы.*

Пример 5.5.4. Привести уравнение

$$\dddot{y} + 3\ddot{y} + 4\dot{y} + y = 2\dddot{v} + 3\ddot{v} + \dot{v} + 2v$$

к стандартному виду.

Из уравнения (5.5.8) имеем:

$$b_0 = \beta_n = 2,$$

$$b_1 = \beta_{n-1} - \alpha_{n-1} b_0 = 3 - 3\,(2) = -3,$$

$$b_2 = \beta_{n-2} - \alpha_{n-1} b_1 - \alpha_{n-2} b_0 = 1 - 3\,(-3) - 4\,(2) = 2,$$

$$b_3 = \beta_{n-3} - \alpha_{n-1} b_2 - \alpha_{n-2} b_1 - \alpha_{n-3} b_0 = 2 - 3\,(2) - 4\,(-3) - 1\,(2) = 6,$$

Отсюда согласно уравнениям (5.5.2) и (5.5.9) данная система представляется в векторно-матричном виде

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} v.$$

Схема моделирования изображена на рис. 5.5.5.

Уравнения состояния. Метод разложения на элементарные дроби. Уравнения состояния в отличной от указанной выше форме можно получить на основе разложения на элементарные

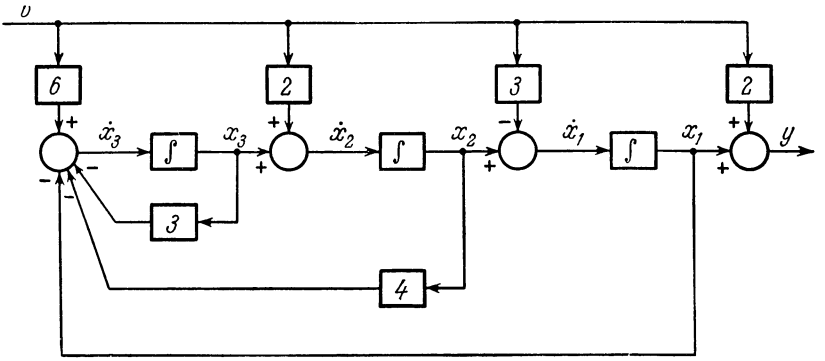


Рис. 5.5.5.

дроби передаточной функции системы. Рассмотрим систему с одним входом и выходом, передаточная функция которой равна $H(s)$. Предположим, что передаточную функцию можно представить в виде отношения двух многочленов $N(s)/D(s)$, причем порядок $N(s)$ не превосходит порядка $D(s)$. Если предположить, что корни $D(s)$ различные, то $D(s)$ можно записать как

$$D(s) = d_n (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \ldots (s - \lambda_n),$$

где λ_i — характеристические числа рассматриваемой системы. Тогда передаточная функция $H(s)$ раскладывается в виде

$$H(s) = d_0 + \frac{c_1}{c - \lambda_1} + \frac{c_2}{s - \lambda_2} + \ldots + \frac{c_n}{s - \lambda_n}, \qquad (5.5.10)$$

где

$$d_0 = \lim_{s \to \infty} H(s)$$

$$c_i = (s - \lambda_i) \frac{N(s)}{D(s)} \Big|_{s = \lambda_i}.$$

Выход $Y(s) = H(s)V(s)$ можно представить в виде

$$Y(s) = d_0 V(s) + \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{s - \lambda_i} V(s). \qquad (5.5.11)$$

В результате получается схема моделирования на рис. 5.5.6, где

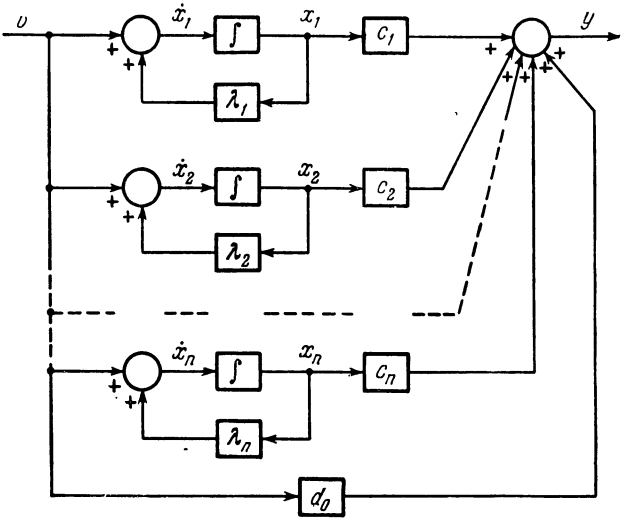


Рис. 5.5.6.

переменная состояния x_i удовлетворяет дифференциальному уравнению первого порядка

$$\dot{x}_i - \lambda_i x_i = v$$

и

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + d_0 v.$$

Уравнения состояния имеют вид

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix} v,$$

и

$$y = [c_1 \quad c_2 \ldots c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + d_0 v \tag{5.5.12}$$

или

$$\dot{\mathbf{x}} = \Lambda \mathbf{x} + v\mathbf{1},$$

$$y = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle + d_0 v. \tag{5.5.13}$$

Описанный метод определения переменных состояния системы приводит к уравнениям состояния в нормальной форме в соответствии с уравнением (4.7.21).

Разложение на элементарные дроби. Кратные корни. В случае, если корни многочлена знаменателя $D(s)$ не являются различными, метод разложения на элементарные дроби приводит к недиагональной канонической форме Жордана. В качестве примера рассмотрим $D(s)$ вида

$$D(s) = d_n (s - \lambda_1)^k (s - \lambda_2)(s - \lambda_3) \ldots (s - \lambda_n).$$

Разложение на дроби $H(s) = N(s)/D(s)$ имеет вид

$$H(s) = d_0 + \frac{c_{11}}{(s-\lambda_1)^k} + \frac{c_{12}}{(s-\lambda)^{k-1}} + \ldots + \frac{c_{1k}}{(s-\lambda_1)} +$$

$$+ \frac{c_2}{s-\lambda_2} + \frac{c_3}{s-\lambda_3} + \ldots + \frac{c_n}{s-\lambda_n} =$$

$$= d_0 + \sum_{j=1}^{k} \frac{c_{1j}}{(s-\lambda_1)^{(k-j+1)}} + \sum_{i=2}^{n} \frac{c_i}{s-\lambda_i}, \tag{5.5.14}$$

где

$$d_0 = \lim_{s \to \infty} H(s),$$

$$c_{1j} = \frac{1}{(j-1)!} \frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}} \left[(s-\lambda_1)^k \frac{N(s)}{D(s)} \right]_{s=\lambda_1}$$

и

$$c_i = (s - \lambda_i) \frac{N(s)}{D(s)} \bigg|_{s=\lambda_i}.$$

Тогда выход $Y(s) = H(s) V(s)$ равен

$$Y(s) = d_0 V(s) + \sum_{j=1}^{k} c_{1j} X_j(s) + \sum_{i=2}^{n} c_i X_i(s), \tag{5.5.15}$$

где

$$X_j(s) = \frac{V(s)}{(s-\lambda_1)^{k-j+1}} \quad \text{и} \quad X_i(s) = \frac{V(s)}{s-\lambda_i}.$$

Однако $X_j(s)$ можно выразить через $X_{j+1}(s)$ посредством

$$X_j(s) = \frac{1}{(s-\lambda_1)} X_{j+1}(s) \qquad (j = 1, \ldots, k-1). \tag{5.5.16}$$

Схема моделирования системы, соответствующая уравнениям (5.5.15) и (5.5.16), изображена на рис. 5.5.7. Уравнения состояния системы

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_k \\ \dot{x}_{k+1} \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \ldots & & & & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & \ldots & & & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} v, \tag{5.5.17}$$

$$y = [c_{11} c_{12} \ldots c_{1k} c_2 \ldots c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

или

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{J}\mathbf{x} + \mathbf{b}v, \\ y &= \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle + d_0 v, \end{aligned} \tag{5.5.18}$$

где $\mathbf{J}$, b и $\mathbf{c}$ определяются из эквивалентности уравнений (5.5.17) и (5.5.18).

К методу разложения на дроби прибегают в системах с одним входом и выходом. В результате его использования получаем матрицу $\mathbf{A}$ диагональной или недиагональной формы Жордана. Эта форма особенно удобна при нахождении динамиче-

ского поведения данной системы. Однако подобный подход встречает определенные трудности. Большинство из них можно преодолеть на основе общего метода преобразования уравнений состояния в стандартной форме (если таковые имеются в нашем распоряжении) к *нормальному* виду.

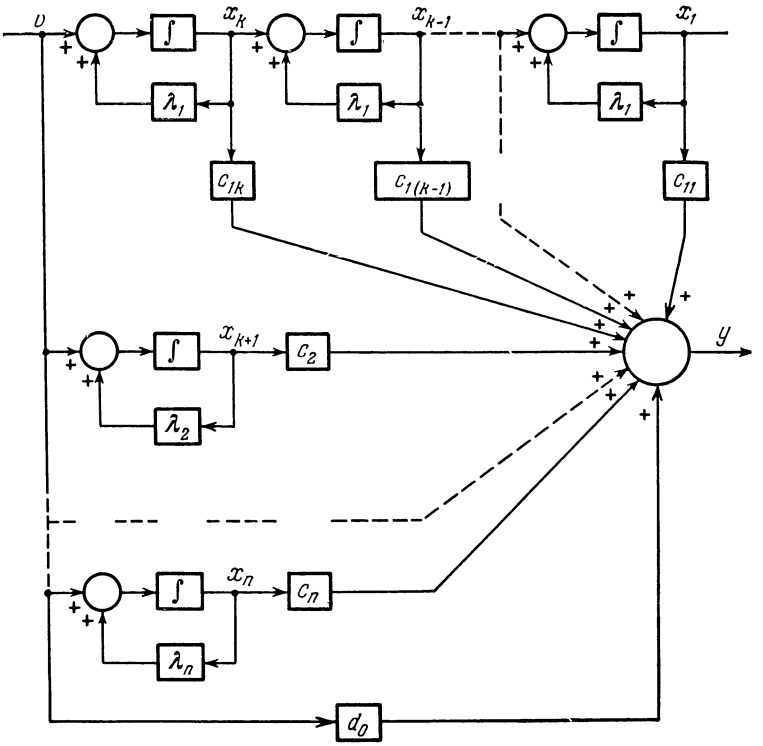


Рис. 5.5.7.

Нормальная форма. Метод разложения на элементарные дроби полезен для нахождения уравнений состояния в системе с одним входом и выходом. В этом случае **B** и **C** являются векторами, а **D**, **v** и **y** — скалярами. Применительно к многосвязным системам метод разложения на элементарные дроби становится громоздким. Поэтому желательно иметь возможность преобразовывать уравнения состояния в стандартной форме к виду, где матрица **A** — диагональная матрица, либо, что является более общим, матрица Жордана. Подобное преобразование можно осуществить посредством преобразования подобия.

Рассмотрим систему с постоянными параметрами, определяемую уравнениями состояния в стандартной форме

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{v}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{v}. \end{aligned} \tag{5.5.19}$$

Предполагается, что характеристические числа $\mathbf{A}$ различные. При введении линейного преобразования $\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{q}$, где $\mathbf{M}$ — модальная матрица, уравнение (5.5.19) записывается в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{q} + \mathbf{B}\mathbf{v}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{M}\mathbf{q} + \mathbf{D}\mathbf{v}. \end{aligned} \tag{5.5.20}$$

Умножение первого из выражений слева на $\mathbf{M}^{-1}$ дает

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{q} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{v}.$$

Так как $\mathbf{M}$ является модальной матрицей, то преобразование подобия $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}$ приводит к диагональной жордановой матрице $\mathbf{\Lambda}$. Главными диагональными элементами $\mathbf{\Lambda}$ служат характеристические числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{\Lambda}\mathbf{q} + \mathbf{B}_n\mathbf{v}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_n\mathbf{q} + \mathbf{D}_n\mathbf{v}, \end{aligned} \tag{5.5.21}$$

где $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}$, $\mathbf{B}_n = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}$, $\mathbf{C}_n = \mathbf{C}\mathbf{M}$ и $\mathbf{D}_n = \mathbf{D}$. Уравнение (5.5.21) известно как *нормальная форма* уравнений состояния. При этом дифференциальные уравнения развязаны относительно переменных состояния $q_1, q_2, \ldots, q_n$, т. е. они имеют вид $\dot{q}_i = \lambda_i q_i + f_i$, где f_i — вынуждающая функция, воздействующая на i-ю переменную состояния. Указанная процедура применима, если известна *стандартная форма* уравнений состояния. По своему содержанию она представляет собой более общий подход, чем метод разложения передаточной функции на простые дроби. В последующих параграфах показано также, что подход, основанный на передаточных функциях, может привести к серьезным недоразумениям в оценке свойств системы.

В случае кратных характеристических чисел $\mathbf{\Lambda}$ заменяется недиагональной жордановой матрицей. Следует, однако, заметить, что наличие кратных корней у характеристического уравнения $|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$ не является необходимым условием получения недиагональной жордановой матрицы в нормальной форме.

В § 4.8 показано, например, что если дефект характеристической матрицы равен порядку корня, то можно получить такие характеристические векторы, что модальная будет неособенной. Тогда матрица $\mathbf{A}$ преобразуется в диагональную матрицу при помощи преобразования подобия $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}$.

Пример 5.5.5. Написать уравнения состояния в нормальной форме для динамической системы на рис. 5.5.8, *а*.

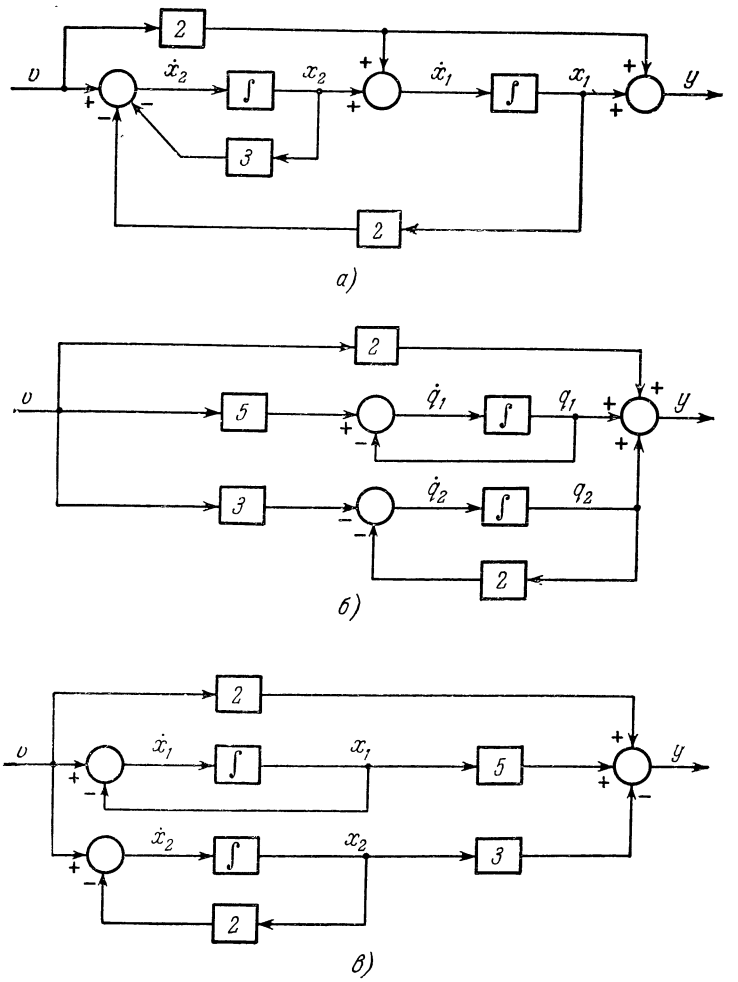


Рис. 5.5.8.

Стандратная форма уравнений состояния согласно указанным на рис. 5.5.8, *а* переменным состояния имеет вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} v,$$

$$\mathbf{y} = [1 \quad 0]\, \mathbf{x} + 2v.$$

Модальные матрицы $\mathbf{M}$ и $\mathbf{M}^{-1}$, соответствующие матрице $\mathbf{A}$, равны

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{M}^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}.$$

Нормальная форма уравнений состояния имеет вид

$$\dot{\mathbf{q}}=\Lambda\mathbf{q}+\mathbf{b}_n v,$$
$$y=\langle \mathbf{c}_n, \mathbf{q}\rangle + d_0 v,$$

где

$$\Lambda=\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix},\ \mathbf{B}_n=\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}=\begin{bmatrix}5\\ -3\end{bmatrix}=\mathbf{b}_n,\ \mathbf{C}_n=\mathbf{C}\mathbf{M}=[1 \quad 1]=\mathbf{c}_n^T,$$

$D_n=d_0=2$, $q=M^{-1}x$ или $q_1=2x_1+x_2$, $q_2=-x_1-x_2$. Блок-схема этих уравнений показана на рис. 5.5.8, *б*.

Передаточная функция системы с одним входом и выходом

$$H(s)=\frac{2s^2+8s+11}{s^2+3s+2}=\frac{2s^2+8s+11}{(s+1)(s+2)}.$$

Разложение $H(s)$ на элементарные дроби приводит к

$$d_0=\lim_{s\to\infty} H(s)=2,$$
$$c_1=H(s)(s+1)\big|_{s=-1}=5,$$
$$c_2=H(s)(s+2)\big|_{s=-2}=-3,$$

откуда

$$H(s)=2+\frac{5}{s+1}-\frac{3}{s+2}.$$

Уравнения состояния этой системы равны

$$\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}v,$$
$$y=[5 \quad -3]\,\mathbf{x}+2v.$$

Приведенной форме соответствует рис. 5.5.8, *в*.

Заметим, что b_i и c_i при использовании метода разложения на элементарные дроби совпадают соответственно с c_i и b_i в уравнениях нормальной формы. Перемена местами коэффициентов усиления входа и выхода не нарушает справедливости указанных методов. Существенно, что общий коэффициент усиления равен $b_i c_i$. Конечно, в методе разложения на элементарные дроби можно таким образом определить x_i, что оба метода станут тождественными. Однако в случае кратных полюсов передаточной функции получить жорданову матрицу методом разложения уже нельзя. Этот факт иллюстрируется в задаче 5.13.

Пример 5.5.6. Написать уравнения состояния в нормальной форме для системы на рис. 5.2.13.

Из указанных на рис. 5.2.13 переменных состояния x_3 уже соответствует нормальной форме. Поэтому следует рассматривать лишь x_1 и x_2. Тогда

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix},$$

$$y_2 = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

или

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0], \quad \mathbf{D} = [0].$$

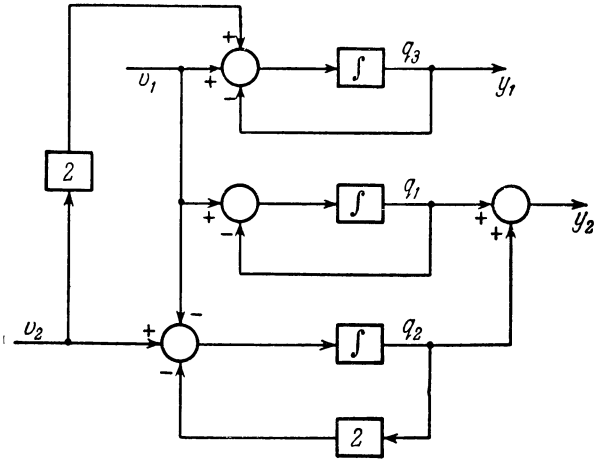


Рис. 5.5.9.

Из примера 5.5.5 мы видим, что

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{B}_n = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_n = \mathbf{C}\mathbf{M} = [1 \quad 1].$$

Схема, соответствующая этим уравнениям, показана на рис. 5.5.9.

§ 5.6. Частотная интерпретация. Геометрический смысл [2]

В данном параграфе дается геометрическая интерпретация применительно к линейным стационарным системам. Основное достоинство излагаемого подхода в его идейной простоте — в том, что он наделяет инженера «чувством» интуиции в оценке характера решения уравнений линейных систем. Важность подобного свойства не должна остаться незамеченной.

Вначале рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = f(t).$$

Согласно преобразованию Лапласа имеем

$$Y(s) = \frac{F(s)}{(s+1)(s+2)} + \frac{sy(0) + \dot{y}(0) + 3y(0)}{(s+1)(s+2)},$$

откуда

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{F(s)}{(s+1)(s+2)}\right] + [2y(0) + \dot{y}(0)]\, e^{-t} - [y(0) + \dot{y}(0)]\, e^{-2t}.$$

Назовем составляющие реакции системы, содержащие e^{-t} и e^{-2t}, «частотами» системы. Тогда, в зависимости от начальных условий и нулей $F(s)$, указанные частоты могут присутствовать или отсутствовать в решении $y(t)$. Если, например, начальные условия такие, что $2y(0) + \dot{y}(0) = 0$, то соответствующая начальным условиям реакция системы не содержит частоты e^{-t}. Если, кроме того, $F(s)$ имеет нуль в $s = -1$, то и общее решение $y(t)$ не содержит частоты e^{-t}. Частота e^{-t} полностью подавляется. Таким образом, если начальные условия таковы, что нуль преобразования свободной составляющей реакции системы, а также нуль преобразования вынуждающей функции совпадают с полюсом ее передаточной функции, то соответствующая этому полюсу частота не содержится в реакции системы. Описанное сокращение нулей и полюсов, несмотря на всю его очевидность, приводит к ряду общих понятий, требующих своего рассмотрения.

Линейные однородные системы с постоянными параметрами. Положим для простоты, что система имеет различные характеристические корни (собственные значения) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Каждому характеристическому корню λ_i соответствует характеристический (собственный) вектор $\mathbf{u}_i$. Пусть характеристические векторы нормированы, так что $|\mathbf{u}_i^2| = 1$ (это эквивалентно равенству единице длины каждого из характеристических векторов). Для линейной системы

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{5.6.1}$$

характеристические векторы $\mathbf{u}_i$ определяются посредством

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i, \quad \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle = 1 \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{5.6.2}$$

Так как характеристические корни системы различные, то характеристические векторы будут линейно независимыми. Поэтому $\mathbf{x}(t)$ выражается единственным образом в виде линейной комбинации характеристических векторов

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t)\, \mathbf{u}_i. \tag{5.6.3}$$

Общий вид $\alpha_i(t)$:

$$\alpha_i(t) = c_i e^{\lambda_i t}, \tag{5.6.4}$$

где c_i — постоянные величины. Поэтому

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t} \mathbf{u}_i. \tag{5.6.5}$$

При $t=0$ уравнение (5.6.5) сводится к

$$\mathbf{x}(0) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{u}_i. \tag{5.6.6}$$

Постоянные c_i можно найти, определяя базис $\mathbf{r}_i$ посредством соотношений

$$\langle \mathbf{r}_i, \mathbf{u}_j \rangle = \delta_{ij} \qquad (i, j = 1, \ldots, n).$$

Постоянные c_i находятся в результате скалярного умножения обеих частей уравнения (5.6.6) на $\mathbf{r}_i$

$$c_i = \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{x}(0) \rangle. \tag{5.6.7}$$

Таким образом, реакция линейной стационарной системы, обусловленная начальными условиями, записывается в виде

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{x}(0) \rangle e^{\lambda_i t} \mathbf{u}_i. \tag{5.6.8}$$

Скалярное произведение $\langle \mathbf{r}_i, \mathbf{x}(0) \rangle$ соответствует «величине возбуждения» i-й частоты системы, обусловленной начальными условиями. Если расположение вектора начальных условий совпадает с расположением i-го характеристического вектора, то возбуждается только i-я частота. Скалярное произведение $\langle \mathbf{r}_j, \mathbf{x}(0) \rangle$ при $i \neq j$ тождественно равно нулю. Следовательно, реакция линейной стационарной системы с различными характеристическими числами, обусловленная начальными условиями, выражается в виде взвешенной суммы частот $e^{\lambda_i t}\mathbf{u}_i$, где λ_i — характеристические корни матрицы $\mathbf{A}$.

Пример 5.6.1. В качестве иллюстрации применения метода разложения на частоты исследуем систему, рассмотренную в начале данного параграфа.

Для этой системы при $x = x_1$, $\dot{x}_1 = x_2$ имеем

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}; \qquad \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2.$$

Характеристические векторы и двойственный базис равны

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

и

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} -\sqrt{5} \\ -\sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, решение, обусловленное начальными условиями, дается в виде

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{2} \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{x}(0) \rangle e^{\lambda_i t} \mathbf{u}_i =$$

$$= [2\sqrt{2}\, x(0) + \sqrt{2}\, \dot{x}(0)]\, e^{-t}\mathbf{u}_1 - [\sqrt{5}\, x(0) + \sqrt{5}\, \dot{x}(0)]\, e^{-2t}\mathbf{u}_2.$$

Заметим, что если вектор начальных условий совпадает по направлению с одним из характеристических векторов, то все составляющие скалярного произведения $\langle \mathbf{r}_i, \mathbf{x}(0) \rangle$, за исключением составляющей, соответствующей этому характеристическому вектору, равны нулю. Например, при начальных условиях $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = -1$ вектор начальных условий совпадает по направлению с $\mathbf{u}_1$ и возбуждается лишь частота e^{-t}.

Линейные неоднородные системы с постоянными параметрами. Ранее рассматривались только однородные уравнения. Описанный подход можно применять и в случае, когда на систему действует вынуждающая функция, если она предварительно разложена по векторам $\mathbf{u}_i$:

$$\mathbf{B}\mathbf{v} = \mathbf{f}(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\, \mathbf{u}_i, \tag{5.6.9}$$

где $f_i(t) = \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{f}(t) \rangle = \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{B}\mathbf{v}(t) \rangle$. Использование интеграла свертывания позволяет получить общее выражение для $\mathbf{x}(t)$ вида (характеристические числа предполагаются различными)

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{x}(0) \rangle e^{\lambda_i t} \mathbf{u}_i + \int_0^t \sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{B}\mathbf{v}(\tau) \rangle e^{\lambda_i (t-\tau)} \mathbf{u}_i\, d\tau. \tag{5.6.10}$$

Важность уравнения (5.6.10) состоит в том, что действие вынуждающей функции на каждой частоте рассматривается в нем *независимо*. Величина составляющей i-й частоты, вызываемая вынуждающей функцией, представляется в виде

$$\int_0^t \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{B}\mathbf{v}(\tau) \rangle e^{\lambda_i (t-\tau)} \mathbf{u}_i\, d\tau.$$

Если вынуждающая функция выбирается таким образом, чтобы она совпадала с направлением одного из характеристи-

ческих векторов, то она возбуждает только одну частоту. Подобный случай встречается в симметрических электрических цепях. В таких цепях частоты делятся на симметрические и антисимметрические, так что «симметрическая» вынуждающая функция возбуждает только симметрические частоты [3].

Комплексные характеристические корни. Если матрица коэффициентов обладает комплексным характеристическим корнем λ_1, то $\lambda_2 = \lambda_1^*$ также является комплексным характеристическим корнем. Характеристические векторы $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ также являются комплексно сопряженными, так что $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1^*$. Тогда существуют следующие соотношения между характеристическими векторами и векторами двойственного базиса:

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = \alpha_1 + j\beta_1, && \lambda_2 = \alpha_1 - j\beta_1, \\ &\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1' + j\mathbf{u}_1'', && \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1' - j\mathbf{u}_1', \\ &2\mathbf{r} = \mathbf{r}_1' + j\mathbf{r}_1'', && 2\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1' - j\mathbf{r}_1'', \end{aligned} \tag{5.6.11}$$

$$\begin{aligned} &\langle \mathbf{r}_1', \mathbf{u}_1' \rangle = 1, && \langle \mathbf{r}_1'', \mathbf{u}_1' \rangle = 0, \\ &\langle \mathbf{r}_1', \mathbf{u}_1'' \rangle = 0, && \langle \mathbf{r}_1'', \mathbf{u}_1'' \rangle = 1. \end{aligned} \tag{5.6.12}$$

Условия нормировки задаются в виде

$$\langle \mathbf{u}_1', \mathbf{u}_1' \rangle + \langle \mathbf{u}_1'', \mathbf{u}_1'' \rangle = 1. \tag{5.6.13}$$

На основе этих выражений получим решение неоднородной системы с k парами комплексных характеристических корней в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{k} e^{\alpha_i t} \{ &[\langle \mathbf{r}_i', \mathbf{x}(0) \rangle \cos \beta_i t + \langle \mathbf{r}_i'', \mathbf{x}(0) \rangle \sin \beta_i t] \mathbf{u}_i' + \\ &+ [\langle \mathbf{r}_i'', \mathbf{x}(0) \rangle \cos \beta_i t - \langle \mathbf{r}_i', \mathbf{x}(0) \rangle \sin \beta_i t] \mathbf{u}_i'' \}. \end{aligned} \tag{5.6.14}$$

Амплитуда и фаза каждой частоты колебаний зависит от начальных условий. При начальных условиях, равных $\mathbf{u}_1'$, согласно уравнениям (5.6.12) и (5.6.14) решение равно

$$\mathbf{x}(t) = e^{\alpha_1 t} [(\cos \beta_1 t) \mathbf{u}_1' - (\sin \beta_1 t) \mathbf{u}_1''] \quad \text{(частота 1)}. \tag{5.6.15}$$

При начальных условиях, равных $\mathbf{u}_1''$, подобное решение равно

$$\mathbf{x}(t) = e^{\alpha_1 t} [(\sin \beta_1 t) \mathbf{u}_1' + (\cos \beta_1 t) \mathbf{u}_1''] \quad \text{(частота 2)}. \tag{5.6.16}$$

Заметим, что при комплексных характеристических корнях движение в фазовом пространстве в плоскости $\mathbf{u}_1'$, $\mathbf{u}_1''$ имеет вид экспоненциальной спирали.

Пример 5.6.2 Предположим, что матрица **A** исследуемой системы имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Определить частоты системы, обусловленные начальными условиями.

Характеристические корни матрицы равны

$$\lambda_1 = -1 + j,$$
$$\lambda_2 = -1 - j.$$

Характеристические векторы находятся последовательной подстановкой λ_i в $\mathrm{Adj}[\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}]$. Учитывая, что

$$\mathrm{Adj}\,[\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}] = \begin{bmatrix} \lambda + 2 & 1 \\ -2 & \lambda \end{bmatrix},$$

нормированная система векторов задается в виде

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 + j \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 - j \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что $\mathbf{u}_2 = \overset{*}{\mathbf{u}}_1$.

Двойственный базис находится из уравнения (5.6.12):

$$\mathbf{r}_1' = \sqrt{6} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_1'' = \sqrt{6} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

В результате общее решение будет таким:

$$\mathbf{x}(t) = e^{-t} \left\{ \left[\langle \mathbf{r}_1', \mathbf{x}(0) \rangle \cos t + \langle \mathbf{r}_1'', \mathbf{x}(0) \rangle \sin t \right] \mathbf{u}_1' + \right.$$
$$\left. + \left[\langle \mathbf{r}_1'', \mathbf{x}(0) \rangle \cos t - \langle \mathbf{r}_1', \mathbf{x}(0) \rangle \sin t \right] \mathbf{u}_1'' \right\}.$$

Если начальные условия выбираются таким образом, что $\mathbf{x}(0) = \mathbf{u}_1'$, то возбуждается лишь частота

$$\mathbf{x}(t) = e^{-t} \left[(\cos t)\, \mathbf{u}_1' - (\sin t)\, \mathbf{u}_1'' \right] \quad \text{(частота 1)}.$$

Если начальные условия выбираются таким образом, что $\mathbf{x}(0) = \mathbf{u}_1''$, то возбуждается частота

$$\mathbf{x}(t) = e^{-t} \left[(\sin t)\, \mathbf{u}_1' + (\cos t)\, \mathbf{u}_1'' \right] \quad \text{(частота 2)}.$$

Эти частоты отличаются фазой и амплитудой затухающих колебаний.

Разложение на частоты служит геометрической трактовкой диагональной формы матрицы **A**. Подобное представление показывает, что в случае различных характеристических корней частоты системы не связаны между собой и возбуждаются независимо начальными условиями и вынуждающей функцией. Величина возбуждения измеряется скалярным произведением

двойственного базиса и заданных векторов (начальных условий или вынуждающей функции). В системах, не имеющих разные характеристические корни, частоты не обязательно являются несвязанными. Диагонализация матрицы **A** в этом случае позволяет получить лишь каноническую форму Жордана.

§ 5.7. Управляемость и наблюдаемость

Возросший интерес к линейным многосвязным системам управления привел к полному пересмотру «интуитивных» представлений, порожденных ранними исследованиями систем с одним входом и выходом. Это связано со значительными трудностями в проектировании, возникающими при переходе от систем с одной регулируемой величиной к многосвязным. Большинство этих прежних идей переносится на многосвязные задачи путем использования методов теории матриц; однако существуют и некоторые важные средства анализа и синтеза, оперировать с которыми следует с определенной осторожностью. Широкое использование методов преобразований и передаточных функций объясняется тем, что они позволяют инженеру оперировать с алгебраическими соотношениями, а не с дифференциальными уравнениями. При объединении отдельных подсистем с одной регулируемой величиной в многосвязную систему следует с осторожностью оперировать с их передаточными функциями, чтобы не исключить ряд степеней свободы при образовании матрицы многосвязной системы *).

В данном параграфе затрагиваются некоторые проблемы, связанные с многосвязными системами. Более полное рассмотрение этих вопросов читатель может найти в литературе [4—9].

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{v}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{v}. \end{aligned} \tag{5.7.1}$$

Предполагается, что эта система имеет n переменных состояния, m входов и p выходов, а также, что ее характеристические числа разные. Согласно методу § 5.6 разложения на составляющие частоты решение уравнения (5.7.1) дается в виде (см. уравнение (5.6.10))

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^{n} \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{x}(0) \rangle e^{\lambda_i t} \mathbf{u}_i + \int_0^t \sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{B}\mathbf{v}(\tau) \rangle e^{\lambda_i (t-\tau)} \mathbf{u}_i \, d\tau. \tag{5.7.2}$$

*) Вообще говоря, это возможно и в случае одной регулируемой величины. *(Прим. перев.)*

Если вынуждающую функцию представить в виде суммы

$$\mathbf{Bv} = \mathbf{b}_1 v_1 + \mathbf{b}_2 v_2 + \mathbf{b}_3 v_3 + \ldots + \mathbf{b}_m v_m, \tag{5.7.3}$$

где

$$\mathbf{b}_i = \begin{bmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{ni} \end{bmatrix},$$

то составляющая $\mathbf{x}(t)$, вызываемая вынуждающей функцией, может быть выражена

$$\int_0^t \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{b}_j \rangle v_j(\tau) e^{\lambda_i (t-\tau)} \mathbf{u}_i \, d\tau.$$

Если для некоторой частоты скалярное произведение $\langle \mathbf{r}_i, \mathbf{b}_j \rangle$ равно нулю для всех j, то выход системы инвариантен к этой частоте и, вне зависимости от характера вынуждающей функции, входной сигнал не может возбуждать указанную частоту или управлять ею. Очевидно, что критерий *полной управляемости* линейной стационарной системы заключается в отличии от нуля скалярного произведения $\langle \mathbf{r}_i, \mathbf{b}_j \rangle$ для всех j *).

Ненаблюдаемая система содержит частоты, которые невозможно установить путем измерения ее выходных величин [8]. Рассматривая лишь частоты, возбуждаемые начальными условиями, и предполагая различными λ_i матрицы $\mathbf{A}$, получим для выхода $\mathbf{y}$ из уравнений (5.7.1) и (5.7.2)

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{x}(0) \rangle e^{\lambda_i t} \mathbf{u}_i. \tag{5.7.4}$$

Условие отсутствия i-й частоты во всех выходных сигналах выражается в виде

$$\langle \mathbf{c}_j, \mathbf{u}_i \rangle = 0 \text{ для всех } j, \tag{5.7.5}$$

где $\mathbf{c}_j$ — вектор-столбец, состоящий из элементов j-й строки $\mathbf{C}$.

*) Это необходимые и достаточные условия для случая различных корней λ матрицы $\mathbf{A}$. Если $\mathbf{A}$ имеет кратные λ, но приводится к диагональному виду, то приведенное условие является необходимым, но недостаточным. В этом случае, а также если $\mathbf{A}$ приводится к более общей форме Жордана, следует рассматривать более фундаментальное требование управляемости, а именно: должен существовать входной сигнал $v(t)$ $(0 \leqslant t < T < \infty)$, переводящий $\mathbf{x}(0)$ в $\mathbf{x}(T) = 0$. Это приводит к необходимому и достаточному условию: векторы-столбцы матрицы $[\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \ldots, \mathbf{A}^{(n-1)}\mathbf{B}]$ должны образовывать пространство состояний данной системы. [В нашей литературе подобное условие формулируется как равенство нулю дефекта приведенной в *) матрицы. (*Прим. перев.*)]

Это условие распространяется и на случай действия вынуждающей функции *).

Если уравнения системы имеют различные λ_i и записаны в *нормальной форме*

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= \Lambda\mathbf{q} + \mathbf{B}_n\mathbf{v}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_n\mathbf{q} + \mathbf{D}_n\mathbf{v}, \end{aligned} \tag{5.7.6}$$

то каждая из переменных состояния q_i характеризует различные частоты системы. Для этой формы условия управляемости и наблюдаемости очевидны. Управляемость является функцией связи между входами и различными частотами системы. Отдельная частота (или переменная состояния) системы неуправляема, если вход не оказывает воздействия на эту частоту. Это соответствует наличию нулевой *строки* в матрице $\mathbf{B}_n$.

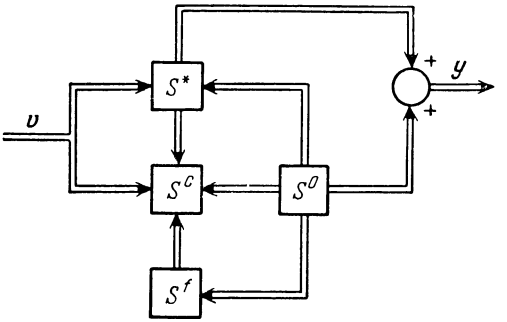


Рис. 5.7.1.

С другой стороны, отдельная частота ненаблюдаема *ни в одном* из выходов системы, если не существует связи между этой частотой и произвольным выходом системы. Это соответствует наличию нулевого *столбца* в матрице $\mathbf{C}_n$. Таким образом, если при различных λ_i система уравнений записывается в нормальной форме, то условия полной управляемости и наблюдаемости сводятся к следующему.

Управляемость: отсутствие *нулевой* строки в $\mathbf{B}_n$.
Наблюдаемость: отсутствие *нулевого* столбца в $\mathbf{C}_n$.

Вообще говоря, всегда можно выделить четыре подсистемы, проявляющие определяемые приведенными понятиями свойства. Это показано на рис. 5.7.1. Подсистемы обладают следующими свойствами.

---

*) В случае кратных корней λ_i матрицы $\mathbf{A}$ основное требование наблюдаемости состоит в том, что для некоторого $T > 0$ знания $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$ и $\mathbf{y}(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$ достаточно для определения всех начальных состояний $\mathbf{x}(0)$. Это приводит к необходимому и достаточному условию наблюдаемости: столбцы $\left[\mathbf{C}^{*T}, \mathbf{A}^{*T}\mathbf{C}^{*T}, \ldots, (\mathbf{A}^{*T})^{(n-1)}\mathbf{C}^{*T}\right]$ должны образовывать пространство состояний данной системы. [Подобное условие формулируется обычно как равенство нулю дефекта матрицы $\mathbf{A}$. (*Прим. перев.*)]

Система S^*: полностью управляемая и полностью наблюдаемая.

Система S^c: полностью управляемая и ненаблюдаемая.
Система S^o: неуправляемая, но полностью наблюдаемая.
Система S^f: неуправляемая и ненаблюдаемая.

Требование управляемости и наблюдаемости всей системы состоит в том, чтобы система содержала только подсистему S^*. Следует указать, что неучет S^c, S^o и S^f может привести проектировщика системы к выводу о работоспособности S^*, в то время как вся система в целом неустойчива. Если, например, подсистема S^o содержит неустойчивые частоты, то возбуждение этих частот при ненулевых начальных условиях приводит к неустойчивости выхода. Подобным образом, даже несмотря на то, что подсистема S^c ненаблюдаемая, приложенная к подсистеме S^* надлежащая вынуждающая функция может привести к чрезмерному росту переменных состояния S^c — потере работоспособности системы. Указанное справедливо и для подсистемы S^f.

Системы, состоящие из отдельных подсистем. Если система включает в себя отдельные или все составляющие S^*, S^c, S^o или S^f, то в зависимости от связей между подсистемами вся система в целом может обладать или не обладать свойствами этих подсистем.

Пример 5.7.1.

Система 1: $\dot{x}_1 = -x_1 + v_1$, $y_1 = x_1 + v_1$. Система 2: $\dot{x}_2 = -2x_2 + v_2$.

Теперь пусть выход системы 1 связан со входом системы 2 и пусть выход системы взят в виде $y = x_2 - y_1$ (рис. 5.7.2). Определить, является ли вся система управляемой и наблюдаемой.

Уравнение состояния всей системы в целом имеет вид

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} v_1,$$

$$y = [-1 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - v_1.$$

На основе метода разложения на частоты имем $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$ и

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Для этой системы

$$\langle \mathbf{r}_1, \mathbf{b} \rangle = \sqrt{2}, \quad \langle \mathbf{r}_2, \mathbf{b} \rangle = 0,$$
$$\langle \mathbf{c}, \mathbf{u}_1 \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{c}, \mathbf{u}_2 \rangle = -1.$$

Таким образом, частота $e^{-2t}\mathbf{u}_2$ неуправляемая, а частота $e^{-t}\mathbf{u}_1$ ненаблюдаемая. Поэтому, несмотря на то, что обе отдельные подсистемы являются управляемыми и наблюдаемыми, вся система в целом неуправляемая и ненаблюдаемая.

Интересный случай возникает при использовании передаточных функций. Передаточная функция первой системы равна $(s+2)/(s+1)$. Передаточная

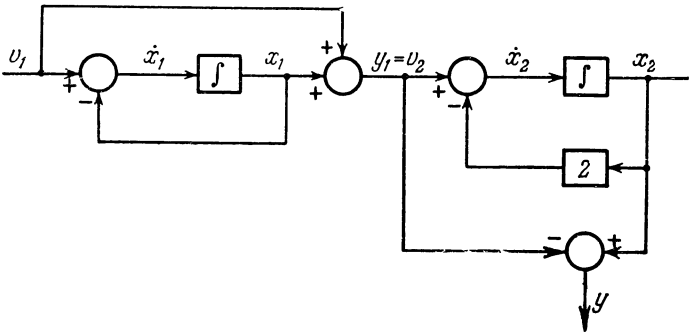


Рис. 5.7.2.

функция второй системы равна $1/(s+2)$. Следовательно, общая передаточная функция от v_1 до x_2 есть

$$\frac{X_2(s)}{V_2(s)}=\frac{1}{s+1}.$$

Тогда передаточная функция всей системы равна

$$\frac{Y(s)}{V_1(s)}=-\frac{s+2}{s+1}+\frac{1}{s+1}=-1.$$

Это подтверждает предыдущее исследование того, что частота $e^{-2t}\mathbf{u}_2$ неуправляема, а частота $e^{-t}\mathbf{u}_1$ ненаблюдаема. Проведенный при помощи передаточных функций анализ показывает, что использование передаточной функции всей системы может не позволить обнаружить некоторые частоты подсистем.

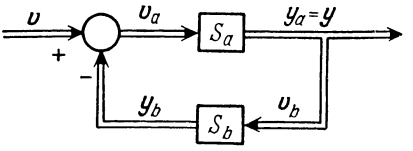


Рис. 5.7.3.

Наиболее важные аспекты управляемости и наблюдаемости линейных систем с обратной связью сформулированы в теореме Гильберта [8]

Теорема 5.7.1. Пусть линейные подсистемы S_a и S_b образуют систему с обратной связью согласно рис. 5.7.3. Последовательное соединение S_aS_b обозначим через S_c, а последовательное соединение S_bS_a обозначим через S_0.

(a) Порядок системы n равен сумме порядков S_a и S_b, т. е. $n=n_a+n_b$.

(b) Необходимым и достаточным условием управляемости (наблюдаемости) системы с обратной связью является управляемость (наблюдаемость) $S_c(S_0)$.

(c) Необходимым, но недостаточным условием управляемости (наблюдаемости) системы с обратной связью является управляемость (наблюдаемость) и S_a и S_b.

(d) Если и S_a и S_b управляемы (наблюдаемы), то любые из неуправляемых (ненаблюдаемых) координат системы с обратной связью являются неуправляемыми (ненаблюдаемыми) координатами $S_c(S_0)$ и порождаются S_b.

Важность данной теоремы состоит в том, что управляемость и наблюдаемость может устанавливаться на основе исследования отдельных разомкнутых подсистем S_a и S_b. Это большая помощь при анализе систем.

Передаточные функции. Передаточные функции или матричные передаточные функции в случае многосвязных систем, получили широкое распространение в инженерной практике по двум причинам. Одна из них состоит в том, что передаточные функции позволяют оперировать с алгебраическими, а не дифференциальными уравнениями, вторая — в меньшей размерности передаточной матричной функции. Например, если у системы n переменных состояния, $m \leqslant n$ входов и $p \leqslant n$ выходов, то размерность матрицы $\mathbf{A}$ равна $(n \times n)$, в то время как размерность матрицы $\mathbf{H}(s)$ — $(m \times p) \leqslant (n \times n)$. При операциях с подобными матрицами встречаются, однако, два распространенных вида ошибок. Первая ошибка связана с непониманием того, что передаточная функция сложной системы может «скрывать» частоты подсистем. Это иллюстрировалось на примере 5.7.1, где полюс $s=-2$ системы 2 сокращался с нулем системы 1. Вторая ошибка состоит в том, что и в случае, когда элементы передаточной матричной функции выявляют все частоты подсистем, может оказаться невозможным определить частоты всей системы в целом. *Передаточная матричная функция представляет лишь управляемую и наблюдаемую часть системы, а именно* S**). Система может состоять из подсистем, каждая из которых в отдельности управляемая и наблюдаемая, в то время как вся система в целом может быть неуправляемой и ненаблюдаемой (это иллюстрировалось на примере 5.7.1). Поэтому можно произвести неправильную оценку порядка системы и в результате прийти к неправильному выводу о ее устойчивости.

---

*) Это может оказаться несправедливым, если $\mathbf{A}$ имеет кратные характеристические числа Рассмотрите, например, такой случай, когда $\mathbf{A}$ приводится к диагональному виду.

Пример 5.7.2. Определить передаточную матричную функцию и порядок системы, описываемой

$$\dot{y}_1 + ay_1 = v_1 + v_2,$$
$$\ddot{y}_2 + (a+b)\dot{y}_2 + aby_2 = \dot{v}_1 + av_1 + v_2, \qquad a \neq b.$$

Преобразуя эти уравнения при нулевых начальных условиях, получим

$$Y_1(s) = \frac{V_1(s)}{s+a} + \frac{V_2(s)}{s+a},$$
$$Y_2(s) = \frac{V_1(s)}{s+a} + \frac{V_2(s)}{(s+a)(s+b)}.$$

Передаточная матричная функция равна

$$\mathbf{H}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+a} & \frac{1}{s+a} \\ \frac{1}{s+b} & \frac{1}{(s+a)(s+b)} \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{b-a} \end{bmatrix}}{s+a} + \frac{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{a-b} \end{bmatrix}}{s+b}.$$

Непосредственный, но ошибочный вывод состоит в том, что матрица характеризует систему второго порядка. Однако из моделирования системы

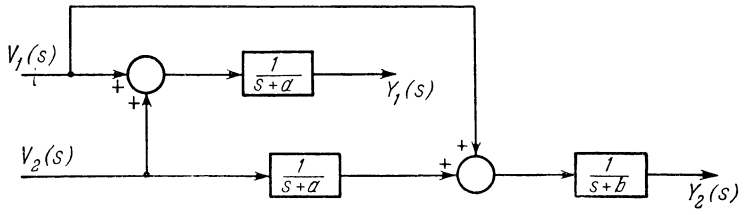


Рис. 5.7.4.

следует, что требуемое минимальное число интегралов равно трем. Это показано на рис. 5.7.4. Данный факт очевиден и из исходных дифференциальных уравнений.

В случае $\mathbf{H}(s)$ с простыми полюсами оценка порядка системы, минимального порядка дифференциального уравнения, соответствующего $\mathbf{H}(s)$, следует из теоремы Гильберта.

Теорема 5.7.2. Пусть $\mathbf{H}(s)$ разложена на элементарные дроби:

$$\mathbf{H}(s) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\mathbf{K}_i}{s-\lambda_i} + \mathbf{D}, \tag{5.7.7}$$

где

$$\mathbf{K}_i = \lim_{s\to\lambda_i} (s-\lambda_i)\,\mathbf{H}(s) \quad \text{и} \quad \mathbf{D} = \lim_{s\to\infty} \mathbf{H}(s),$$

Предполагается, что элементы $\mathbf{H}(s)$ имеют по крайней мере m простых полюсов, где $m<\infty$. Ранг i-го полюса r_i определяется рангом матрицы $\mathbf{K}_i$. Тогда система не может быть описана системой дифференциальных уравнений порядка, меньшего чем

$$n=\sum_{i=1}^{m} r_i.$$

В качестве примера использования этой теоремы рассмотрим пример 5.7.2. Пусть $\lambda_1=-a$ и $\lambda_2=-b$. Тогда $r_1=2$, $r_2=1$ и $n=r_1+r_2=3$. Минимальный порядок системы равен трем.

В заключение следует констатировать, что управляемость и наблюдаемость играют важную роль при анализе и синтезе многосвязных систем. При использовании методов преобразований существенное внимание следует уделять физической стороне задачи, чтобы математические операции не затушевывали «истинную природу» исследуемой системы.

§ 5.8. Линейные стационарные системы. Переходная матрица состояния

Однородное дифференциальное уравнение для линейной стационарной системы записывается в векторной форме

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{5.8.1}$$

где $\mathbf{A}$ — матрица с постоянными коэффициентами размерности $(n\times n)$, вектор $\mathbf{x}$ — матрица-столбец $(n\times 1)$, состоящая из n переменных состояния $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Подобно решению скалярных дифференциальных уравнений решение уравнения (5.8.1) представляется в виде

$$\mathbf{x}(t)=e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{x}(\tau), \tag{5.8.2}$$

где матрица $e^{\mathbf{A}t}$, определяемая уравнением (4.11.1), раскладывается в бесконечный ряд

$$e^{\mathbf{A}t}=\mathbf{I}+\mathbf{A}t+\frac{\mathbf{A}^2t^2}{2!}+\frac{\mathbf{A}^3t^3}{3!}+\ldots \tag{5.8.3}$$

Подставив уравнение (5.8.2) в (5.8.1), убеждаемся, что оно является искомым решением. Заметим, что при $t=\tau$ матрица $e^{\mathbf{A}(t-\tau)}$ равна единичной матрице $\mathbf{I}$. Следовательно, граничные условия удовлетворяются, т. е.

$$\mathbf{x}(\tau)=e^{\mathbf{A}0}\mathbf{x}(\tau)=\mathbf{I}\mathbf{x}(\tau)=\mathbf{x}(\tau).$$

Матрица $\boldsymbol{\varphi}(t)=e^{\mathbf{A}t}$ *называется переходной матрицей состояния* системы, описываемой уравнением (5.8.1). Математики предпо-

читают пользоваться термином *фундаментальная матрица* *). Название переходная матрица состояния в определенном смысле указывает на характер ее применения; ему обычно отдают предпочтение в инженерных кругах.

Переходная матрица состояния «описывает» движение конца вектора состояния в пространства состояний из некоторого начального положения, а потому описывает и изменение (переход) состояния системы. В связи с тем, что вектор $\mathbf{x}(t)$ описывает *все* функции времени $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$, он несет в себе большую информацию. Необходимо отметить, что объем вычислений при определении переходной матрицы состояния обычно больше, чем при разрешении линейного дифференциального уравнения относительно зависимой переменной. Однако имеющаяся дополнительная информация позволяет проектировщику системы управления использовать более совершенные методы проектирования.

Вычисление переходной матрицы состояния $\boldsymbol{\varphi}(t)$ может выполняться несколькими различными путями. Основные подходы базируются на теореме Сильвестра и методе Кэли — Гамильтона, рассмотренных в § 4.10, а также к ним принадлежат метод разложения в бесконечный ряд, метод частотной области и метод передаточной функции. Другие методы приводятся в примере 5.9.2 и задаче 5.26.

Метод разложения в бесконечный ряд. Из определения $e^{\mathbf{A}}$ (уравнение (5.8.3)) переходная матрица состояния $\boldsymbol{\varphi}(t)$ вычисляется на основе бесконечного ряда

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3t^3}{3!} + \ldots$$

Этот метод наиболее трудоемок, если $\mathbf{A}^k$ не «исчезают» при небольших k. После выполнения суммирования следует найти в замкнутом виде каждый элемент матрицы $\boldsymbol{\varphi}(t)$. Это непростая задача, а если порядок $\boldsymbol{\varphi}(t)$ недостаточно низкий или если исследователь недостаточно опытен, то задача может оказаться и непреодолимой. Встречающиеся трудности иллюстрируются на простом примере.

Пример 5.8.1. Найти переходную матрицу состояния для матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Степени $\mathbf{A}$ находятся последовательным умножением на $\mathbf{A}$, так что

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} 6 & 14 \\ 7 & -15 \end{bmatrix}.$$

*) Строгое исследование фундаментальных матриц и их роли в решении дифференциальных уравнений см. в [11] или [12].

Следовательно, согласно уравнению (5.8.3) $\varphi(t)$ задается в виде

$$\varphi(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & -3\end{bmatrix}t+\begin{bmatrix}-2 & 6\\ -3 & 7\end{bmatrix}\frac{t^2}{2!}+\begin{bmatrix}6 & 14\\ 7 & -15\end{bmatrix}\frac{t^3}{3!}+\ldots$$

Объединяя соответствующие члены, получим

$$\varphi(t)=\begin{bmatrix}1-\frac{2t^2}{2!}+\frac{6t^3}{3!}+\ldots & -2t+\frac{6t^2}{2!}+\frac{14t^3}{3!}+\ldots\\ t-\frac{3t^2}{2!}+\frac{7t^3}{3!}+\ldots & 1-3t+\frac{7t^2}{2!}-\frac{15t^3}{3!}+\ldots\end{bmatrix}.$$

Вычисляя бесконечные ряды для каждого из элементов (это основной недостаток данного метода), имеем

$$\varphi(t)=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{2t} & 2(e^{-2t}-e^{-t})\\ e^{-t}-e^{-2t} & 2e^{-2t}-e^{-t}\end{bmatrix}.$$

Метод частотной области *). Преобразование Лапласа обеих частей уравнения (5.8.1) приводит к $s\mathbf{X}(s)-\mathbf{x}(0)=\mathbf{AX}(s)$. Следовательно,

$$\mathbf{X}(s)=[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}\mathbf{x}(0). \tag{5.8.4}$$

Применив к обеим частям уравнения (5.8.4) обратное преобразование, получим

$$\mathbf{x}(t)=\mathscr{L}^{-1}\{[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}\}\mathbf{x}(0). \tag{5.8.5}$$

Сравнивая уравнения (5.8.5) и (5.8.2), приходим к выводу, что

$$\varphi(t)=e^{\mathbf{A}t}=\mathscr{L}^{-1}\{[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}\}. \tag{5.8.6}$$

Указанный метод оказывается наиболее удобным при решении многих задач. Очевидно, что трудность состоит в нахождении матрицы, обратной $[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]$.

Пример 5.8.2. Для той же матрицы $\mathbf{A}$, что и в предыдущем примере, вычислить $\varphi(t)$, используя метод частотной области.

Матрица, обратная

$$[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]=\begin{bmatrix}s & 2\\ -1 & s+3\end{bmatrix},$$

равна

$$\mathbf{\Phi}(s)=[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}=\frac{\begin{bmatrix}s+3 & -2\\ 1 & s\end{bmatrix}}{s^2+3s+2},$$

где $\mathbf{\Phi}(s)$ — преобразование Лапласа $\varphi(t)$. Вычислив обратное преобразование для каждого элемента $\mathbf{\Phi}(s)$, найдем выражение для $\varphi(t)$, совпадающее с полученным ранее в примере 5.8.1.

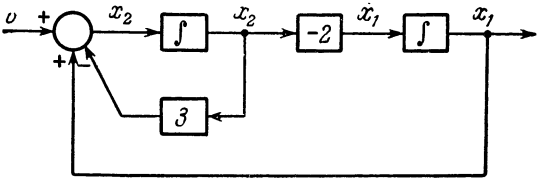
---

*) Имеется в виду комплексная частота, т. е плоскость комплексного переменного s. *(Прим. перев.)*

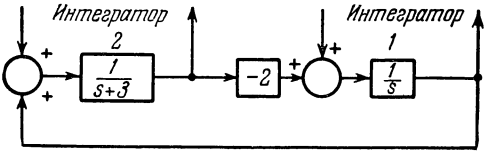
Метод передаточной функции. i-й член $x_i(t)$ уравнения (5.8.2) можно записать в виде суммы

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(t)\, x_j(0), \tag{5.8.7}$$

предполагая $\tau=0$. Элемент $\varphi_{ij}(t)$ можно определить, положив равным единице начальное условие, накладываемое на переменную состояния x_j, и считая начальные условия для остальных переменных состояния равными нулю. Тогда функция времени $x_i(t)$ равна $\varphi_{ij}(t)$. Применительно к схеме моделирования, рассмотренной в § 5.2, это эквивалентно подаче единичного начального условия на *выход* интегратора j и наблюдению за выходом интегратора i. Однако единичное начальное условие на *выходе* интегратора эквивалентно подаче единичного мгновенного импульса на вход этого интегратора. Следовательно, $\varphi_{ij}(t)$ представляет собой реакцию на выходе интегратора i при подаче мгновенного единичного импульса на вход интегратора j, в то время как начальные условия остальных интеграторов равны нулю. Поэтому $\Phi_{ij}(s)$ можно интерпретировать как передаточную функцию от входа сумматора на *входе* интегратора j к *выходу* интегратора i. Эти передаточные функции образуют



а)



б)

Рис. 5.8.1.

$\mathbf{\Phi}(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}$. Таким образом, переходная матрица состояния в частотной области, $\mathbf{\Phi}(s)$, непосредственно определяется из рассмотрения схемы моделирования.

Пример 5.8.3. На рис. 5.8.1, *а* показана схема моделирования системы с матрицей $\mathbf{A}$, такой же, как и в двух предыдущих примерах. Определить $\varphi(t)$.

Без потери общности систему можно представить в частотной области, как показано на рис. 5.8.1, *б*. Тогда элементарно находятся все передаточные функции,

$$\Phi_{11}(s) = \frac{1/s}{1 + \dfrac{2}{s(s+3)}} = \frac{s+3}{s^2+3s+2},$$

$$\Phi_{12}(s) = \frac{\dfrac{-2}{s(s+3)}}{1 + \dfrac{2}{s(s+3)}} = \frac{-2}{s^2+3s+2},$$

$$\Phi_{21}(s) = \frac{\dfrac{1}{s(s+3)}}{1 + \dfrac{2}{s(s+3)}} = \frac{1}{s^2+3s+2},$$

$$\Phi_{22}(s) = \frac{\dfrac{1}{s+3}}{1 + \dfrac{2}{s(s+3)}} = \frac{s}{s^2+3s+2}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{\Phi}(s) = \frac{\begin{bmatrix} s+3 & -2 \\ 1 & s \end{bmatrix}}{s^2+3s+2}.$$

Эта матрица совпадает с $\mathbf{\Phi}(s)$, полученной в примере 5.8.2 путем вычисления $[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}$. $\varphi(t)$ вычисляется элементарно как обратное преобразованию элементов $\mathbf{\Phi}(s)$.

Линейные стационарные системы. Общее решение. Уравнения состояния линейной стационарной системы задаются в общем виде согласно

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{v}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{v}. \end{aligned} \tag{5.8.8}$$

Эти уравнения можно трактовать следующим образом. $\mathbf{A}$ — основная матрица системы, так как ее структура определяет характер переходной матрицы состояния. От этой матрицы зависит характер как вынужденного, так и свободного решений. Ясно, что если все характеристические числа этой матрицы имеют отрицательные действительные части, то решение уравнения (5.8.1) стремится к нулю при стремлении t к бесконечности. Однако если одно из характеристических чисел имеет положительную действительную часть, то по крайней мере одна из переменных состояния становится неограниченной при стремлении t к бесконечности. Если характеристические числа, лежащие на мнимой оси (действительная часть равна нулю), простые, то матрица $\varphi(t)$ не стремится к нулевой матрице при стремлении t к бесконечности, однако она ограничена.

B — матрица связи; структура этой матрицы определяет характер связи входа системы с различными переменными состояния. **C** — также матрица связи — связи переменных состояния с выходом системы. Таким образом, первый член $\mathbf{y}(t)$ в уравнении (5.8.8) представляет связь переменных состояния с различными составляющими вектора выхода. **D** — снова матрица связи, непосредственно связывающая вектор входа системы с вектором выхода. Структура этой матрицы определяет, каким образом вынуждающие функции на входе воздействуют на различные выходы. Для большинства физических систем **D** является нулевой матрицей, так что член $\mathbf{Dv}$ обычно равен нулю.

Общее решение $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{y}(t)$ уравнения (5.8.8) можно получить различными методами. С целью иллюстрации используем здесь метод вариации параметров. Для получения общего решения в случае нестационарных систем ниже используется метод сопряженных систем.

Однородное дифференциальное уравнение $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{Ax}$ согласно (5.8.2) имеет решение $\mathbf{x}_H(t)=\boldsymbol{\varphi}(t-\tau)\mathbf{x}(t)$ для $t\geqslant\tau$. По аналогии с уравнением (2.6.17) предполагаемое частное решение имеет вид $\mathbf{x}_P(t)=\boldsymbol{\varphi}(t-\tau)\mathbf{U}(t)\mathbf{x}(\tau)$. Общее решение равно

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}_H(t)+\mathbf{x}_P(t)=\boldsymbol{\varphi}(t-\tau)\mathbf{x}(\tau)+\boldsymbol{\varphi}(t-\tau)\mathbf{U}(t)\mathbf{x}(\tau).$$

Более удобно записать его в виде

$$\mathbf{x}(t)=\boldsymbol{\varphi}(t-\tau)[\mathbf{I}+\mathbf{U}(t)]\mathbf{x}(\tau)=\boldsymbol{\varphi}(t-\tau)\mathbf{z}(t), \tag{5.8.9}$$

где τ — постоянная величина, а вектор $\mathbf{z}(t)$ следует определить.

Подстановка уравнения (5.8.9) в уравнение (5.8.8) дает

$$[\dot{\boldsymbol{\varphi}}(t-\tau)-\mathbf{A}\boldsymbol{\varphi}(t-\tau)]\mathbf{z}(t)+\boldsymbol{\varphi}(t-\tau)\dot{\mathbf{z}}(t)=\mathbf{Bv}(t).$$

Ввиду того, что $\boldsymbol{\varphi}(t-\tau)$ — матрица, столбцы которой являются решениями уравнения (5.8.1), первый член выражения — суть нулевая матрица. Отсюда

$$\dot{\mathbf{z}}(t)=\boldsymbol{\varphi}^{-1}(t-\tau)\mathbf{Bv}(t). \tag{5.8.10}$$

Интегрирование уравнения (5.8.10) от τ до t записывается в виде

$$\mathbf{z}(t)-\mathbf{z}(\tau)=\int_{\tau}^{t}\boldsymbol{\varphi}^{-1}(\lambda-\tau)\mathbf{Bv}(\lambda)\,d\lambda.$$

Из уравнения (5.8.9) имеем

$$\boldsymbol{\varphi}^{-1}(t-\tau)x(t)=\boldsymbol{\varphi}^{-1}(0)\mathbf{x}(\tau)+\int_{\tau}^{t}\boldsymbol{\varphi}^{-1}(\lambda-\tau)\mathbf{Bv}(\lambda)\,d\lambda.$$

Учитывая

$$\boldsymbol{\varphi}(0)=\mathbf{I} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{\varphi}(t-\tau)\boldsymbol{\varphi}^{-1}(\lambda-\tau)=e^{\mathbf{A}(t-\tau)}e^{-\mathbf{A}(\lambda-\tau)}=e^{\mathbf{A}(t-\lambda)}=\boldsymbol{\varphi}(t-\lambda)$$

и умножая обе части слева на $\varphi(t-\tau)$, окончательно получим

$$\mathbf{x}(t)=\varphi(t-\tau)\,\mathbf{x}(\tau)+\int_{\tau}^{t}\varphi(t-\lambda)\,\mathbf{B}\mathbf{v}(\lambda)\,d\lambda. \qquad (5.8.11)$$

Решение для $\mathbf{y}(t)$ следует из подстановки уравнения (5.8.11) в уравнение (5.8.8):

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{C}\varphi(t-\tau)\,\mathbf{x}(\tau)+\int_{\tau}^{t}\mathbf{C}\varphi(t-\lambda)\,\mathbf{B}\mathbf{v}(\lambda)\,d\lambda+\mathbf{D}\mathbf{v}(t). \qquad (5.8.12)$$

Уравнения (5.8.11) и (5.8.12) образуют решение уравнения (5.8.8). Первый член уравнения (5.8.11) характеризует реакцию переменных состояния системы, обусловленную начальными условиями, в то время как второй член характеризует вынужденную реакцию. Заметим, что второй член уравнения (5.8.11) представляет собой интеграл свертывания, подобный приведенному в уравнении (1.6.2).

Пример 5.8.4. Предположим, что система с матрицей $\mathbf{A}$, такой же как и в примере 5.8.1, подвержена действию единичной ступенчатой функции в момент $t=0$ (см. рис. 5.8.1, *а*). Найти выход $\mathbf{y}(t)=\mathbf{x}(t)$.

В данном примере

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & -3\end{bmatrix},$$

$$\varphi(t)=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & 2\left(e^{-2t}-e^{-t}\right)\\ e^{-t}-e^{-2t} & 2e^{-2t}-e^{-t}\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},\qquad \mathbf{C}=[1\quad 0],\qquad \mathbf{D}=[0].$$

Следовательно, согласно уравнению (5.8.12) имеем

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{C}\varphi(t)\,\mathbf{x}(0)+\int_{0}^{t}\mathbf{C}\varphi(t-\lambda)\,\mathbf{B}U_{-1}(\lambda)\,d\lambda=$$

$$=[1\quad 0]\begin{bmatrix}\varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t)\\ \varphi_{21}(t) & \varphi_{22}(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}+\int_{0}^{t}[1\quad 0]\begin{bmatrix}\varphi_{11}(t-\lambda) & \varphi_{12}(t-\lambda)\\ \varphi_{21}(t-\lambda) & \varphi_{22}(t-\lambda)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}d\lambda=$$

$$=\varphi_{11}(t)\,x_1(0)+\varphi_{12}(t)\,x_2(0)+\int_{0}^{t}\varphi_{12}(t-\lambda)\,d\lambda=$$

$$=\left(2e^{-t}-e^{-2t}\right)x_1(0)+2\left(e^{-2t}-e^{-t}\right)x_2(0)+$$

$$+\int_{0}^{t}2\left[e^{-2(t-\lambda)}-e^{-(t-\lambda)}\right]d\lambda=\left(2e^{-t}-e^{-2t}\right)x_1(0)+$$

$$+2\left(e^{-2t}-e^{-t}\right)x_2(0)+2e^{-t}-e^{-2t}-1,\qquad t\geqslant 0$$

§ 5.9. Линейные нестационарные системы. Переходная матрица состояния

В случае, когда матрица **A** не является постоянной, а изменяется во времени, однородное матричное дифференциальное уравнение имеет вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{x}. \tag{5.9.1}$$

Естественно вернуться к скалярному случаю и провести аналогию между решением скалярного дифференциального уравнения

$$\dot{x} = a(t)\,x, \tag{5.9.2}$$

рассмотренным в § 2.5, и решением уравнения (5.9.1). Решение уравнения (5.9.2) равно

$$x(t) = [\exp b(t)]\,x(\tau), \tag{5.9.3}$$

где τ — некоторый фиксированный момент времени и

$$b(t) = \int_{\tau}^{t} a(\lambda)\,d\lambda.$$

По аналогии решение уравнения (5.9.1) предполагается в виде

$$\mathbf{x}(t) = \left[\exp \int_{\tau}^{t} \mathbf{A}(\lambda)\,d\lambda\right] \mathbf{x}(\tau). \tag{5.9.4}$$

Однако при подстановке уравнения (5.9.4) в уравнение (5.9.1) видно, что уравнение (5.9.4) представляет собой истинное решение в том и только в том случае, если

$$\frac{d}{dt} e^{\mathbf{B}(t)} = \frac{d\mathbf{B}(t)}{dt} e^{\mathbf{B}(t)}, \tag{5.9.5}$$

где

$$\mathbf{B}(t) = \int_{\tau}^{t} \mathbf{A}(\lambda)\,d\lambda.$$

К сожалению, уравнение (5.9.5) не всегда справедливо; в действительности оно удовлетворяется крайне редко. Два очевидных, но тривиальных случая, при которых уравнение справедливо, — это: **A** — постоянная матрица или **A** — диагональная матрица. В первом случае решение известно, а во втором — уравнения состояния не связаны между собой, так что для каждого x_i можно использовать выражение (5.9.3).

Можно показать, что условие, выражаемое уравнением (5.9.5), записывается как условие коммутативности для **A** [13]

$$\mathbf{A}(t_1)\,\mathbf{A}(t_2) = \mathbf{A}(t_2)\,\mathbf{A}(t_1) \text{ для всех } t_1 \text{ и } t_2. \tag{5.9.6}$$

Если выполняется (5.9.6), то выражение (5.9.4) является решением уравнения (5.9.1) и переходная матрица состояния равна

$$\varphi(t, \tau) = \exp \int_{\tau}^{t} \mathbf{A}(\lambda)\, d\lambda. \tag{5.9.7}$$

Матрицант. В общем случае, при невыполнении условия коммутативности (5.9.6) переходная матрица состояния не описывается уравнением (5.9.7). Решение уравнения (5.9.1) можно, однако, получить методом, известным как метод интегрирования Пеано — Бэкера [14] и состоящим в следующем.

Пусть заданы условия $\mathbf{x}(\tau)$. Тогда, интегрируя уравнение (5.9.1), получим интегральное уравнение

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(\tau) + \int_{\tau}^{t} \mathbf{A}(\lambda)\, \mathbf{x}(\lambda)\, d\lambda. \tag{5.9.8}$$

Это уравнение называют иногда векторным интегральным уравнением Вольтерра. Решается оно путем последовательных подстановок правой части интегрального уравнения в подынтегральное выражение вместо $\mathbf{x}$. Например, первая итерация приводит к

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(\tau) + \int_{\tau}^{t} \mathbf{A}(\lambda) \left[\mathbf{x}(\tau) + \int_{\tau}^{\lambda} \mathbf{A}(s)\, \mathbf{x}(s)\, ds \right] d\lambda. \tag{5.9.9}$$

Подобные выражения несколько упрощаются введением интегрального оператора $\mathbf{Q}$, определяемого как

$$\mathbf{Q}(\quad) = \int_{\tau}^{t} (\quad)\, d\lambda.$$

Тогда уравнение (5.9.8) можно записать в виде

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(\tau) + \mathbf{Q}(\mathbf{A})\, \mathbf{x}(\lambda). \tag{5.9.10}$$

Если продолжить процедуру, описываемую уравнением (5.9.9), то получим $\mathbf{x}(t)$ в виде ряда Неймана

$$\mathbf{x}(t) = [\mathbf{I} + \mathbf{Q}(\mathbf{A}) + \mathbf{Q}(\mathbf{A}\mathbf{Q}(\mathbf{A})) + \mathbf{Q}(\mathbf{A}\mathbf{Q}(\mathbf{A}\mathbf{Q}(\mathbf{A}))) + \ldots]\, \mathbf{x}(\tau). \tag{5.9.11}$$

Первый член в скобках равен единичной матрице $\mathbf{I}$. Второй член равен интегралу от $\mathbf{A}$ в пределах τ и t. Третий член находится путем умножения $\mathbf{Q}(\mathbf{A})$ слева на $\mathbf{A}$ и затем интегрированием произведения в пределах τ и t. Подобным образом находятся

и остальные члены. Если элементы $\mathbf{A}$ ограничены на участке интегрирования, то этот ряд сходится абсолютно и равномерно. Данный ряд определяется квадратной матрицей $\mathbf{G}(\mathbf{A})$, называемой *матрицантом*,

$$\mathbf{G}(\mathbf{A}) = \mathbf{I} + \mathbf{Q}(\mathbf{A}) + \mathbf{Q}(\mathbf{A}\mathbf{Q}(\mathbf{A})) + \mathbf{Q}(\mathbf{A}\mathbf{Q}(\mathbf{A}\mathbf{Q}(\mathbf{A}))) + \ldots \quad (5.9.12)$$

Основное свойство матрицанта

$$\frac{d}{dt}\mathbf{G}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}\mathbf{G}(\mathbf{A}) \quad (5.9.13)$$

получается в результате дифференцирования обеих частей уравнения (5.9.12) по t. Следовательно, $\mathbf{G}(\mathbf{A})$ является искомым решением уравнения (5.9.1) и представляет собой искомую переходную матрицу состояния нестационарной системы. Таким образом,

$$\varphi(t, \tau) = \mathbf{G}(\mathbf{A}) \quad (5.9.14)$$

или

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{G}(\mathbf{A})\,\mathbf{x}(\tau) = \varphi(t, \tau)\,\mathbf{x}(\tau). \quad (5.9.15)$$

Ясно, что при постоянной матрице $\mathbf{A}$

$$\varphi(t, \tau) = \mathbf{I} + (t-\tau)\mathbf{A} + \frac{(t-\tau)^2}{2!}\mathbf{A}^2 + \frac{(t-\tau)^3}{3!}\mathbf{A}^3 + \ldots = e^{\mathbf{A}(t-\tau)}.$$

Пример 5.9.1. Найти $\varphi(t, \tau)$ для системы первого порядка

$$\dot{x} = -tx.$$

Очевидно, что ответом будет $\varphi(t, \tau) = \exp[(\tau^2 - t^2)/2]$. Его можно получить непосредственным интегрированием данного уравнения или, удостоверившись в выполнении коммутативных условий (5.9.6), на основе уравнения (5.9.7).

Из уравнения (5.9.12) видно, что матрицант равен

$$G(A) = \varphi(t, \tau) = 1 - \left(\frac{t^2 - \tau^2}{2}\right) + \frac{\left(\frac{t^2 - \tau^2}{2}\right)^2}{2!} + \ldots.$$

Это не что иное, как разложение в бесконечный ряд e^{-z}, откуда переходная матрица состояния равна

$$\varphi(t, \tau) = \exp\left[\frac{\tau^2 - t^2}{2}\right].$$

Из примера видны трудности, связанные с использованием матрицанта. Если ряд (уравнение (5.9.12)) сходится медленно, то процесс вычислений длится долго.

Другое интересное решение было предложено Кинаривала [13]. Подход состоит в разложении $\mathbf{A}(t)$ на две матрицы $\mathbf{A}_0(t)$

и $\mathbf{A}_1(t)$, где $\mathbf{A}_0(t)$ удовлетворяет условию коммутативности (5.9.6). Следовательно,

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}_0(t) + \mathbf{A}_1(t) \tag{5.9.16}$$

или

$$\dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{A}_0(t) + \mathbf{A}_1(t)]\,\mathbf{x}. \tag{5.9.17}$$

$\mathbf{A}_1(t)$ трактуется как матрица возмущений.

Невозмущенное уравнение

$$\dot{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{A}_0(t)\,\mathbf{x}_0 \tag{5.9.18}$$

имеет решение

$$\mathbf{x}_0(t) = \varphi_0(t, \tau)\,\mathbf{x}(\tau), \tag{5.9.19}$$

где

$$\varphi_0(t, \tau) = \exp\left[\int_\tau^t \mathbf{A}_0(\lambda)\,d\lambda\right].$$

Предполагается, что решение уравнения (5.9.17) имеет такой же вид, как и уравнение (5.9.19), с учетом добавочного эффекта, вносимого матрицей возмущений.

Возмущение $\mathbf{A}_1(t)\mathbf{x}(t)$ эквивалентно вынуждающей функции $\mathbf{Bv}$ в предыдущем параграфе. На основе прямой аналогии, согласно теореме суперпозиции решение $\mathbf{x}(t)$ дается выражением

$$\mathbf{x}(t) = \varphi_0(t, \tau)\,\mathbf{x}(\tau) + \int_\tau^t \varphi_0(t, \lambda)\,\mathbf{A}_1(\lambda)\,\mathbf{x}(\lambda)\,d\lambda. \tag{5.9.20}$$

Как и раньше, это уравнение Вольтерра вида (5.9.8). Согласно ранее описанному процессу итераций ряд Неймана для $\varphi(t, \tau)$ примет вид

$$\varphi(t, \tau) = [\mathbf{I} + \mathbf{Q}(\varphi_0\mathbf{A}_1) + \mathbf{Q}(\varphi_0\mathbf{A}_1\mathbf{Q}(\varphi_0\mathbf{A}_1)) + \ldots]\,\varphi_0(t, \tau). \tag{5.9.21}$$

Данное выражение совместно с уравнением (5.9.15) и определяют $\mathbf{x}(t)$.

Если $\mathbf{A}_1(t)$ сравнительно мала, то для надлежащей аппроксимации необходимо учесть лишь несколько первых членов выражения (5.9.21). Число требуемых членов уменьшается при удачном первоначальном выборе $\mathbf{A}_0(t)$. Однако произвести такой выбор зачастую трудно. Незачем и говорить о том, что нахождение аналитического решения дифференциальных уравнений с изменяющимися во времени коэффициентами в общем случае представляет существенные трудности; это настолько трудно, что инженеру приходится непрерывно прибегать к помощи вычислительной машины. Во многих случаях переходная матрица состояния легко получается путем надлежащего выбора

переменных состояния (что непосредственно не очевидно). Может оказаться полезным определить, существуют ли такие переменные состояния, чтобы было применимо уравнение (5.9.7). Это иллюстрируется на примере.

Пример 5.9.2. Однородное дифференциальное уравнение системы имеет вид $\ddot{y} - 2t\dot{y} - (2 - t^2)y = 0$. Определить $\varphi(t, \tau)$.

Схема моделирования этой системы показана на рис. 5.9.1, *а*. Очевидным является выбор переменных состояния $x_1 = y$ и $x_2 = \dot{y}$. В результате матрица $\mathbf{A}(t)$ равна

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 - t^2 & 2t \end{bmatrix}.$$

Однако $\mathbf{A}(t_1)\,\mathbf{A}(t_2) \neq \mathbf{A}(t_2)\,\mathbf{A}(t_1)$. Поэтому нельзя применить уравнение (5.9.7).

Исследование этого дифференциального уравнения показывает, что его можно переписать в виде

$$\ddot{y} - 2t\dot{y} - (2 - t^2)\,y = \ddot{y} - \frac{d}{dt}(ty) - y - t(\dot{y} - ty) = 0.$$

Выбрав теперь переменные состояния $z_1 = y$, $z_2 = \dot{y} - ty$, получим

$$\dot{z}_2 = \ddot{z}_1 - \frac{d}{dt}(tz_1).$$

Так как

$$\ddot{z}_1 - \frac{d}{dt}(tz_1) = z_1 + tz_2,$$

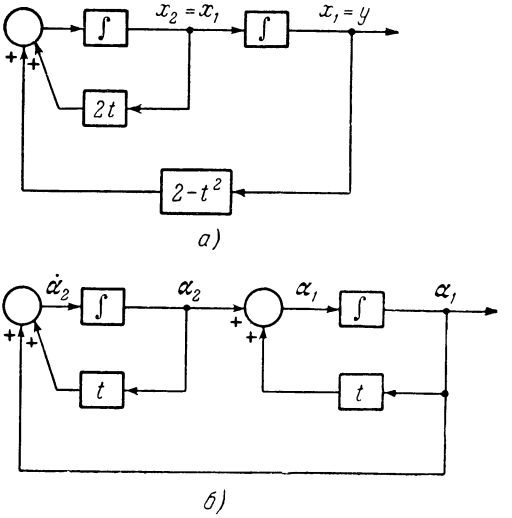


Рис. 5.9.1.

то $\dot{z}_2 = z_1 + tz_2$. Выражение для $\dot{z}_1 = \dot{y}$ можно получить на основе z_2, а именно: $\dot{z}_1 = \dot{y} = z_2 + tz_1$. Тогда дифференциальное уравнение в матричной форме имеет вид

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}.$$

Схема моделирования показана на рис. 5.9.1, *б*. Новая матрица $\mathbf{A}(t)$ удовлетворяет условию коммутативности, т. е. $\mathbf{A}(t_1)\mathbf{A}(t_2) = \mathbf{A}(t_2)\mathbf{A}(t_1)$. Поэтому здесь применимо уравнение (5.9.7).

Переходная матрица состояния $\varphi(t, \tau)$ принимает вид

$$\varphi(t, \tau) = \exp\left[\int_{\tau}^{t} \mathbf{A}(\sigma)\,d\sigma\right] = \exp \mathbf{B},$$

где

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \dfrac{t^2 - \tau^2}{2} & t - \tau \\ t - \tau & \dfrac{t^2 - \tau^2}{2} \end{bmatrix}.$$

Матрица $e^{\mathbf{B}}$ находится одним из описанных выше методов. Однако весьма поучительно найти $e^{\mathbf{B}}$ на основе уравнения (4.10.20). Имеем

$$e^{\mathbf{B}} = \mathbf{M} e^{\Lambda} \mathbf{M}^{-1}.$$

Характеристические числа $\mathbf{B}$ равны $\lambda_{1,2} = [(t^2 - \tau^2)/2] \pm (t - \tau)$, а модальные матрицы

$$\mathbf{M} = (t - \tau) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{2(t-\tau)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$e^{\mathbf{B}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp\left[\dfrac{t^2 - \tau^2}{2} + (t - \tau)\right] & 0 \\ 0 & \exp\left[\dfrac{t^2 - \tau^2}{2} - (t - \tau)\right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

и

$$\varphi(t, \tau) = e^{(t^2 - \tau^2)/2} \begin{bmatrix} \operatorname{ch}(t - \tau) & \operatorname{sh}(t - \tau) \\ \operatorname{sh}(t - \tau) & \operatorname{ch}(t - \tau) \end{bmatrix}.$$

Матрица $\varphi(t, \tau)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $(d/dt) \times \times [\varphi(t, \tau)] = \mathbf{A}(t)\, \varphi(t, \tau)$, так как

$$\frac{d}{dt} \varphi(t, \tau) = t\varphi(t, \tau) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \varphi(t, \tau)$$

и

$$\mathbf{A}(t)\, \varphi(t, \tau) = \begin{bmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{bmatrix} \varphi(t, \tau) = t\varphi(t, \tau) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \varphi(t, \tau).$$

Несмотря на то, что при решении почти всех задач управления нестационарными системами инженер должен прибегать к цифровым или аналоговым вычислительным устройствам, тщательный первоначальный анализ системы значительно сокращает время вычислений. Переменные состояния, выбор которых очевиден, могут оказаться неэффективными для управления или моделирования системы. Во многих случаях более действенными оказываются их сочетания. Иллюстрацией сказанного служит приведенный выше пример.

Переходную матрицу состояния можно также найти на основе метода § 5.8, связанного с использованием схемы моделирования. В случае нестационарной системы i-я переменная состояния $x_i(t)$ определяется уравнением (5.9.22), подобным уравнению (5.8.7):

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(t, \tau)\, x_j(\tau). \tag{5.9.22}$$

Член $\varphi_{ij}(t, \tau)$ можно найти, зная передаточную функцию $\Phi_{ij}(t, s)$ между *входом* интегратора j и *выходом* интегратора i. Заметим, что это передаточная функция нестационарной системы (см. § 3.9), в результате чего вычисление ее может ока-

заться затруднительным. При моделировании системы на аналоговом устройстве единичные начальные условия на интеграторе j в момент времени τ_1 вызывают на выходе интегратора i реакцию $\varphi_{ij}(t, \tau_1)$. Для получения $\varphi_{ij}(t, \tau)$ при всех $\tau \leqslant t$ необходим ряд испытаний, нанесение их на диаграмму, графическое построение результатов (при любом t как функцию τ). Это обсуждается подробно в § 5.11 и 5.12.

Свойства переходной матрицы состояния.

Свойство 1. Согласно определению

$$\varphi(t_0, t_0) = \mathbf{I}. \tag{5.9.23}$$

Свойство 2. Переходная матрица состояния обладает *групповым свойством*:

$$\varphi(t_2, t_0) = \varphi(t_2, t_1)\varphi(t_1, t_0). \tag{5.9.24}$$

Это можно показать из соотношений $\mathbf{x}(t_2) = \varphi(t_2, t_1)\mathbf{x}(t_1) = \varphi(t_2, t_0)\mathbf{x}(t_0)$ и $\mathbf{x}(t_1) = \varphi(t_1, t_0)\mathbf{x}(t_0)$. Тогда $\mathbf{x}(t_2) = \varphi(t_2, t_1) \times \varphi(t_1, t_0)\mathbf{x}(t_0)$. Следовательно, $\varphi(t_2, t_0) = \varphi(t_2, t_1)\varphi(t_1, t_0)$.

Свойство 3.

$$\varphi(t_1, t_2) = \varphi^{-1}(t_2, t_1). \tag{5.9.25}$$

Это свойство следует из выражения $\varphi^{-1}(t_2, t_1)\varphi(t_2, t_1) = \mathbf{I} = \varphi(t_1, t_1)$. Так как $\varphi(t_1, t_2)\varphi(t_2, t_1) = \varphi(t_1, t_1)$, то отсюда следует $\varphi^{-1}(t_2, t_1)\varphi(t_1, t_2) = \varphi(t_1, t_2)\varphi(t_2, t_1)$. Умножение этого выражения справа на $\varphi^{-1}(t_2, t_1)$ дает $\varphi^{-1}(t_2, t_1) = \varphi(t_1, t_2)$.

Для стационарных систем

Свойство 4.

$$\varphi(t + \tau) = \varphi(t)\varphi(\tau). \tag{5.9.26}$$

Так как для стационарных систем $\varphi(t) = e^{\mathbf{A}t}$, то

$$\varphi(t + \tau) = e^{\mathbf{A}(t+\tau)} = \varphi(t)\varphi(\tau).$$

Свойство 5.

$$\varphi^{-1}(t) = \varphi(-t). \tag{5.9.27}$$

Пусть в (5.9.26) $\tau = -t$. Тогда $\varphi(0) = \mathbf{I} = \varphi(t)\varphi(-t)$ или $\varphi(-t) = \varphi^{-1}(t)$.

Обратная переходная матрица состояния. Сопряженная система. Обратная переходная матрица состояния $\varphi^{-1}(t, \tau)$ играет важную роль в нахождении общего решения для нестационарных систем, в получении импульсной матричной характеристики $\mathbf{H}(t, \tau)$, а также при решении задач оптимального управления. Значимость этой матрицы связана с уравнением (5.9.25), из которого следует

$$\varphi(t, \tau) = \varphi^{-1}(\tau, t).$$

Поведение системы, рассматриваемое относительно переменной t, зависит от динамических свойств исходной системы. Поведение системы, рассматриваемое относительно переменной τ, зависит от динамических свойств такой системы, для которой $\varphi^{-1}(t, \tau)$ является переходной матрицей состояния. Такая система известна как *сопряженная* исходной.

Если исходная система имеет вид $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$, то *сопряженная* система определяется как

$$\dot{\alpha} = -\alpha\mathbf{A}(t), \tag{5.9.28}$$

где α — вектор-строка, или

$$\dot{\alpha} = -\mathbf{A}^T(t)\alpha, \tag{5.9.29}$$

где α — вектор-столбец. Это можно вывести на основе уравнения (4.4.8), согласно которому

$$\frac{d}{dt}[\varphi^{-1}(t, \tau)] = \dot{\varphi}^{-1}(t, \tau) = -\varphi^{-1}(t, \tau)\dot{\varphi}(t, \tau)\varphi^{-1}(t, \tau).$$

Из $\dot{\varphi}(t, \tau) = \mathbf{A}(t)\varphi(t, \tau)$ следует, что

$$\dot{\varphi}^{-1}(t, \tau) = -\varphi^{-1}(t, \tau)\mathbf{A}(t). \tag{5.9.30}$$

Таким образом, $\varphi^{-1}(t, \tau)$ является переходной матрицей состояния для системы, описываемой однородным дифференциальным уравнением

$$\dot{\alpha} = -\alpha\mathbf{A}(t),$$

где α — вектор-строка. Транспонирование обеих частей уравнения (5.9.30) дает*)

$$[\dot{\varphi}^{-1}(t, \tau)]^T = [\dot{\varphi}^T(t, \tau)]^{-1} = -\mathbf{A}^T(t)[\varphi^T(t, \tau)]^{-1}.$$

Таким образом, $[\varphi^T(t, \tau)]^{-1}$ является переходной матрицей состояния для системы, описываемой однородным дифференциальным уравнением

$$\dot{\alpha} = -\mathbf{A}^T(t)\alpha, \tag{5.9.31}$$

где α — вектор-столбец.

Пример 5.9.3. Сравнить переходные матрицы состояния для $\dot{x} + tx = 0$ и сопряженного уравнения.

Из примера 5.9.1 имеем

$$x(t) = x(\tau)\exp\left(\frac{\tau^2 - t^2}{2}\right)$$

*) В случае $\mathbf{A}(t)$ с комплексными элементами берется транспонированная комплексно сопряженная матрица $[\mathbf{A}^*(t)]^T$.

или

$$\varphi(t, \tau) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{\tau^2 - t^2}{2}\right) & t \geqslant \tau, \\ 0 & t < \tau. \end{cases}$$

Сопряженное дифференциальное уравнение имеет вид $\dot{\alpha} - t\alpha = 0$. Решение этого уравнения равно

$$\alpha(t) = \alpha(\tau) \exp\left(\frac{t^2 - \tau^2}{2}\right)$$

или

$$\varphi^{-1}(t, \tau) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{t^2 - \tau^2}{2}\right) & t \geqslant \tau, \\ 0 & t < \tau. \end{cases}$$

Если поменять местами переменные t и τ в $\varphi^{-1}(t, \tau)$, то получим

$$\varphi^{-1}(\tau, t) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{\tau^2 - t^2}{2}\right) & \tau \geqslant t, \\ 0 & \tau < t. \end{cases}$$

Сравнение $\varphi^{-1}(\tau, t)$ с $\varphi(t, \tau)$ показывает, что эти два уравнения идентичны, но только справедливы для различных интервалов. Физически реализуемый выход $\alpha(t)$ сопряженной системы представляет физически нереализуемую часть решения $x(t)$. (Под физически реализуемым выходом системы подразумевается случай $t > \tau$.)

Сопряженный оператор. Однородное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = 0 \tag{5.9.32}$$

можно записать как $\mathbf{L}_n y = 0$, где $\mathbf{L}_n$ — линейный дифференциальный оператор, определяемый формулой

$$\mathbf{L}_n = p^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)\, p^k, \qquad p^k = \frac{d^k}{dt^k},$$

а $a_k(t)$ — действительные функции. *Сопряженный* линейный дифференциальный оператор определяется как

$$\mathbf{L}_n^* = (-1)^n p^n + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k p^k a_k(t), \tag{5.9.33}$$

где $p^k a_k(t)$ указывает на то, что p^k воздействует на произведение $a_k(t)$ и зависимой переменной. Следовательно, сопряженное линейное дифференциальное уравнение $\mathbf{L}_n^* \alpha = 0$ можно записать в виде

$$(-1)^n p^n \alpha + (-1)^{n-1} p^{n-1} [a_{n-1}(t)\, \alpha] + \ldots + a_0(t)\, \alpha = 0.$$

Если исходное дифференциальное уравнение (5.9.32) представить в форме $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}$, то матрица $\mathbf{A}$ равна

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \dots & -a_{n-1}(t) \end{bmatrix}. \qquad (5.9.34)$$

Для сопряженной системы $\dot{\alpha}=-\mathbf{A}^T(t)\alpha$ и $-\mathbf{A}^T$ равна

$$-\mathbf{A}^T=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_0(t) \\ -1 & 0 & \dots & 0 & a_1(t) \\ 0 & -1 & \dots & 0 & a_2(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & -1 & a_{n-1}(t) \end{bmatrix}. \qquad (5.9.35)$$

Чтобы показать, что операторная и матричная формы эквивалентны, проделаем ряд операций с определенной матрицей сопряженной системы

$$\dot{\alpha}_1 = a_0(t)\,\alpha_n,$$
$$\dot{\alpha}_2 = -\alpha_1 + a_1(t)\,\alpha_n,$$
$$\dot{\alpha}_i = -\alpha_{i-1} + a_{i-1}(t)\,\alpha_n.$$

Дифференцируем $\dot{\alpha}_n$:

$$\ddot{\alpha}_n = -\dot{\alpha}_{n-1} + \frac{d}{dt}\,[a_{n-1}(t)\,\alpha_n].$$

Подставив в полученное $\dot{\alpha}_{n-1}$, имеем

$$\ddot{\alpha}_n = -\dot{\alpha}_{n-2} + \frac{d}{dt}\,[a_{n-1}(t)\,\alpha_n] - a_{n-2}(t)\,\alpha_n.$$

Можно показать, что если приведенные выше операции дифференцирования и подстановки выполнить $(n-1)$ раз, то получим выражение

$$(-1)^n p^n \alpha_n + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k p^k [a_k(t)\,\alpha_n] = 0, \qquad (5.9.36)$$

в точности совпадающее с сопряженным линейным дифференциальным уравнением.

Сопряженный оператор можно найти и на основе его определения [15]:

$$\langle \alpha,\ \mathbf{L}\mathbf{x}\rangle = \langle \mathbf{L}^{*T}\alpha,\ \mathbf{x}\rangle.$$

Данное определение часто используется при формулировке критериев существования и единственности решения дифференциальных уравнений.

Линейные системы с периодическими коэффициентами [16]. Рассмотрим линейную систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{x}, \tag{5.9.37}$$

где $\mathbf{A}(t)$ — непрерывная периодическая матрица с постоянным периодом $T \neq 0$, так что

$$\mathbf{A}(t+T) = \mathbf{A}(t).$$

Из этого соотношения следует, что если $\varphi(t, \tau)$ переходная матрица состояния для уравнения (5.9.37), то $\varphi(t+T, \tau)$ также будет переходной матрицей и существует постоянная матрица $\mathbf{C}$, удовлетворяющая $\varphi(t+T, \tau) = \varphi(t, \tau)\,\mathbf{C}$. Это легко показать, учитывая, что производная от этого выражения равна

$$\dot{\varphi}(t+T, \tau) = \dot{\varphi}(t, \tau)\,\mathbf{C} = \mathbf{A}(t)\,\varphi(t, \tau)\,\mathbf{C} = \mathbf{A}(t)\,\varphi(t+T, \tau),$$

так что $\varphi(t+T, \tau)$ также удовлетворяет уравнению (5.9.37).

Можно показать, что существует постоянная матрица $\mathbf{B}$ (называемая логарифмом матрицы $\mathbf{C}$), удовлетворяющая $\mathbf{C} = e^{\mathbf{B}T}$. Это следует из $\varphi(t+T, \tau) = \varphi(t, \tau)\,e^{\mathbf{B}T}$. В зависимости от определенных свойств $\mathbf{B}$ $\varphi(t, \tau)$ может быть и не быть периодической матрицей.

Определив $\mathbf{P}(t)$ как

$$\mathbf{P}(t) = \varphi(t, \tau)\,e^{-\mathbf{B}t}, \tag{5.9.38}$$

получим

$$\mathbf{P}(t+T) = \varphi(t+T, \tau)\,e^{-\mathbf{B}(t+T)} = \\ = \varphi(t, \tau)\,e^{\mathbf{B}T}e^{-\mathbf{B}(t+T)} = \varphi(t, \tau)\,e^{-\mathbf{B}t} = \mathbf{P}(t).$$

$\mathbf{P}(t)$ — неособенная матрица, так как неособенными являются $\varphi(t, \tau)$ и $e^{-\mathbf{B}t}$ $(\infty < t < \infty)$. Следовательно, для системы с периодическими коэффициентами $\mathbf{P}(t)$ — неособенная периодическая матрица с периодом T.

Интересно отметить, что $\mathbf{P}(t)$ служит решением дифференциального уравнения [17]

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{P}(t) - \mathbf{P}(t)\,\mathbf{B}. \tag{5.9.39}$$

Поэтому матрица $\mathbf{B}$ должна быть такой, чтобы уравнение (5.9.39) имело периодическое решение с периодом T.

Пример 5.9.4. Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка $\dot{x} - a(t)x = 0$, где $a(t)$ — периодическая функция с периодом T.

Уравнение (5.9.39) имеет вид

$$\dot{p} = [a(t) - b]\,p.$$

Решение этого уравнения равно

$$p(t) = p(0) \exp \left\{ \int_0^t [a(\lambda) - b]\, d\lambda \right\}.$$

Решение $p(t)$ — периодическое с периодом T, если b равно среднему значению $a(t)$ на интервале T, т. е.

$$b = \frac{1}{T} \int_0^T a(\lambda)\, d\lambda.$$

К этому значению можно прибавить произвольную величину, кратную $2\pi j$.

Хотя в общем случае **B** не определяется однозначно, так как $\mathbf{B}T$ — один из комплексных логарифмов **C**, тем не менее матрица **A** определяет все свойства матрицы **B**, инвариантные относительно преобразования подобия. В частности, **A** единственным образом определяет характеристические корни **C**. Эти характеристические корни $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ называются *множителями, связанными с* **A**. Они все отличны от нуля, так как не равен нулю определитель **C**. Характеристические корни **B** называются *характеристическими экспонентами* [18].

Несмотря на некоторую нестрогость приведенного рассмотрения, существен тот факт, что знание переходной матрицы состояния для одного периода определяет переходную матрицу состояния периодической системы для $-\infty < t < \infty$. Например, если известна $\varphi(t, \tau)$ на интервале $(0 \leqslant t \leqslant T)$, то $\mathbf{C} = \varphi^{-1}(0, \tau)\varphi(T, \tau)$ и $\mathbf{B} = (\log \mathbf{C})/T$. Так как $\mathbf{P}(t)$ — периодическая функция с периодом T, то отсюда следует знание $\varphi(t, \tau)$ для всех t.

Пример 5.9.5 [19]. Исследовать уравнение

$$\ddot{y} + [a^2 + b^2 \operatorname{sgn}(\cos t)]\, y = 0,$$

где

$$\operatorname{sgn} \alpha = \begin{cases} 1, & \alpha > 0, \\ 0, & \alpha = 0, \\ -1, & \alpha < 0, \end{cases}$$

для двух случаев: $a^2 = 1$, $b^2 = 1$ и $a^2 = 4{,}6$, $b^2 = 5{,}0$.

Это дифференциальное уравнение можно записать как

$$\ddot{y} + \omega^2(t)\, y = 0,$$

где периодический коэффициент $\omega^2(t)$ показан на рис. 5.9.2. Отметим, что это кусочно-постоянная величина. Матрица **A** данного уравнения (представленного в виде $x_1 = y$, $\dot{x}_1 = x_2$) равна

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2(t) & 0 \end{bmatrix}.$$

На каждом из интервалов постоянства $\omega^2(t)$ φ задается посредством

$$\varphi = \mathscr{L}^{-1}\,[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\omega t & \dfrac{1}{\omega}\sin\omega t \\ -\omega\sin\omega t & \cos\omega t \end{bmatrix}.$$

Ввиду периодичности $\omega(t)$ $\varphi(t,\tau)$ также должна быть периодической функцией.

Так как $\omega^2(t)$ — кусочно-постоянная периодическая функция, то $\varphi(3\pi/2, -\pi/2)$ находится из решения $\varphi(\pi/2, -\pi/2)$ и $\varphi(3\pi/2, \pi/2)$. Переходная

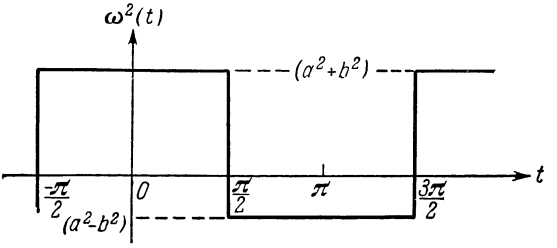


Рис. 5.9.2.

матрица состояния $\varphi(3\pi/2, -\pi/2)$ тогда равна $\varphi(3\pi/2, -\pi/2) = \varphi(3\pi/2, \pi/2) \times \varphi(\pi/2, -\pi/2)$.

На интервале $(-\pi/2, \pi/2)$ $\omega = \sqrt{2}$ для $a^2 = b^2 = 1$ и $\omega = 3,1$ для $a^2 = 4,6$, $b^2 = 5,0$. Поэтому

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} -0{,}259 & 0{,}683 \\ -1{,}37 & -0{,}259 \end{bmatrix}_{\omega=\sqrt{2}} = \begin{bmatrix} -0{,}951 & -0{,}099 \\ 0{,}959 & -0{,}951 \end{bmatrix}_{\omega=3{,}1}.$$

На интервале $(\pi/2, 3\pi/2)$ $\omega = 0$ для $a^2 = b^2 = 1$ и $\omega = j0{,}634$ для $a^2 = 4{,}6$, $b^2 = 5{,}0$. Поэтому

$$\varphi\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} 1 & \pi \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{\omega=0} = \begin{bmatrix} 3{,}73 & 5{,}66 \\ 2{,}27 & 3{,}73 \end{bmatrix}_{\omega=j0{,}634}.$$

На остальном интервале периода переходная матрица состояния равна

$$\varphi\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} 4{,}56 & 0{,}131 \\ -1{,}37 & -0{,}259 \end{bmatrix}_{a^2=b^2=1} = \begin{bmatrix} 1{,}88 & -5{,}75 \\ 1{,}41 & -3{,}78 \end{bmatrix}_{\substack{a^2=4{,}6 \\ b^2=5{,}0}}.$$

Ввиду $\mathbf{x}[(3\pi/2)k] = \varphi^k(3\pi/2, -\pi/2)\,\mathbf{x}(-\pi/2)$ ограниченность периодических импульсов $\mathbf{x}(t)$ зависит от того, меньше ли единицы абсолютное значение характеристических чисел φ. Периодичность $\mathbf{x}(t)$ зависит от равенства единице характеристических чисел φ. Для $a^2=b^2=1$ характеристическое уравнение $|\lambda\mathbf{I}-\varphi|$ равно $\lambda^2-4{,}3\lambda-0{,}99=0$. Его корни $\lambda_{1,2}=-2{,}15\pm 2{,}38$. Для $a^2=4{,}6$, $b^2=5{,}0$ характеристическое уравнение $|\lambda\mathbf{I}-\varphi|$ равно $\lambda^2+1{,}9\lambda+1{,}0=0$. Его корни $\lambda_{1,2}=-0{,}95\pm j0{,}317$. Следовательно, в первом случае ($a^2=b^2=1$) и при отличных от нуля начальных условиях система неустойчива. Во втором случае ($a^2=4{,}6$, $b^2=5{,}0$) решение периодическое (в пределах точности вычислений при помощи логарифмической линейки), так как $|\lambda_i|=1$. (Отметим, что $\lambda^2+2\lambda+1=0$ имеет кратный корень $\lambda=1$).

Из приведенного примера следует вывод, что решение дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами необязательно будет периодическим. Оно может быть устойчивым, неустойчивым или периодическим.

§ 5.10. Линейные нестационарные системы. Общее решение

Используя результаты предыдущего параграфа, можно получить общее решение уравнения состояния линейных нестационарных систем. Уравнения состояния для линейной системы с переменными параметрами задаются в виде

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{v}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\mathbf{v}. \end{aligned} \tag{5.10.1}$$

Из уравнения (5.9.30) следует, что

$$\dot{\varphi}^{-1}(t, \tau) = -\varphi^{-1}(t, \tau)\mathbf{A}(t).$$

Умножая первое из уравнений (5.10.1) слева на $\varphi^{-1}(t, \tau)$, а уравнение (5.9.30) — справа на $\mathbf{x}$, получим в результате

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(t, \tau)\dot{\mathbf{x}} &= \varphi^{-1}(t, \tau)\mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \varphi^{-1}(t, \tau)\mathbf{B}(t)\mathbf{v}, \\ \dot{\varphi}^{-1}(t, \tau)\mathbf{x} &= -\varphi^{-1}(t, \tau)\mathbf{A}(t)\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{5.10.2}$$

Сложение этих двух выражений приводит к

$$\frac{d}{dt}[\varphi^{-1}(t, \tau)\mathbf{x}] = \varphi^{-1}(t, \tau)\mathbf{B}(t)\mathbf{v}. \tag{5.10.3}$$

Интегрирование уравнения (5.10.3) от τ до t записывается как

$$\varphi^{-1}(t, \tau)\mathbf{x}(t) - \varphi^{-1}(\tau, \tau)\mathbf{x}(\tau) = \int_{\tau}^{t} \varphi^{-1}(\lambda, \tau)\mathbf{B}(\lambda)\mathbf{v}(\lambda)\,d\lambda. \tag{5.10.4}$$

Так как $\varphi^{-1}(\tau, \tau) = \mathbf{I}$, то

$$\mathbf{x}(t) = \varphi(t, \tau)\mathbf{x}(\tau) + \varphi(t, \tau)\int_{\tau}^{t} \varphi^{-1}(\lambda, \tau)\mathbf{B}(\lambda)\mathbf{v}(\lambda)\,d\lambda. \tag{5.10.5}$$

Используя тот факт, что

$$\varphi(t, \tau)\varphi^{-1}(\lambda, \tau) = \varphi(t, \tau)\varphi(\tau, \lambda) = \varphi(t, \lambda),$$

$\mathbf{x}(t)$ принимает вид

$$\mathbf{x}(t) = \varphi(t, \tau)\mathbf{x}(\tau) + \int_{\tau}^{t} \varphi(t, \lambda)\mathbf{B}(\lambda)\mathbf{v}(\lambda)\,d\lambda. \tag{5.10.6}$$

Выражение для $\mathbf{y}(t)$ получается из подстановки уравнения (5.10.6) во второе уравнение (5.10.1),

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\varphi(t, \tau)\mathbf{x}(\tau) + \int_{\tau}^{t} \mathbf{C}(t)\varphi(t, \lambda)\mathbf{B}(\lambda)\mathbf{v}(\lambda)\,d\lambda + \mathbf{D}(t)\mathbf{v}(t). \tag{5.10.7}$$

Уравнения (5.10.6) и (5.10.7) представляют общее решение уравнения (5.10.1). Они подобны соответственно уравнениям (5.8.11) и (5.8.12).

Для системы с постоянными параметрами реакция зависит от $t-\tau$, или разницы во времени между действием причины и наблюдением ее следствия. В результате имеем интегралы свертывания (5.8.11) и (5.8.12). Переходная матрица состояния для стационарных систем содержит лишь одну переменную, а именно разность между моментом действия причины и моментом наблюдения вызываемой ей реакции. Для системы с переменными параметрами решение, однако, уже зависит как от t, так и от τ. Для нестационарных систем причинно-следственная связь изменяется во времени и поэтому существенно, *когда* воздействует причина и *когда* наблюдается следствие. Переходная матрица состояния нестационарной системы содержит две переменные, одной из которых является момент действия причины, а другой — момент наблюдения следствия. Следовательно, уравнения (5.10.6) и (5.10.7) зависят от интегралов совмещения, а не интегралов свертывания.

Сопряженные решения и интегрирующие множители. Стандартный метод решения скалярного дифференциального уравнения вида

$$\dot{x} = a(t)x + v(t) \tag{5.10.8}$$

связан с применением интегрирующего множителя

$$\exp \int [-a(t)]\,dt,$$

как это показано в § 2.5. Согласно этому методу решение выражается как

$$\int_{\tau}^{t} \frac{d}{d\lambda}\left[e^{-\int^{\lambda} a(\alpha)\,d\alpha} x(\lambda)\right] d\lambda = \int_{\tau}^{t} e^{-\int^{\lambda} a(\alpha)\,d\alpha} v(\lambda)\,d\lambda. \tag{5.10.9}$$

Интегрирование левой части уравнения дает

$$e^{-\int^{t} a(\alpha)\,d\alpha} x(t) - e^{-\int^{\tau} a(\alpha)\,d\alpha} x(\tau) = \int_{\tau}^{t} e^{-\int^{\lambda} a(\alpha)\,d\alpha} v(\lambda)\,d\lambda,$$

откуда $x(t)$ записывается в виде

$$x(t)=e^{\int_{\tau}^{t} a(\alpha)\,d\alpha}\,x(\tau)+\int_{\tau}^{t} e^{\int_{\lambda}^{t} a(\alpha)\,d\alpha}\,v(\lambda)\,d\lambda. \qquad (5.10.10)$$

Отметим сходство уравнений (5.10.10) и (5.10.6). *Интегрирующий множитель* в решении уравнения (5.10.1) является переходной матрицей состояния φ^{-1} *сопряженной системы*. В этом состоит фундаментальное свойство переходной матрицы состояния сопряженной системы.

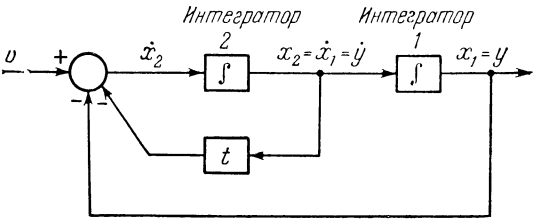


Рис. 5.10.1.

Пример 5.10.1. Рассмотрим нестационарную систему, описываемую уравнением $\ddot{y}+t\dot{y}+y=v(t)$. Блок-схема этой системы показана на рис. 5.10.1. Матрица **A**, соответствующая переменным состояния на рис. 5.10.1, равна

$$\mathbf{A}(t)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -t \end{bmatrix}.$$

Определить $\varphi(t,\tau)$.

$\mathbf{A}(t)$ не удовлетворяет условиям коммутативности, так как

$$\mathbf{A}(t_1)\,\mathbf{A}(t_2)=\begin{bmatrix} -1 & -t_2 \\ t_1 & -1+t_1t_2 \end{bmatrix}\neq\mathbf{A}(t_2)\,\mathbf{A}(t_1)=\begin{bmatrix} -1 & -t_1 \\ t_2 & -1+t_1t_2 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, переходную матрицу состояния $\varphi(t,\tau)$ нельзя определить из уравнения (5.9.7). Для этого можно использовать матрицант; однако решение в виде ряда, соответствующее этому методу, трудно выразить в замкнутой форме. Тем не менее при подходе, связанном с использованием интегрирующего множителя, согласно уравнению (5.9.22) получается разрешаемая система дифференциальных уравнений.

Однородное уравнение, соответствующее исходному, можно записать как

$$\ddot{y}+\frac{d}{dt}(yt)=0.$$

Интегрируя это уравнение, получим дифференциальное уравнение первого порядка $\dot{y}=-ty+c_1$, где c_1 — постоянная интегрирования. Это уравнение совпадает по форме с уравнением (5.10.8). Интегрирующий множитель равен $\exp(t^2/2)$. (Отметим, что данный интегрирующий множитель является

решением сопряженного дифференциального уравнения $\dot{\alpha} = t\alpha$.) Из уравнения (5.10.10) следует, что

$$y(t) = y(\tau)\, e^{(\tau^2-t^2)/2} + c_1 e^{-t^2/2} \int_\tau^t e^{\lambda^2/2}\, d\lambda.$$

Применительно к данному примеру это выражение лучше всего оставить в таком виде. Форма, получаемая в результате интегрирования, чрезвычайно сложная, как это следует из уравнения

$$y(t) = y(\tau)\, e^{(\tau^2-t^2)/2} - jc_1 \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-t^2/2} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{jt}{\sqrt{2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{j\tau}{\sqrt{2}}\right)\right].$$

Это служит иллюстрацией интересного положения. Даже в случае нахождения аналитического решения дифференциального уравнения с переменными параметрами его исследование может оказаться затруднительным. В общем случае дифференциальное уравнение с переменными параметрами решается моделированием на вычислительных устройствах, так как его аналитическое решение трудно получить либо трудно исследовать.

Производная $\dot{y}(t)$ равна

$$\dot{y}(t) = -ty(\tau)\, e^{(\tau^2-t^2)/2} + c_1 \left[1 - t \int_\tau^t e^{(\lambda^2-t^2)/2}\, d\lambda\right].$$

Теперь выражение для переходной матрицы состояния можно получить путем использования уравнения (5.9.22). При единичном начальном условии для интегратора 2 и нулевых начальных условиях для всех других интеграторов реакция на выходе интегратора 1 $y(t)$ равна $\varphi_{12}(t, \tau)$. Следовательно, пусть $\dot{y}(\tau) = 1$ и $y(\tau) = 0$.

Из выражения для $\dot{y}(t)$ следует $c_1 = 1$, откуда

$$\varphi_{12}(t, \tau) = e^{-t^2/2} \int_\tau^t e^{\lambda^2/2}\, d\lambda = \int_\tau^t e^{(\lambda^2-t^2)/2}\, d\lambda.$$

Подобным образом можно найти другие элементы переходной матрицы состояния, полагая

$$\varphi_{11}(t, \tau) = y(t) \quad \text{при} \quad \dot{y}(\tau) = 0, \quad y(\tau) = 1,$$
$$\varphi_{21}(t, \tau) = \dot{y}(t) \quad \text{при} \quad \dot{y}(\tau) = 0, \quad y(\tau) = 1,$$
$$\varphi_{22}(t, \tau) = \dot{y}(t) \quad \text{при} \quad \dot{y}(\tau) = 1, \quad y(\tau) = 0.$$

Следовательно,

$$\varphi_{11}(t, \tau) = e^{(\tau^2-t^2)/2} + \tau \int_\tau^t e^{(\lambda^2-t^2)/2}\, d\lambda,$$

$$\varphi_{21}(t, \tau) = \tau - t\left[e^{(\tau^2-t^2)/2} + \tau \int_\tau^t e^{(\lambda^2-t^2)/2}\, d\lambda\right],$$

$$\varphi_{22}(t, \tau) = 1 - t \int_\tau^t e^{(\lambda^2-t^2)/2}\, d\lambda.$$

Переходная матрица состояния имеет вид

$$\varphi(t, \tau) = \begin{bmatrix} e^{(\tau^2-t^2)/2} + \tau \int\limits_{\tau}^{t} e^{(\lambda^2-t^2)/2}\, d\lambda & \int\limits_{\tau}^{t} e^{(\lambda^2-t^2)/2}\, d\lambda \\ \tau - t\varphi_{11}(t, \tau) & 1 - t\varphi_{12}(t, \tau) \end{bmatrix}.$$

Другое применение сопряженной системы. Сопряженная система находит применение и при изучении действия вынуждающих функций и начальных условий на линейные комбинации переменных состояния. Рассмотрим скалярное произведение сопряженной составляющей α и $\mathbf{Lx}$, где

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}\frac{d}{dt} - \mathbf{A}$$

— оператор системы. Скалярное произведение записывается как

$$\langle \alpha, \mathbf{Lx} \rangle - \int\limits_{t_0}^{t} \alpha^T(\lambda)\,[\dot{\mathbf{x}}(\lambda) - \mathbf{A}(\lambda)\,\mathbf{x}(\lambda)]\, d\lambda. \qquad (5.10.11)$$

Интегрирование первого члена по частям приводит к

$$\langle \alpha, \mathbf{Lx} \rangle = \alpha^T(\lambda)\,\mathbf{x}(\lambda)\,\Big|_{t_0}^{t} - \int\limits_{t_0}^{t} [\dot{\alpha}^T(\lambda) + \alpha^T(\lambda)\,\mathbf{A}(\lambda)]\,\mathbf{x}(\lambda)\, d\lambda. \qquad (5.10.12)$$

Но согласно уравнению (5.9.29)

$$[\dot{\alpha}^T(\lambda) + \alpha^T(\lambda)\,\mathbf{A}(\lambda)] = [\dot{\alpha}(\lambda) + \mathbf{A}^T(\lambda)\,\alpha(\lambda)]^T = (\mathbf{L}^*\alpha)^T = 0^T. \qquad (5.10.13)$$

Тогда из уравнений (5.10.11), (5.10.12) и (5.10.1) получим

$$\alpha^T(t)\,\mathbf{x}(t) = \alpha^T(t_0)\,\mathbf{x}(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \alpha^T(\lambda)\,\mathbf{B}(\lambda)\,\mathbf{v}(\lambda)\, d\lambda. \qquad (5.10.14)$$

Отметим, что в случае свободного движения системы, т. е. если $\mathbf{v}(\lambda) = \mathbf{0}$, $\alpha^T\mathbf{x}$ равно постоянной величине. Уравнение (5.10.14) может использоваться для определения линейных комбинаций $x_i(t)$, если предварительно разрешено относительно $\alpha(\lambda)$ $(t_0 \leqslant \lambda \leqslant t)$ уравнение (5.10.13).

Для решения уравнения (5.10.13) на $\alpha(\lambda)$ следует наложить граничные условия, которые зависят от существа решаемой задачи. Например, если нужно определить воздействие на $x_1(t)$ вынуждающей функции или начальных условий, то $\alpha_1(t) = 1$ и $\alpha_2(t) = \alpha_3(t) = \ldots = \alpha_n(t) = 0$. Искомый результат получается из решения сопряженной системы при этих начальных условиях и затем подстановки этого решения в уравнение (5.10.14).

Пример 5.10.2. Система управления конечным положением, описываемая уравнением $\dot{x}=-(1/T)x+m(t)$, возбуждается при $x(0)=0$ $m(t)=KU_{-1}(t)$. Желаемое состояние системы в момент времени $t=t_0$ (фиксированная величина) $x^0(t_0)=e^{(t_1-t_0)/T}$; при этом $m(t)$ равно нулю. Затем система должна «скатиться» к $x=1$ в $t=t_1$ (также фиксированный момент времени). Это — желаемое конечное состояние. При сравнении $x(t_0)$ с $x^0(t_0)$, однако, обнаруживаем, что из-за возмущений $x(t_0)<x^0(t_0)$. Какой промежуток времени следует поддерживать $m(t)=K$, чтобы $x(t_1)=1$?

Пусть Δt — промежуток времени действия $m(t)=K$, начиная с t_0. Тогда уравнение (5.10.14) принимает вид

$$\alpha(t_1)\,x(t_1)=\alpha(t_0)\,x(t_0)+\int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta t} K\alpha(\lambda)\,d\lambda.$$

Сопряженное уравнение равно

$$\frac{d\alpha}{d\lambda}=\frac{1}{T}\alpha,\qquad \alpha(t_1)=1,\qquad t_0\leqslant\lambda\leqslant t_1.$$

Решение для $\alpha(\lambda)$:

$$\alpha(\lambda)=e^{(\lambda-t_1)/T}.$$

Тогда

$$x(t_1)=1=e^{(t_0-t_1)/T}x(t_0)+Ke^{-t_1/T}\int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta t} e^{\lambda/T}\,d\lambda.$$

В результате интегрирования решение для Δt дается в виде

$$\Delta t=T\ln\left[1+\frac{e^{(t_1-t_0)/T}-x(t_0)}{KT}\right]=T\ln\left[1+\frac{x^0(t_0)-x(t_0)}{KT}\right].$$

Второй иллюстрацией выбора граничных условий на $\alpha(\lambda)$ служат $\alpha_1(t)=\alpha_2(t)=1$, $\alpha_3(t)=\alpha_4(t)=\ldots=\alpha_n(t)=0$, что позволяет решить уравнение (5.10.14) относительно $x_1(t)+x_2(t)$. Конечно, в общем случае для нестационарных систем оно должно решаться моделированием ввиду трудности аналитического решения дифференциальных уравнений с переменными параметрами.

Что касается моделирования, то сопряженную задачу с граничными условиями на $\alpha(\lambda)$ можно свести к задаче с начальными условиями путем замены переменной

$$\lambda=t-t_1. \tag{5.10.15}$$

Так как время λ «течет вперед» от t_0 к t, то t_1 протекает в «обратном направлении» в диапазоне $0\leqslant t_1\leqslant t-t_0$. Граничные условия на $\alpha(\lambda)$ в момент $\lambda=t$ соответствуют граничным условиям на $\alpha(t_1)$ при $t_1=0$. Поэтому они служат начальными условиями при моделировании. При замене независимой переменной

в уравнении (5.10.15) сопряженное уравнение становится равным

$$\frac{d\alpha(t-t_1)}{dt_1} = \mathbf{A}^T(t-t_1)\,\alpha(t-t_1), \tag{5.10.16}$$

где знак минус исчезает при замене переменной.

t_1 — время моделирования (как правило, на аналоговом вычислительном устройстве). Время моделирования t_1, как указано выше, длится от $t_1=0$ до $t_1=t-t_0$. Поэтому метод моделирования наиболее эффективен, когда t ограничено некоторым фиксированным конечным значением T. В этом случае уравнение (5.10.16) принимает вид

$$\frac{d\alpha(T-t_1)}{dt_1} = \mathbf{A}^T(T-t_1)\,\alpha(T-t_1). \tag{5.10.17}$$

Матрица коэффициентов уравнения (5.10.17) является транспонированной по отношению к матрице $\mathbf{A}$ исходной системы, где t заменяется на $T-t_1$. Поэтому данную систему можно моделировать, поменяв местами входы и выходы каждого из элементов схемы моделирования $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ и заменив время t в переменных коэффициентах усиления на $T-t_1$. Это обсуждается далее в следующих двух параграфах.

§ 5.11. Импульсные матричные характеристики

Импульсная матричная характеристика линейной системы характеризует уравнения динамики системы в том смысле, что по данному входному вектору на интервале $(-\infty, t)$ и импульсной матричной характеристике $\mathbf{H}(t, \tau)$ однозначно определяется выходной вектор в момент времени t. Уравнение (5.11.1) представляет векторную форму интеграла совмещения (1.7.2).

$$\mathbf{y}(t) = \int_{-\infty}^{t} \mathbf{H}(t, \lambda)\,\mathbf{v}(\lambda)\,d\lambda. \tag{5.11.1}$$

В такой же форме можно записать уравнение (5.10.7)

$$\mathbf{y}(t) = \int_{-\infty}^{t} \mathbf{C}(t)\,\varphi(t, \lambda)\,\mathbf{B}(\lambda)\,\mathbf{v}(\lambda)\,d\lambda + \mathbf{D}(t)\,\mathbf{v}(t) \tag{5.11.2}$$

или

$$\mathbf{y}(t) = \int_{-\infty}^{t} [\mathbf{C}(t)\,\varphi(t, \lambda)\,\mathbf{B}(\lambda) + U_0(t-\tau)\,\mathbf{D}(t)]\,\mathbf{v}(\lambda)\,d\lambda. \tag{5.11.3}$$

Из сравнения уравнений (5.11.1) и (5.11.3) следует, что импульсная матричная характеристика $\mathbf{H}(t, \tau)$ имеет вид

$$\mathbf{H}(t, \tau) = \begin{cases} \mathbf{C}(t)\varphi(t, \tau)\mathbf{B}(\tau) + U_0(t-\tau)\mathbf{D}(t), & t \geqslant \tau \\ 0, & t < \tau. \end{cases} \tag{5.11.4}$$

Для систем с постоянными параметрами уравнение (5.11.4) можно переписать как

$$\mathbf{H}(t) = \begin{cases} \mathbf{C}\varphi(t)\mathbf{B} + U_0(t)\mathbf{D}, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \tag{5.11.5}$$

Пример 5.11.1. Найти импульсную матричную характеристику RLC-цепи, показанной на рис. 5.5.2, *б*. Входные величины $v_1(t)$ и $v_2(t)$, а выходные — $i_1(t)$ и $i_2(t)$.

Матрица $\mathbf{A}$ этой цепи согласно примеру 5.5.2 равна

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\dfrac{2}{(R_1+R_2)C} & 0 \\ 0 & \dfrac{2R_1R_2}{(R_1+R_2)L} \end{bmatrix}.$$

$\varphi = e^{\mathbf{A}t}$ легко определяется, так как матрица $\mathbf{A}$ диагональная.

В силу симметрии цепи соотношения между элементами матриц связи равны:

$b_{11} = b_{12}$ (v_1 и v_2 оказывают одинаковое действие на $\dot{x}_1$),
$b_{21} = -b_{22}$ (v_1 и v_2 оказывают противоположное действие на $\dot{x}_2$),
$c_{11} = c_{21}$ (x_1 оказывает одинаковое действие на i_1 и i_2),
$c_{22} = -c_{12}$ (x_2 оказывает противоположное действие на i_1 и i_2),
$d_{11} = d_{22}$ (v_1 связан с i_2 так же, как v_2 связан с i_2),
$d_{12} = d_{21}$ (v_1 связан с i_2 так же, как v_2 связан с i_1).

Тогда общее выражение для импульсной матричной характеристики равно

$$\mathbf{H}(t) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{22} \\ c_{11} & -c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{11}(t) & 0 \\ 0 & \varphi_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{11} \\ -b_{22} & b_{22} \end{bmatrix} +$$
$$+ U_0(t) \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{12} & d_{11} \end{bmatrix} = b_{11}c_{11}\varphi_{11}(t) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} +$$
$$+ b_{22}c_{22}\varphi_{22}(t) \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + U_0(t) \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{12} & d_{11} \end{bmatrix}.$$

Матрицы $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ можно получить из уравнений состояния

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{v},$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{v},$$

не прибегая к уравнениям отдельных участков цепи. Метод подобен использованному в примере 5.5.2 для определения элементов $\mathbf{A}$. Отметим, что

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_{11}v_1 + b_{12}v_2$$

при всех t. Предположим, что цепь первоначально находится в покое ($x_1=x_2=v_1=v_2=0$). Если при подаче единичного скачка напряжения v станет равным 1, то $x_1(0+)=x_2(0+)=v_2(0+)=0$, так как напряжение на емкости и ток индуктивности мгновенно измениться не могут. Поэтому

$$b_{11}=-\frac{i_c(0+)}{C}\bigg|_{v_1=U_{-1}(t)}.$$

Это эквивалентно шунтированию емкости и размыканию индуктивности (в этом случае цепь будет состоять из чисто активных элементов), так что

$$b_{11}=-\frac{i_c(t)}{Cv_1(t)}=-\frac{g_{c1}}{C},$$

где g_{c1} — проводимость цепи между входом v_1 и шунтированной емкостью. Поэтому

$$b_{11}=\frac{1}{(R_1+R_2)C}.$$

Подобным образом

$$b_{22}=-\frac{e_L(t)}{Lv_2(t)}=-\frac{\alpha_{L2}}{L},$$

где α_{L2} — коэффициент усиления по напряжению между входом v_2 и разомкнутыми клеммами индуктивности. Емкость и v_1 при этом зашунтированы. Следовательно,

$$b_{22}=-\frac{R_2}{(R_1+R_2)L}.$$

Таким же образом находим

$$c_{11}=\frac{i_1}{x_1},\quad x_2=v_1=v_2=0\quad\text{или}\quad c_{11}=-\frac{1}{R_1+R_2},$$

$$c_{22}=\frac{i_2}{x_2},\quad x_1=v_1=v_2=0\quad\text{или}\quad c_{22}=-\frac{R_2}{R_1+R_2},$$

$$d_{11}=\frac{i_1}{v_1},\quad x_1=x_2=v_2=0\quad\text{или}\quad d_{11}=\frac{1}{R_1+R_2},$$

$$d_{12}=\frac{i_1}{v_2},\quad x_1=x_2=v_1=0\quad\text{или}\quad d_{12}=0.$$

Следовательно,

$$H(t)=\frac{-1}{(R_1+R_2)^2C}\left[e^{-\frac{2t}{(R_1+R_2)C}}\right]\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}+$$
$$+\frac{R_2^2}{(R_1+R_2)^2L}\left[e^{-\frac{2R_1R_2t}{(R_1+R_2)L}}\right]\begin{bmatrix}-1&1\\1&-1\end{bmatrix}+\frac{U_0(t)}{R_1+R_2}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}.$$

Трудности моделирования. В системах управления, применяемых, в частности, в космических исследованиях, ракетостроении, необходимо определить элементы импульсной матричной

характеристики $\mathbf{H}(t, \tau)$ системы с переменными параметрами. Одним из примеров использования служит вычисление среднего квадрата выходных сигналов системы при действии случайных сигналов на входе.

Рассмотрим случай, представленный на рис. 5.11.1, *а*; случайный сигнал $\mathbf{v}(t)$ подается на вход системы с импульсной

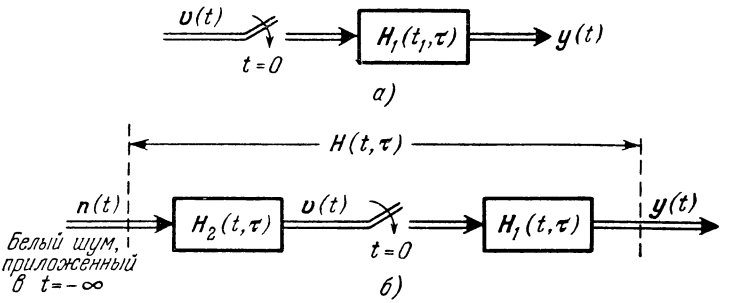


Рис. 5.11.1.

матричной характеристикой $\mathbf{H}(t, \tau)$ в момент $t=0$ путем замыкания ключа. Тогда

$$\mathbf{y}(t) = \int_0^t \mathbf{H}_1(t, \tau)\, \mathbf{v}(\tau)\, d\tau. \tag{5.11.6}$$

Пусть $\mathbf{Y}$ — автокорреляционная матрица $\overline{\mathbf{y}(t)\mathbf{y}^T(t)}$, где черта означает среднее в статистическом смысле. Поэтому

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \bar{y}_1^2 & \overline{y_1 y_2} & \cdots & \overline{y_1 y_p} \\ \overline{y_2 y_1} & \bar{y}_2^2 & \cdots & \overline{y_2 y_p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \overline{y_p y_1} & \overline{y_p y_2} & \cdots & \bar{y}_p^2 \end{bmatrix}. \tag{5.11.7}$$

Подстановка уравнения (5.11.6) дает

$$\mathbf{Y} = \overline{\left[\int_0^t \mathbf{H}_1(t, \tau_1)\, \mathbf{v}(\tau_1)\, d\tau_1\right] \left[\int_0^t \mathbf{v}^T(\tau_2)\, \mathbf{H}_1^T(t, \tau_2)\, d\tau_2\right]}.$$

Так как $\mathbf{H}_1(t, \tau)$ — импульсная характеристика детерминированной системы, то $\mathbf{Y}$ можно записать в виде

$$\mathbf{Y} = \int_0^t \mathbf{H}_1(t, \tau_1) \int_0^t \overline{\mathbf{v}(\tau_1)\mathbf{v}^T(\tau_2)}\, \mathbf{H}_1^T(t, t_2)\, d\tau_2\, d\tau_1. \tag{5.11.8}$$

Уравнение (5.11.8) можно использовать для вычисления среднего квадрата выходов системы в предположении, что известны $\mathbf{H}_1(t, \tau)$ и автокорреляционная матрица $\overline{\mathbf{v}(\tau_1)\mathbf{v}^T(\tau_2)}$, а также, что возможно выполнение операций интегрирования.

Во многих случаях уравнение (5.11.8) оказывается чрезмерно сложным для аналитических расчетов. Например, для нестационарных систем часто невозможно определить в замкнутой форме выражение для $\mathbf{H}_1(t, \tau)$. В подобных случаях для нахождения можно воспользоваться методами моделирования, не прибегая при этом к генераторам случайных сигналов [21]. Наиболее просто использовать эти методы для нахождения $\mathbf{Y}$ в фиксированный момент времени. На этом остановимся в остальной части параграфа.

Основой устранения генераторов случайных сигналов при моделировании служит то, что уравнение (5.11.8) зависит от автокорреляционной матрицы случайных входов, а не от случайных входов как таковых. Поэтому $\mathbf{Y}$ будет одинаковой для рис. 5.11.1, *а* и 5.11.1, *б* при таком выборе формулирующего фильтра, чтобы автокорреляционные матрицы $\mathbf{v}$ в обоих случаях совпадали. В соответствии с рис. 5.11.1, *б*

$$\mathbf{v}(\tau_1) = \int_{-\infty}^{\tau_1} \mathbf{H}_2(\tau_1, \lambda_1)\,\mathbf{n}(\lambda_1)\,d\lambda_1.$$

Тогда

$$\overline{\mathbf{v}(\tau_1)\mathbf{v}^T(\tau_2)} = \int_{-\infty}^{\tau_1} \mathbf{H}_2(\tau_1, \lambda_1) \int_{-\infty}^{\tau_2} \overline{\mathbf{n}(\lambda_1)\mathbf{n}^T(\lambda_2)}\,\mathbf{H}_2^T(\tau_2, \lambda_2)\,d\lambda_2\,d\lambda_1.$$

Так как для белого шума $\overline{\mathbf{n}(\lambda_1)\mathbf{n}^T(\lambda_2)} = \mathbf{N}(\lambda_1)[U_0(\lambda_1 - \lambda_2)]$, то интегрирование по λ_2 приводит к

$$\overline{\mathbf{v}(\tau_1)\mathbf{v}^T(\tau_2)} = \int_{-\infty}^{\tau} \mathbf{H}_2(\tau_1, \lambda_1)\,\mathbf{N}(\lambda_1)\,\mathbf{H}_2^T(\tau_2, \lambda_1)\,d\lambda_1 \qquad (5.11.9)$$

Из интегрального уравнения (5.11.9) можно определить импульсную матричную характеристику формирующего фильтра, необходимую для эквивалентности по отношению к $\mathbf{Y}$ (см. рис. 5.11.1, *а* и 5.11.1, *б*). Это уравнение чрезвычайно просто решается, в особенности в случае стационарных сигналов, когда применимы методы преобразований.

Предполагая надлежащим образом выбранным формирующий фильтр, можно применить затем уравнение (5.11.8) к схеме на рис. 5.11.1, *б*, заменив при этом $\overline{\mathbf{v}(\tau_1)\mathbf{v}^T(\tau_2)}$ и $\mathbf{H}_1(t, \tau)$ соответственно $\overline{\mathbf{n}(\tau_1)\mathbf{n}(\tau_2)}$ и $\mathbf{H}(t, \tau)$. $\mathbf{H}(t, \tau)$ — импульсная матричная

характеристика последовательного соединения формирующего фильтра, ключа и исходной системы. С учетом $\overline{\mathbf{n}(\tau_1)\mathbf{n}^T(\tau_2)} = \mathbf{N}(\tau_1)[U_0(\tau_1-\tau_2)]$ уравнение (5.11.8) применительно к схеме на рис. 5.11.1, *б* дает

$$\mathbf{Y} = \int_{-\infty}^{T} \mathbf{H}(T, \tau)\mathbf{N}(\tau)\mathbf{H}^T(T, \tau)\,d\tau \qquad (5.11.10)$$

(предварительно выполнено интегрирование по τ_2, произведена замена $\tau_1 = \tau$, а результат отнесен к $t = T$). Нижний предел $t = -\infty$ ввиду того, что $\mathbf{n}(t)$ приложен в $t = -\infty$.

Из уравнения (5.11.10) следует, что $\mathbf{Y}$ можно определить путем подачи на схему моделирования не сигнала от источника шумов, а детерминированного мгновенного импульса (или эквивалентных начальных условий), выполнения операций умножения над надлежащими выходами схемы и интегрирования результатов. Предполагается, что выходы схемы моделируют импульсные характеристики надлежащим образом выбранного формирующего фильтра, ключа и исходной системы. Отметим, что наличие ключа делает $\mathbf{H}(t, \tau)$, зависящей от времени даже при постоянных параметрах формирующего фильтра и исходной системы.

Особенно важен тот факт, что переменная интегрирования в уравнении (5.11.10) равна τ. Поэтому моделирование $\mathbf{H}(t, \tau)$ должно проводиться при фиксированном t и переменном τ. Однако непосредственное моделирование $\mathbf{H}(t, \tau)$ ведется при фиксированном τ и переменном t, так как t — текущее время процесса, а τ — момент приложения мгновенного импульса. Поэтому в таком виде моделирование пришлось бы выполнять много раз для различных τ, нанося затем на график данные при фиксированных t и разных τ. Для определения элементов $\mathbf{Y}$ эти данные должны подвергнуться умножению и интегрированию.

С целью иллюстрации «поистине бухгалтерской» задачи, возникающей при непосредственном моделировании, предположим, что система имеет m входов и p выходов. Из уравнения (5.11.1) выражение для $y_i(T)$ равно

$$y_i(T) = \int_{-\infty}^{T} \sum_{j=1}^{m} h_{ij}(T, \lambda)\,v_j(\lambda)\,d\lambda, \quad i = 1, 2, \ldots, p. \qquad (5.11.11)$$

При подаче единичного мгновенного импульса на j-й вход при $\tau \leqslant T$

$$y_i(T) = h_{ij}(T, \tau), \quad T \geqslant \tau, \quad i = 1, 2, \ldots, p. \qquad (5.11.12)$$

Следовательно, единичный мгновенный импульс на j-м входе

образует *столбец* импульсной матричной характеристики при *фиксированном* значении τ. Для получения $h_{ij}(T, \tau)$ при

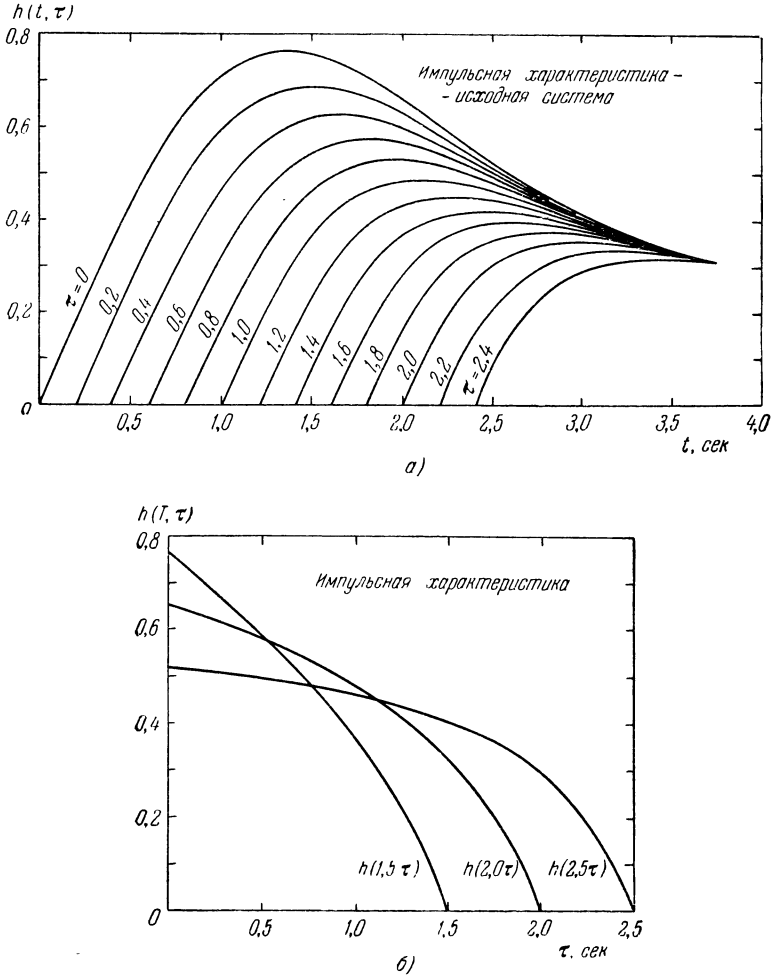


Рис. 5.11.2.

переменном τ следует подавать единичный мгновенный импульс на j-й вход последовательно для различных значений τ.

Импульсная характеристика

$$h(t, \tau) = \int_{\tau}^{t} e^{(\lambda^2 - t^2)/2}\, d\lambda,$$

системы $\ddot{y} + t\dot{y} + y = 0$ показана на рис. 5.11.2. На рис. 5.11.2, *а* изображены результаты моделирования $h(t, \tau)$ в функции t для различных значений τ. На основе их построены $h(t, \tau)$ при фиксированных значениях t (см. рис. 5.11.2, *б*). Подобные операции следует проделать для *каждого* из элементов $h_{ij}(t, \tau)$. Для получения всех столбцов импульсной матричной характеристики описанные этапы моделирования следует выполнить для *каждого* из m входов. Если бы было достаточно 10 этапов моделирования для получения надлежащего числа точек при построении функции τ, то в общем пришлось бы выполнить $10m$ этапов моделирования, в результате чего получим mp множеств кривых типа рис. 5.11.2, *а*. В результате обработки *каждого* из mp множеств кривых мы получили бы mp кривых типа рис. 5.11.2, *б*. Как показано в следующем параграфе, в *модифицированной сопряженной системе* можно получить *строку* импульсной матричной характеристики $\mathbf{H}(t, \tau)$ для фиксированного t и переменной τ в результате *однократного* вычисления.

§ 5.12. Модифицированные сопряженные системы [20—22]

Трудности, связанные с определением импульсной матричной характеристики $\mathbf{H}(t, \tau)$ относительно переменной τ, отмечались в предыдущем параграфе. Это связано с тем, что переменной процесса является t, а не τ. Ввиду того, что переходная матрица состояния сопряженной системы получается из $\boldsymbol{\varphi}(t, \tau)$ (переходной матрицы состояния исходной системы) путем перестановки t и τ и транспонирования, использование транспонированной сопряженной системы, по-видимому, могло бы разрешить указанные трудности*). Это действительно так, если при этом изменить направление оси времени.

Рассмотрим уравнение (5.10.14) при $t = T$ и t_0, равном $-\infty$. Так как $\mathbf{x}(-\infty) = 0$, уравнение принимает вид

$$\boldsymbol{\alpha}^T(T)\,\mathbf{x}(T) = \int_{-\infty}^{T} \boldsymbol{\alpha}^T(\tau)\,\mathbf{B}(\tau)\,\mathbf{v}(\tau)\,d\tau.$$

Теперь предположим, что $\boldsymbol{\alpha}^T(T)$ выбирается равной

$$\boldsymbol{\alpha}^T(T) = [c_{i1}(T) \quad c_{i2}(T) \;\ldots\; c_{in}(T)],$$

*) Термин система используется в этом параграфе для обозначения последовательного соединения формирующего фильтра, ключа и исходной системы (рис. 5.11.1, *б*).

где c_{ij} — указанные элементы матрицы **C** системы. Тогда можно получить *)

$$y_i(T) = [c_{i1}(T) \quad c_{i2}(T) \ \ldots \ c_{in}(T)]\, x(T).$$

Имеем

$$y_i(T) = \int_{-\infty}^{T} \boldsymbol{\alpha}^T(\tau)\, \mathbf{B}(\tau)\, \mathbf{v}(\tau)\, d\tau, \quad \text{если} \quad \boldsymbol{\alpha}(T) = \begin{bmatrix} c_{i1}(T) \\ c_{i2}(T) \\ \vdots \\ c_{in}(T) \end{bmatrix}.$$

Из сравнения этого выражения с i-й строкой

$$\mathbf{y}(T) = \int_{-\infty}^{T} \mathbf{H}(T, \tau)\, \mathbf{v}(\tau)\, d\tau$$

очевидно, что

$$\{\mathbf{H}(T, \tau)\}_{i\text{-я строка}} = \boldsymbol{\alpha}^T(\tau)\, \mathbf{B}(\tau), \tag{5.12.1}$$

если граничные условия сопряженной системы равны

$$\boldsymbol{\alpha}(T) = \begin{bmatrix} c_{i1}(T) \\ c_{i2}(T) \\ \vdots \\ c_{in}(T) \end{bmatrix}. \tag{5.12.2}$$

Чтобы при моделировании сделать эти граничные условия начальными, положим $\tau = T - \tau_1$, как это делалось в уравнении (5.10.15). Тогда, по аналогии с уравнением (5.10.17), будет

$$\frac{d\boldsymbol{\alpha}(T - \tau_1)}{d\tau_1} = \mathbf{A}^T(T - \tau_1)\, \boldsymbol{\alpha}(T - \tau_1). \tag{5.12.3}$$

Уравнения (5.11.10) и (5.12.2) становятся равными

$$\mathbf{Y} = \int_{0}^{\infty} \mathbf{H}(T, T - \tau_1)\, \mathbf{N}(T - \tau_1)\, \mathbf{H}^T(T, T - \tau_1)\, d\tau_1, \tag{5.12.4}$$

$$\{\mathbf{H}(T, T - \tau_1)\}_{i\text{-я строка}} = \boldsymbol{\alpha}^T(T - \tau_1)\, \mathbf{B}(T - \tau_1), \qquad 5.12.5)$$

$$\boldsymbol{\alpha}(0) = \begin{bmatrix} c_{i1}(T) \\ c_{i2}(T) \\ \vdots \\ c_{in}(T) \end{bmatrix}. \tag{5.12.6}$$

*) Матрица **D** предполагается равной нулю; это справедливо для произвольных реальных соединений формирующих фильтров и систем. В противном случае мы получили бы $\overline{y^2(T)}$ равным бесконечности.

Вспоминая из § 5.10, что уравнение (5.12.3) моделируется путем перестановки входов и выходов каждого моделирующего элемента системы $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ и замены времени t в переменных коэффициентах усиления на $T-t_1$, заключаем: моделирование уравнения (5.12.5) производится умножением сопряженных сигналов на $\mathbf{B}(T-t_1)$. Очевидно, что начальные условия сопряженной системы должны соответствовать (5.12.6). Легко видеть,

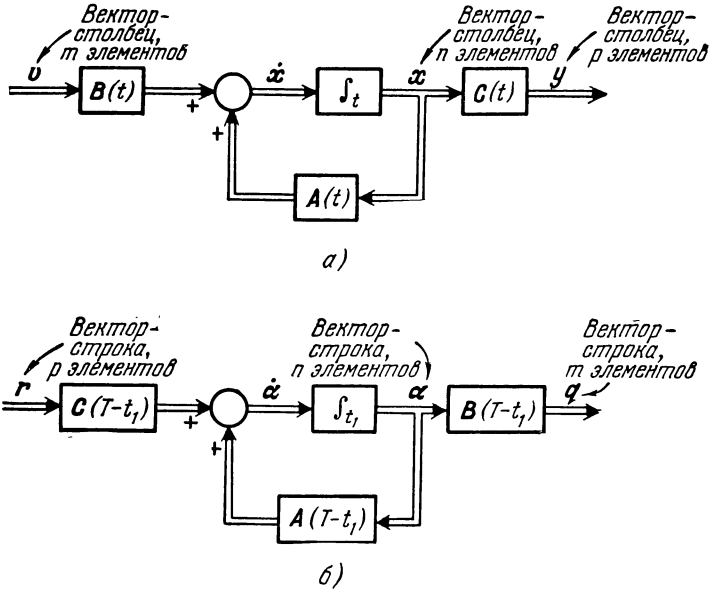


Рис. 5.12.1.

что начальные условия уравнения (5.12.6) устанавливаются при подаче единичного мгновенного импульса в момент $t_1=0$ на элементы с коэффициентами усиления

$$\begin{bmatrix} c_{i1}(T-t_1) \\ c_{i2}(T-t_1) \\ \vdots \\ c_{in}(T-t_1) \end{bmatrix}.$$

Так как $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ — соответственно матрицы входа и выхода исходной системы, то из приведенного выше следует, что i-я строка $\mathbf{H}(T, T-\tau)$ в уравнении (5.12.4) моделируется относительно

переменной τ путем перестановки входов и выходов каждого моделирующего элемента системы

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{v},$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}$$

и замены времени t в переменных коэффициентах усиления на $T - t_1$. Полученная в результате система называется *модифицированной сопряженной системой.* Сравнение с исходной системой дается на рис. 5.12.1.

Если исходная система имеет m входов и p выходов, то модифицированная сопряженная система содержит p входов и m выходов. В результате однократного этапа моделирования модифицированной сопряженной системы получаем m выходных сигналов, которые образуют строку $\mathbf{H}(T, T-\tau)$ (при этом переменная моделирования t равна τ). Та или иная строка матрицы определяется входом схемы моделирования, на который подается единичный мгновенный импульс.

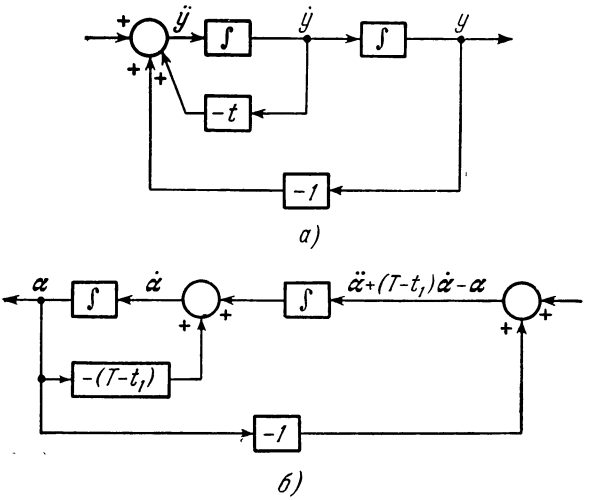


Рис. 5.12.2.

Пример 5.12.1. Для дифференциального уравнения $\ddot{y} + t\dot{y} + y = 0$ на рис. 5.11.2, *а* и 5.11.2, *б* показаны кривые, требуемые для нахождения $h(T, \tau)$. Показать, что модифицированная сопряженная система позволяет получить желаемый результат путем однократного моделирования.

Импульсная характеристика системы равна

$$h(t, \tau) = \begin{cases} \int\limits_{\tau}^{t} e^{(\lambda^2 - t^2)/2}\, d\lambda, & \tau \leqslant t, \\ 0, & \tau > t. \end{cases}$$

В результате подстановки T вместо t и замены переменной $\tau = T - \tau_1$ импульсная характеристика $h(T, T-\tau_1)$ получается равной

$$h(T,\ T-\tau_1) = \begin{cases} \int\limits_{T-\tau_1}^{T} e^{(\lambda^2-T^2)/2}\, d\lambda, & \tau_1 \geqslant 0, \\ 0, & \tau_1 < 0. \end{cases}$$

Схема моделирования исходного уравнения показана на рис. 5.12.2, *а*. Поэтому модифицированная сопряженная система имеет схему, изображенную

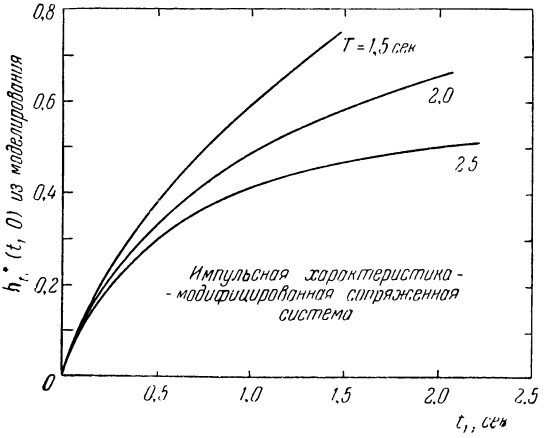


Рис. 5.12.3.

на рис. 5.12.2, *б*. Дифференциальное уравнение, соответствующее рис. 5.12.2, *б*, равно

$$\ddot{\alpha} + (T - t_1)\,\dot{\alpha} = 0.$$

Реакция модифицированной сопряженной системы на мгновенный импульс в момент $t_1 = 0$ получается из решения

$$\ddot{\alpha} + (T - t_1)\,\dot{\alpha} = U_0(t_1).$$

Пусть $w = \dot{\alpha}$. Для $t_1 > 0$

$$\dot{w} + (T - t_1)\,w = 0, \quad w(0) = 1.$$

Поэтому

$$w(t_1) = \dot{\alpha} = \exp\left(\frac{t_1^2}{2} - Tt_1\right), \quad t_1 \geqslant 0.$$

Тогда

$$\alpha(t_1) = \int\limits_0^{t_1} \exp\left(\frac{\beta^2}{2} - T\beta\right) d\beta, \quad t_1 \geqslant 0.$$

Пусть $\beta = T - \lambda$. Тогда импульсная характеристика модифицированной сопряженной системы $h^*(t_1, 0)$ принимает вид

$$h^*(t_1, 0) = \alpha(t) = \int_{T-t_1}^{T} e^{(\lambda^2 - T^2)/2}\, d\lambda, \quad t_1 \geqslant 0.$$

При замене t_1 на τ_1 это выражение совпадает с выражением $h(T, T-\tau_1)$.

Таким образом, импульсная характеристика модифицированной сопряженной системы, *наблюдаемая относительно оси* t_1, в точности совпадает

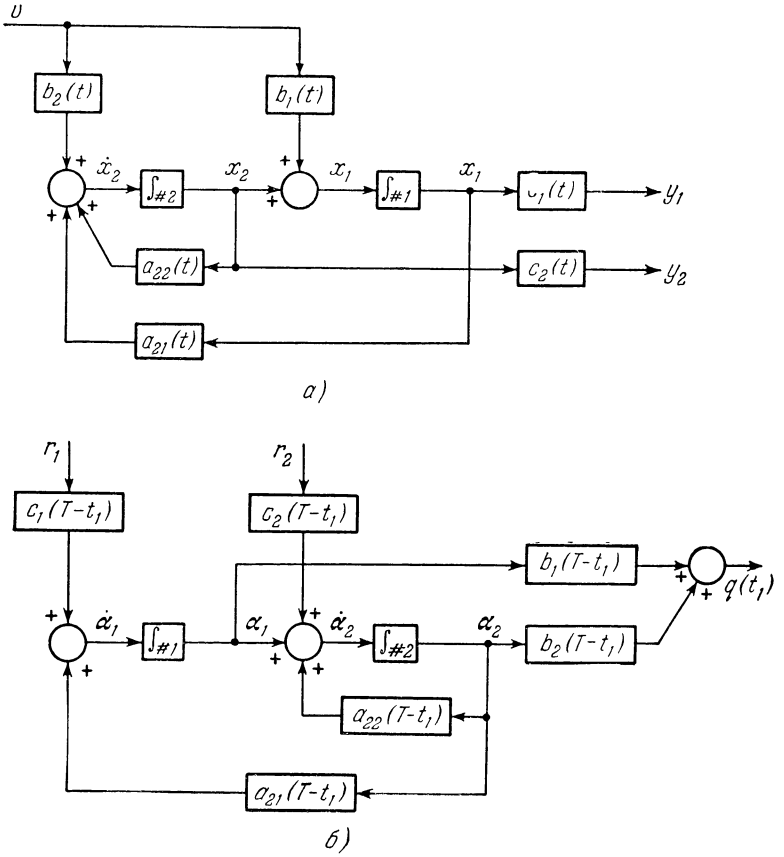


Рис. 5.12.4.

с импульсной характеристикой исходной системы, *наблюдаемой относительно* оси τ_1. Однако здесь ось t_1 — это ось времени *наблюдения* за процессом вычислений, тогда как ось τ_1 — ось моментов времени *подачи* мгновенных импульсов. Следовательно, моделирование относительно оси t_1 приводит к тем же результатам, что дают графические построения относительно оси τ_1. Это

показано на рис. 5.12.3, где изображен ряд кривых моделирования $h^*(t_1, 0)$. Отметим, что при замене оси τ рис. 5.11.2, *б* на $\tau = T - \tau_1$ эти кривые совпали бы с кривыми рис. 5.12.3. Значит, в модифицированной сопряженной системе путем однократного моделирования достигается то, что требует многократного моделирования в исходной системе.

Пример 5.12.2. Матрицы **A**, **B** и **C** данной системы равны

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1(t) & 0 \\ 0 & c_2(t) \end{bmatrix}.$$

Схема моделирования системы показана на рис. 5.12.4, *а*. Построить схему модифицированной сопряженной системы. $\mathbf{H}(t, \tau) = \mathbf{C}(t)\varphi(t, \tau)\mathbf{B}(\tau)$; поэтому размерность $\mathbf{H}(t, \tau) - (2 \times 1)$, т. е. две строки и один столбец. При воздействии единичного мгновенного импульса в момент времени $\tau = \tau_i$ появятся сигналы y_1 и y_2 — «возбуждаются все элементы» $\mathbf{H}(t, \tau_i)$ (так как $\mathbf{H}(t, \tau)$ — матрица-столбец). Однако это соответствует переменной t и фиксированной $\tau = \tau_i$.

При перестановке входов и выходов схемы моделирования и замене переменной $t = T - t_1$ получим схему на рис. 5.12.4, *б*. Отметим, что перестановке подлежит каждая из пар входных и выходных клемм. Это позволяет производить быструю проверку (частичную) правильности схемы моделирования сопряженной системы. Векторное дифференциальное уравнение этой системы имеет вид

$$[\dot{\alpha}_1 \;\; \dot{\alpha}_2] = [\alpha_1 \;\; \alpha_2] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{21}(T - t_1) & a_{22}(T - t_1) \end{bmatrix} + [r_1 \;\; r_2] \begin{bmatrix} c_1(T - t_1) & 0 \\ 0 & c_2(T - t_1) \end{bmatrix}$$

или

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}^T = \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{A}(T - t_1) + \mathbf{r}^T \mathbf{C}(T - t_1),$$

$$\mathbf{q} = \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{b}(T - t_1).$$

Если на *один* из входов в момент $t = 0$ подать единичный мгновенный импульс, то выход $\mathbf{q}(t_1)$ представляет *строку* (в данном случае один элемент) импульсной характеристики $\mathbf{H}(T, T - t_1)$ исходной системы. Следовательно, для нахождения двух строк импульсной матричной характеристики моделирование следует проводить два раза.

Задачи

5.1. Начертить схему моделирования для следующих систем:

(*a*) $\ddot{y} + 3\dot{y} + 5y = v$,

(*b*) $\ddot{y} + 3\dot{y} + 5y = \ddot{v} + 2\dot{v} + v$,

(*c*) $\ddot{y}_1 + 3\dot{y}_1 + 2y_2 = v_1 + 2\dot{v}_2 + 2v_2$,
$\ddot{y}_2 + 4\dot{y}_1 + 3y_2 = \ddot{v}_2 + 3\dot{v}_2 + v_1$.

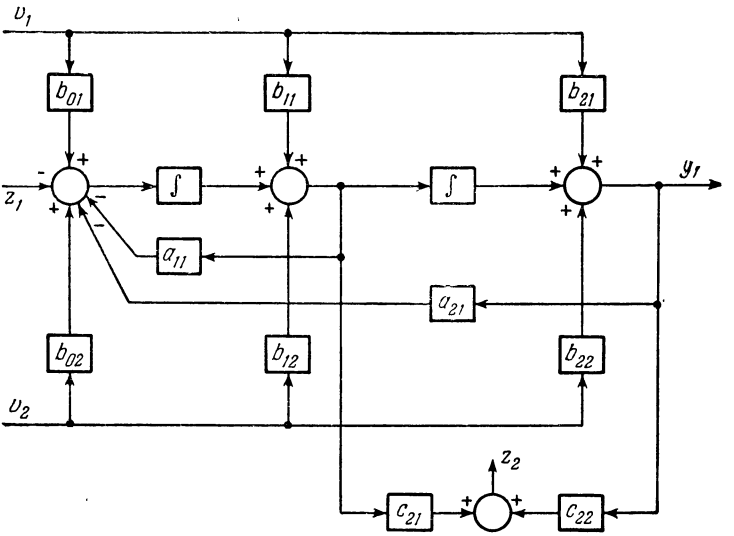
5.2. Каковы дифференциальные уравнения системы, показанной на рисунке?

5.3. Начертить схему моделирования для следующих дифференциальных уравнений:

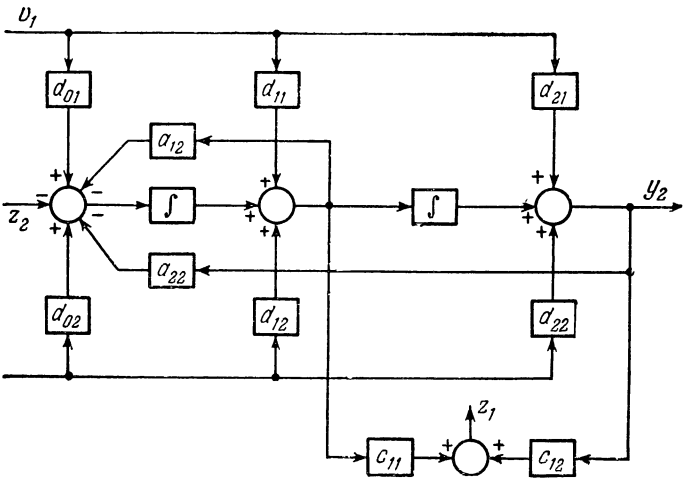
(a) $\ddot{y} + k\dot{y} + (\omega^2 + e\cos t)\, y = v$ ($\cos t$ сформировать моделированием)

(b) $\ddot{y} + y^2\dot{y} + 5y = v$.

5.4. Показать, что схема моделирования на рисунке удовлетворяет уравнению (5.5.3).



К задаче 5.2.



К задаче 5.2 (продолжение).

5.5. Найти передаточную матричную функцию и начертить блок-схему систем, приведенных ниже. Пояснить выбор количества требуемых интеграторов.

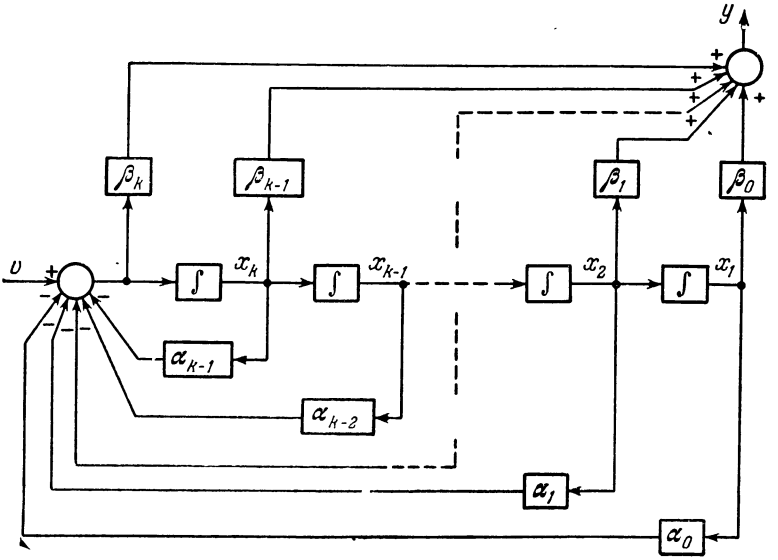
(*a*) $\ddot{y}_1 + 3\dot{y}_1 + 2y_1 = \dot{v}_1 + 2v_1 + \dot{v}_2 + v_2,$
$\dot{y}_2 + 2y_2 = -\dot{v}_1 - 2v_1 + v_2;$

(*b*) $\dot{y}_1 + y_1 = v_1 + 2v_2,$
$\ddot{y}_2 + 3\dot{y}_2 + 2y_2 = \dot{v}_2 + v_2 - v_1;$

(*c*) $\ddot{y}_1 + 2\dot{y}_2 + y_1 = \dot{v}_1 + v_1 + v_2,$
$\ddot{y}_2 + \dot{y}_1 + y_2 = v_2 + v_1;$

(*d*) $\ddot{y}_1 + 3\dot{y}_1 + 2y_1 = 3\dot{v}_1 + 4\dot{v}_2 + 8v_2,$
$\dot{y}_2 + 3y_2 - 4y_1 - \dot{y}_1 = \dot{v}_1 + 2\dot{v}_2 + 2v_2.$

5.6. Написать в векторной форме дифференциальное уравнение для системы, показанной на рис. к задаче 5.4, относительно указанных на схеме переменных состояния.



К задаче 5.4.

5.7. Написать векторные уравнения для систем в задаче 5.5.

5.8. На основе метода разложения на элементарные дроби найти векторные уравнения для следующих систем. Показать, что их можно определить путем преобразования координат уравнений, полученных методами построения схем моделирования.

(*a*) $\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = v,$

(*b*) $\dddot{y} + 4\ddot{y} + 5\dot{y} + 2y = v,$

(*c*) $\dddot{y} + 4\ddot{y} + 6\dot{y} + 4y = v,$

(*d*) $\ddot{y}_1 - 10\dot{y}_2 + y_1 = v_1,$
$\dot{y}_2 + 6y_2 = v_2.$

5.9. Найти общее выражение для элементов матрицы $\mathbf{A}(t)$ цепи RLC при условии, что индуктивности и емкости являются функциями времени.

5.10. Данная система описывается дифференциальным уравнением с переменными параметрами

$$p^n y + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{n-k}(t)\, p^k y = \sum_{k=0}^{n} \beta_{n-k}(t)\, p^k v.$$

Показать, что уравнения состояния системы имеют вид

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & \cdot & \dots & -\alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix} v,$$

$$y = x_1 + b_0 v,$$

где

$$b_0(t) = \beta_0(t),$$

$$b_i(t) = \beta_i(t) - \sum_{r=0}^{i-1} \sum_{m=0}^{i-r} \binom{n+m-i}{n-i} \alpha_{i-r-m}(t)\, p^m b_r(t).$$

5.11. Построить схему моделирования системы, описываемой дифференциальным уравнением с переменными параметрами

$$t^2 \frac{d^3 y}{dt^3} + (\cos t) \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + (\sin t)\, y = t^3 \frac{d^2 v}{dt^2} + (\cos t) \frac{dv}{dt} + v.$$

Написать векторное уравнение $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{v}$.

5.12. Используя метод разложения на элементарные дроби (пренебречь d_0), полагая

$$Y(s) = \sum_{i=1}^{n} X_i(s),$$

где $x_i(t)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению $\dot{x}_i - \lambda_i x_i = b_i v(t)$, найти соответствующие **A**, **B** и **C**.

5.13. Повторно решить задачу 5.12 для случая кратного полюса порядка k. Показать, что единицы в матрице Жордана заменяются b_i/b_{i-1}, $i = 2, \dots, k$.

5.14. Найти при помощи каждого из пяти описанных методов переходную матрицу состояния для следующих систем:

(*a*) $\ddot{y} + 4\dot{y} + 3y = 0,$

(*b*) $\ddot{y} + 2\dot{y} + y = 0,$

(*c*) $\ddot{y} + 2\dot{y} + 2y = 0,$

(*d*) $\dddot{y} + 4\ddot{y} + 6\dot{y} + 4y = 0.$

5.15. Предположим, что к системам, описанным в задаче 5.14 *a*, *b* и *c*, приложен единичный ступенчатый сигнал. Какова выходная величина $y(t)$?

5.16. Предположим, что входной сигнал, $\cos \omega t$ приложен к системе задачи 5.14, *c*. Какова выходная величина $y(t)$? Какой частоте ω соответствует максимальная амплитуда $y(t)$? Может ли $y(t)$ стать неограниченной?

5.17. Можно показать, что в окрестности рабочей точки ($N = 1$, $C = 1$, $R=0$) линеаризованные уравнения динамики ядерного реактора имеют вид

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + x_3,$$
$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2,$$
$$\dot{x}_3 = Kx_1,$$

где $x_1=N-1$, $x_2=C-1$, $x_3=R$; N — номинальная мощность; R — номинальная реактивность; C — номинальная концентрация медленных нейтронов; K — номинальный температурный коэффициент реактивности. Найти переходную матрицу состояния линеаризованной системы уравнений. При каких значениях K система устойчива? Что можно сказать об относительных величинах свободных движений $N(t)$, $R(t)$ и $C(t)$ при заданной области начальных условий?

5.18. Показать, что общий вид $\alpha_i(t)$ в уравнении (5.6.3) равен $c_i e^{\lambda_i t}$ (подставить уравнение (5.6.3) в (5.6.1), использовать уравнение (5.6.2), а также независимость характеристических векторов).

5.19. Показать, что в результате подстановки уравнения (5.6.3) в (5.6.1) и использования двойственного базиса можно получить решение задачи 5.18.

5.20. Для системы, определяемой дифференциальным уравнением $\ddot{y}+5\dot{y}+6y=f(t)$, проделать этапы, указанные в примере 5.6.1. Проверить результат, используя метод преобразования Лапласа. Какой должна быть вынуждающая функция, чтобы возбуждалась лишь одна частота?

5.21. Доказать выражение (5.6.10), раскладывая $\mathbf{f}(t)$ в бесконечный ряд единичных импульсных функций.

5.22. Доказать выражение (5.6.14).

5.23. Предположим, что вынуждающая функция линейной системы с постоянными параметрами имеет вид

$$\mathbf{f}(t) = \mathrm{Re}\left[\mathbf{g}e^{j\omega t}\right],$$

где $\mathbf{g}$ — действительный вектор, а ω — угловая частота вынуждающей функции. Показать, что выход системы описывается выражением

$$\mathbf{x}(t) = \mathrm{Re}\sum_{i=1}^{n}\frac{\langle \mathbf{r}_i, \mathbf{g}\rangle}{\lambda_i - j\omega}\left(e^{\lambda_i t} - e^{j\omega t}\right)\mathbf{u}_i.$$

Показать, что при отрицательных действительных частях у всех λ_i в установившемся режиме амплитуда колебаний i-й частоты равна

$$\left|\frac{\langle \mathbf{r}_i, \mathbf{g}\rangle}{j\omega - \lambda_i}\right|$$

для действительных λ_i и равна

$$\left|\frac{\langle \mathbf{r}_i, \mathbf{g}\rangle}{j\omega - \lambda_i}\mathbf{u}_i + \frac{\langle \mathbf{r}_i^*, \mathbf{g}\rangle}{j\omega - \lambda_i^*}\mathbf{u}_i^*\right|$$

(в плоскости $\mathbf{u}'\mathbf{u}''$) для комплексных λ_i.

5.24. Используя результаты примера 5.23, показать, что в случае комплексных λ_i ($\lambda_i=-\alpha_i+j\beta_i$) и $\beta_i \gg \alpha_i$ выражение для амплитуды установившегося режима при $\beta_i \approx \omega$ получается из выражения для амплитуды, когда λ_i — действительные и отрицательные. Каковы условия получения «максимальной» амплитуды установившихся колебаний для отдельной частоты системы?

5.25. (*a*) Показать, что $e^{\mathbf{A}t}$ представляется в виде

$$\sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t} \mathbf{u}_i \rangle \langle \mathbf{r}_i,$$

если характеристические числа $\mathbf{A}$ различные. Это разложение называется спектральным представлением $e^{\mathbf{A}t}$.

(*b*) Так как для невозбужденной системы $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)$, показать, что $\mathbf{x}(t)$ равно

$$\sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{x}(0) \rangle e^{\lambda_i t} \mathbf{u}_i.$$

5.26. (*a*) Показать, что переходную матрицу состояния $e^{\mathbf{A}t}$ можно найти при помощи модальной матрицы, так как $e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{M}e^{\Lambda t}\mathbf{M}^{-1}$, где $\mathbf{A}$ — постоянная матрица. Почему преобразование $\mathbf{x} = \mathbf{M}(t)\mathbf{q}$ неособенно эффективно для системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$?

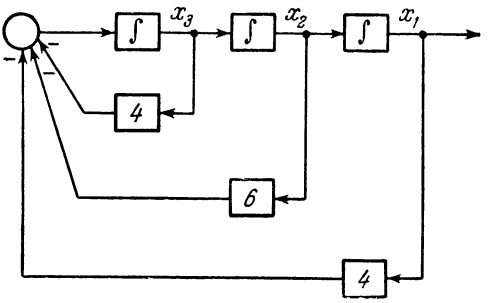
(*b*) Используя результат пункта (*a*), показать, что общее решение векторного дифференциального уравнения $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{v}$ задается в виде

$$\mathbf{x}(t) = \int_{-\infty}^{t} \mathbf{M}e^{\Lambda(t-\lambda)}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{v}(\lambda)\, d\lambda.$$

(*c*) Используя результат пункта (*b*) и тот факт, что столбцы $\mathbf{M}$ являются характеристическими векторами $\mathbf{u}_i$, а строки $\mathbf{M}^{-1}$ — векторами $\mathbf{r}_i$ двойственного базиса, показать, что

$$\mathbf{x}(t) = \int_{-\infty}^{t} \sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{B}\mathbf{v}(\lambda) \rangle e^{\lambda_i (t-\lambda)} \mathbf{u}_i\, d\lambda.$$

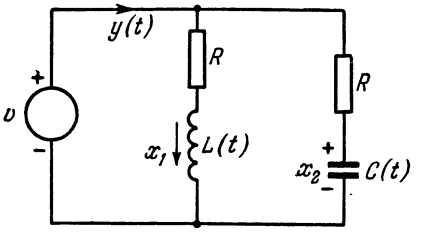
5.27. Преобразование переходной матрицы состояния имеет вид $\mathbf{\Phi}(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}$. Почему преобразование обратной переходной матрицы состояния $\mathbf{\Phi}^{-1}(s)$ *не равно* $[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]$?



К задаче 5.28.

5.28. Для системы, изображенной на рисунке, на основе метода разложения на частоты определить реакцию $\mathbf{x}(t)$, обусловленную начальными условиями, и проверить результаты при помощи переходной матрицы состояния.

5.29. Рассмотрим цепь из постоянных сопротивлений, показанную на рисунке, где $L(t)/C(t)=R^2$; $L(t)$, $C(t)>0$. Пусть $v(t)$ — источник напряжения, x_1 — поток через индуктивность ($x_1=Li_L$), x_2 — заряд на емкости ($x_2=Cv_C$), $y(t)$ — ток в цепи. Выберем переменными состояния $x_1'=(x_1+x_2)/2$, $x_2'=(x_1-x_2)/2$. Записать дифференциальные уравнения для x_1' и x_2' и показать, что $x_1'\in S^c$, а $x_2'\in S^o$.



К задаче 5.29.

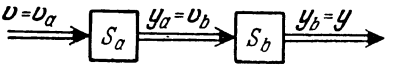
5.30. Рассмотрим следующие две наблюдаемые и управляемые подсистемы: $\dot{x}_1=\alpha_1 x_1+v(t)$, $\dot{x}_2=\alpha_2 x_2+v(t)$. Каким условиям должна удовлетворять система, образованная параллельным соединением этих двух подсистем (так что $y=x_1-x_2$), чтобы она была управляемой и наблюдаемой?

5.31. Для последовательного соединения, изображенного на рисунке, показать, что [8]

(*a*) $n=n_a+n_b$,

(*b*) $\lambda_1, \ldots, \lambda_n=\lambda_{1a}, \ldots, \lambda_{na}, \lambda_{1b}, \ldots, \lambda_{nb}$,

(*c*) Необходимым (но недостаточным) условием управляемости (наблюдаемости) S является управляемость (наблюдаемость) S_a и S_b.



К задаче 5.31.

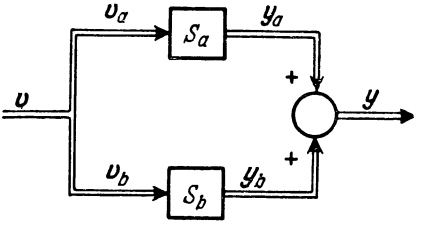
(*d*) Если как S_a, так и S_b управляемые (наблюдаемые), то неуправляемые (ненаблюдаемые) частоты S обусловливаются S_b (S_a).

5.32. Для параллельного соединения, изображенного на рисунке, показать, что [8]

(*a*) $n=n_a+n_b$,

(*b*) $\lambda_1, \ldots, \lambda_n=\lambda_{1a}, \ldots, \ldots, \lambda_{na}, \lambda_{1b}, \ldots, \lambda_{nb}$.

(*c*) Необходимым и достаточным условием управляемости (наблюдаемости) S является управляемость (наблюдаемость) S_a и S_b.



К задаче 5.32.

5.33. Показать, что передаточную функцию $\mathbf{H}(s)$ системы можно записать как [8]

$$\mathbf{H}(s)=\sum_{i=1}^{n^*}\frac{\mathbf{K}_i}{s-\lambda_i^*}+\mathbf{D},$$

где индекс * указывает S^*, а ранг матриц $\mathbf{K}_i$ равен единице.

Указание. Начать с выражения $\mathbf{H}(s)=\mathbf{C\Phi B}+\mathbf{D}$, где $\mathbf{\Phi}=[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}$.

5.34. Рассмотрим систему

$$\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\mathbf{v},\quad \mathbf{y}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\mathbf{x}.$$

(*a*) Найти реакцию системы $\mathbf{x}$ на $\mathbf{x}(0)$, $\mathbf{v}(t)=0$. воспользовавшись частотной интерпретацией. Начертить траектории для различных начальных условий в «модальной» плоскости q_1, q_2 и плоскости x_1, x_2.

(*b*) Исследовать управляемость и наблюдаемость системы.

5.35. Рассмотрим линейную систему с постоянными параметрами

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{v},$$
$$\mathbf{y}=\mathbf{C}\mathbf{x}+\mathbf{D}\mathbf{v}.$$

Среди характеристических чисел $\mathbf{A}$ есть кратные.

(*a*) Предположим, что жорданова форма $\mathbf{A}$ равна $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}=\mathbf{J}$ (диагональной матрице размерности (2×2) с равными элементами) и что остальные матрицы имеют вид $\mathbf{B}(2\times2)$, $\mathbf{C}(2\times2)$, $\mathbf{D}=[0]$. Начертить блок-схему системы относительно новых переменных состояния $\mathbf{q}=\mathbf{M}^{-1}\mathbf{x}$. Как упростится результат, если размерность $\mathbf{C}(1\times2)$? Начертить упрощенную блок-схему для

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=[0\ \ 1].$$

(*b*) Предположим, что жорданова форма $\mathbf{A}$ равна $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}=\mathbf{J}$ — матрице размерности (2×2) с единицей над главной диагональю (и равными диагональными элементами). $\mathbf{B}(2\times1)$, $\mathbf{C}(1\times2)$, $\mathbf{D}=[0]$. Начертить блок-схему системы относительно новых переменных состояния $\mathbf{q}=\mathbf{M}^{-1}\mathbf{x}$.

(*c*) Начертить блок-схему для

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=[0\ \ 1].$$

Исследовать управляемость и наблюдаемость этой системы.

5.36. Рассмотрим неустойчивую систему

$$\dot{x}=x+v,\quad |v|\leqslant 1,$$
$$y=x.$$

(*a*) Найти область фазового пространства, в которой система является управляемой.

(*b*) Найти минимальное время, требуемое для перехода из состояния области управляемости в начало координат.

5.37. Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1=-\frac{7}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{4}{3}x_3+2v(t),$$
$$\dot{x}_2=\frac{2}{3}x_1-\frac{8}{3}x_2,$$
$$\dot{x}_3=x_1-x_2-2x_3-v(t),$$
$$y(t)=\frac{2}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3.$$

(*a*) Найти переходную матрицу состояния $\varphi(t)$.

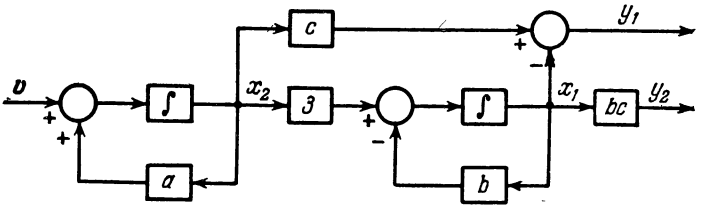
(*b*) Предположим, что заданы $x_1(0)$, $x_2(0)$, $x_3(0)$ и $v(t)=0$. Выразить $x(t)$ через частоты системы.

(*c*) Произвести замену переменных состояния $\mathbf{x}=\mathbf{M}\mathbf{q}$ так, чтобы новые переменные состояния были «развязаны». Начертить блок-схему системы относительно «новых» переменных состояния.

(*d*) Исследовать управляемость и наблюдаемость, а также расчленить систему на S^*, S^0, S^c и S^f.

5.38. Рассмотрим систему на рисунке.

(*a*) Написать векторное дифференциальное уравнение, описывающее систему, выбирая в качестве переменных состояния выходы интеграторов.



К задаче 5.38.

(*b*) a и b — постоянные параметры. Построить в плоскости параметров a и b области, в которых система полностью управляемая, частично управляемая и полностью неуправляемая.

(*c*) Предположим, что a — фиксированная величина. Построить в плоскости параметров b и c области, в которых система полностью управляемая, частично наблюдаемая и полностью ненаблюдаемая.

5.39. Найти переходную матрицу состояния для следующих систем:

(*a*) $\dot{y} + ty = v,$

(*b*) $\dot{y} + y/t = v,$

(*c*) $\ddot{y} + t\dot{y} + y = v,$

(*d*) $t^2\ddot{y} + t\dot{y} + y = v,$

(*e*) $\ddot{y} - (1/t)\,\dot{y} + [1 + (1/t^2)]\,y = v.$

5.40. Доказать, что если $\varphi(t, \tau)$ — решение уравнения

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{x},$$

то

$$|\varphi(t, \tau)| = |\varphi(0, \tau)| \exp \int_0^t \text{след}\,\mathbf{A}(\lambda)\,d\lambda.$$

Что можно заключить из этого выражения об условиях неособенности $\varphi(t, \tau)$, необходимых для существования ее обратной матрицы? Какова связь с независимостью решений?

Указание. Найти определитель Вронского $w(t)$ и показать, что дифференциальное уравнение для определителя Вронского ($w(t) = |\varphi(t, \tau)|$) имеет вид $\dot{w} = (\text{след}\,\mathbf{A})\,w$.

5.41. Найти $\varphi^{-1}(t, \tau)$ для системы в задаче 5.39. Показать, что $\varphi^{-1}(t, \tau) = \varphi(\tau, t)$. Показать его эквивалентность линейному сопряженному дифференциальному оператору.

5.42. Какой физический смысл перестановки строк и столбцов, выражаемой уравнением (5.9.29)?

5.43. Показать, что если $\mathbf{C}$ — неособенная матрица и T — действительное отличное от нуля число, то для системы с периодическими коэффициентами существует такая матрица $\mathbf{B}$, что $\mathbf{C} = \exp \mathbf{B}T$.

5.44. Решение уравнения $\ddot{y} + p_1(t)\dot{y} + p_2(t)y = 0$ (уравнение Хилла), где $p_1(t)$ и $p_2(t)$ — непрерывные периодические функции времени (период равен T), удовлетворяющее $y(t+T) = \lambda y(t)$, где λ — *характеристический множитель*, — называется нормальным решением. Показать, что если $y_1(t)$ и $y_2(t)$ —

заданный базис действительных решений этого уравнения, то

$$y_1(t+T) = a_{11}y_1(t) + a_{12}y_2(t),$$
$$y_2(t+T) = a_{21}y_1(t) + a_{22}y_2(t),$$

так что для существования нетривиальных решений системы

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{21} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

5.45. Используя результат задачи 5.44, показать, что

$$\lim_{t\to\infty} |y(t)| = \infty, \quad |\lambda| > 1, \qquad \lim_{t\to\infty} |y(t)| = 0, \quad |\lambda| < 1.$$

Периодические решения существуют при $\lambda = \pm 1$.

5.46. При каких условиях уравнение $\ddot{y} + p(t)y = 0$, где $p(t)$ — непрерывная функция с периодом T, имеет периодические решения?

5.47. Переходная матрица состояния системы удовлетворяет уравнению

$$\varphi(t+T, \tau) = \varphi(t, \tau)\,\mathbf{\Lambda} \quad (\mathbf{\Lambda} = \mathbf{C} = e^{\mathbf{B}T}),$$

где $\mathbf{\Lambda}$ — диагональная матрица, состоящая из характеристических множителей. Показать, что периодические решения существуют только в том случае, если диагональные элементы $\lambda_i = \pm 1$. Показать, что при $\lambda_i = 1$ период решения равен T. Показать, что при $\lambda_i = -1$ период решения равен $2T$.

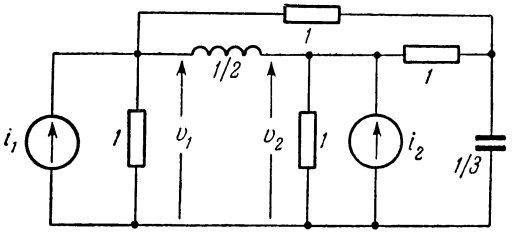
5.48. Найти импульсную матричную характеристику системы задачи 5.5.

5.49. Найти импульсную матричную характеристику систем задачи 5.14.

5.50. Для систем с приводимыми ниже матрицами **A**, **B**, **C** и **D** на основе схемы моделирования найти импульсную матричную характеристику. Проверить решение, используя уравнение (5.11.5).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \;\; 1], \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

5.51. Найти импульсную матричную характеристику для RLC-цепи, изображенной на рисунке.



К задаче 5.51.

5.52. Найти импульсную матричную характеристику системы

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v},$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

5.53. Получить уравнение (5.10.7), используя метод «вариации параметров» § 5.8.

5.54. (*a*) Найти $\mathbf{H}(s)$ для следующих систем и исследовать их управляемость и наблюдаемость:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \mathbf{v}, \qquad \mathbf{y} = [-2 \;\; 1 \;\; 0]\,\mathbf{x}.$$

(*b*) Показать, что пересечение пространств, соответствующих управляемости и наблюдаемости, является пространством, определяемым передаточной матричной функцией.

5.55. Показать, что импульсная матричная характеристика $\mathbf{H}(t, \tau)$ реализуется конечномерной динамической системой в том и только в том случае, если существуют такие две непрерывные матрицы $\mathbf{P}(t)$ и $\mathbf{Q}(t)$, что

$$\mathbf{H}(t, \tau) = \mathbf{P}(t)\,\mathbf{Q}(\tau) \quad \text{для всех} \quad t, \tau.$$

Указание. См. § 2.8.

5.56. Импульсная матричная характеристика (при фиксированном T) системы

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\,\mathbf{v},$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}(t)\,\mathbf{x}$$

имеет вид

$$\mathbf{H}(T, \tau) = \begin{cases} \mathbf{C}(T)\,\varphi(T, \tau)\,\mathbf{B}(\tau), & T \geqslant \tau, \\ 0, & T < \tau. \end{cases}$$

(*a*) Показать, что импульсная матричная характеристика сопряженной системы

$$\dot{\alpha} = -\alpha\mathbf{A}(t) + \mathbf{v}\mathbf{C}(t) \quad (\alpha \text{ и } \mathbf{q} - \text{векторы-строки}),$$
$$\mathbf{q} = \alpha\mathbf{B}(t),$$

равна

$$\mathbf{H}^*(t, T) = \begin{cases} \mathbf{C}(T)\,\varphi(T, t)\,\mathbf{B}(t), & t \geqslant T, \\ 0, & t < T. \end{cases}$$

(*b*) Показать, что если заменить переменную $t_1 = T - t$ в сопряженной системе и переменную $\tau_1 = T - \tau$ в исходной системе, то

$$\mathbf{H}^*(t_1, 0) = \begin{cases} \mathbf{C}(T)\,\varphi(T, T - t_1)\,\mathbf{B}(T - t_1), & t_1 \geqslant 0, \\ [0], & t_1 < 0 \end{cases}$$

и

$$\mathbf{H}(T, T - \tau_1) = \begin{cases} \mathbf{C}(T)\,\varphi(T, T - \tau_1)\,\mathbf{B}(T - \tau_1), & \tau_1 \geqslant 0, \\ [0], & \tau_1 < 0. \end{cases}$$

(*c*) Используя результат пункта *b*, показать, что наблюдение реакции модифицированной сопряженной системы относительно оси t_1 (переменной схемы моделирования) эквивалентно наблюдению в момент T реакции исходной системы, рассматриваемой относительно оси τ_1. Дополнительно показать, что мгновенный импульс, приложенный к одному из входов сопряженной системы, позволяет получить *строку* искомой импульсной матричной характеристики.

(*d*) Показать, что из предыдущих пунктов следует, что модифицированная сопряженная система получается из исходной путем перестановки ее входов и выходов и замены переменной $t = T - t_1$.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. L. A. Zadeh and C. A. Desoer, Linear System Theory — The State Space Approach, McGraw-Hill Book Co., New York, 1963, стр. 23—31.
2. Ibid., стр. 311—326.
3. B. Friedland, O. Wing and R. Ash, Principles of Linear Networks, McGraw-Hill Book Co., 1961, стр. 58—64.
4. R. E. Kalman, Canonical Structure of Linear Dynamical Systems, Proc. Natl. Acad. Sci., Vol. 48, No. 4, April, 1962, стр. 596—600.
5. R. E. Kalman, Y. C. Ho and K. S. Narendra, Controllability of Linear Dynamical Systems, Contrib. Differential Equations, Vol. 1, No. 2, 1962, стр. 189—213.
6. Y. C. Ho, What Constitutes a Controllable System, IRE Trans. Auto. Control, Vol. AC-7, No. 3, April 1962, стр. 76.
7. E. B. Lee, On the Domain of Controllability for Linear Systems, IRE Trans. Auto, Control, Vol. AC-8, No 2, April 1963. стр. 172—173.
8. E. G. Gilbert, Controllability and Observability in Multivariable Control Systems, J. Soc. Ind. Appl. Math.-Control Ser., Ser. A, Vol. 1, No. 2, 1963, стр. 128—151.
9. I. M. Horowitz, Synthesis of Linear, Multivariable Feedback Control Systems, IRE Trans. Auto, Control, Vol. AC-5, No. 2, June 1960, стр. 94—105.
10. R. E. Kalman, Mathematical Description of Linear Dynamical Systems, J. Soc. Ind. Appl. Math. — Control Ser., Ser. A, Vol. 1, No. 2, 1963, стр. 152—192.
11. E. A. Coddington and N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations, McGraw-Hill Book Co., New York, 1955, Chapter 3.
12. R. A. Struble, Nonlinear Differential Equations, McGraw-Hill Book Co., New York, 1962, Chapter 4.
13. B. K. Kinariwala, Analysis of Time Varying Networks, IRE Inter. Conv. Record, 1961, Pt. 4, стр. 268—276.
14. L. A. Pipes, Matrix Methods for Engineering, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1963, pp. 90—92.
15. B. Friedman, Principles and Techniques of Applied Mathematics, John Wiley and Sons, New Yorl., 1956, стр. 43.
16. Conddington and Levinson, op. cit., стр. 65.
17. Stuble, op. cit., стр. 64.
18. Coddington and Levinson, op. cit., стр. 80.
19. L. A. Pipes, J. Appl. Phys., Vol. 25, стр. 1179—1185.
20. M. Issac, Deterministic and Stochastic Response of Linear Time — Variable Systems, General Electric, LMED Technical Report, No. R262 EMLI, March 1962.
21. Д. Х. Лэнинг, Р. Г. Бэттин, Случайные процессы в задачах автоматического управления, гл. 6, ИЛ, 1958.
22. R. Sussman, A Method of Solving Linear Problems by Using the Adjoint System, Internal Tech. Memor. No. M-2, Electronics Research Laboratory, University of California, Berkeley, California.

ГЛАВА 6

ПЕРЕМЕННЫЕ СОСТОЯНИЯ И ЛИНЕЙНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ

§ 6.1. Введение

В этой главе подход с позиций переменных состояния рассматривается для описываемых линейными уравнениями дискретных процессов. Наибольшее внимание уделяется импульсным системам. Показывается также, что использование переменных состояния весьма эффективно для линейных последовательностных систем, естественно возникающих из теории кодирования. В этом плане подход с позиций переменных состояния является общим подходом, распространяющимся как на непрерывные, так и на дискретные системы.

Теория линейных дискретных систем тесно примыкает к теории линейных непрерывных систем. Поэтому многое из рассматриваемого в этой главе базируется на материале предшествующих глав. Отмечается сходство теории линейных непрерывных и теории линейных дискретных систем.

§ 6.2. Схемы моделирования

Основными звеньями, необходимыми для построения блок-схемы системы, описываемой линейными разностными уравнениями, служат суммирующее звено, усилительное звено и звено задержки. Сумматор и усилитель — те же звенья, что и в непрерывных системах; блок задержки для разностных уравнений в некотором смысле аналогичен интегрирующему блоку для дифференциальных уравнений. Этот блок показан на рис. 6.2.1. Его входная величина равна $y(kT+T)$, а соответствующая выходная — $y(kT)$, т. е. входной сигнал звена задержки появляется на выходе спустя один период, или запаздывает на T. Следует отметить, что на практике очень трудно реализовать звенья запаздывания такого порядка, который обычно необходим для систем управления, — и система в действительности редко моделируется при помощи этого метода в реальном масштабе времени.

Рис. 6.2.1.

Для последовательностных цепей, где переменные либо существуют непосредственно в двоичной форме либо принимают дискретные значения, подобное моделирование можно выполнять в реальном масштабе времени.

В используемом для построения блок-схемы линейных разностных уравнений методе предполагается, что переменная $y(nT + kT)$ доступна измерению; эту переменную последовательно пропускаем через звенья задержки, пока не получим $y(kT)$. Замыкание блок-схемы производится из условия удовлетворения данному разностному уравнению.

Пример 6.2.1. Построить блок-схему системы, описываемой разностным уравнением

$$y(kT + 2T) + ay(kT + T) + by(kT) = v(kT).$$

Первый этап состоит в представлении $y(kT+2T)$ в виде

$$y(kT + 2T) = v(kT) - ay(kT + T) - by(kT).$$

Члены $y(kT+T)$ и $y(kT)$ получаем, как показано на рис. 6.2.2, *а*. В предположении, что звенья задержки идеальные (не вносящие искажений), сигнал

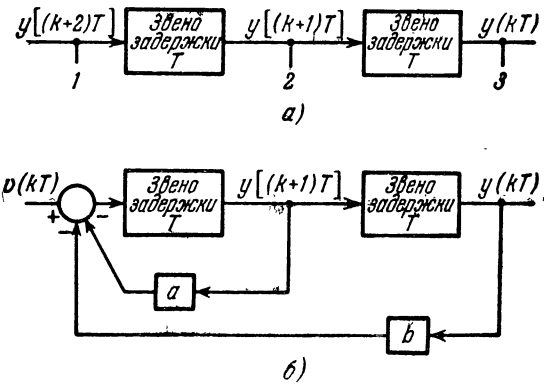


Рис. 6.2.2.

на клеммах *2* будет на один период, а на кламмах *3* — на два периода позже, чем на клеммах *1*. Подобным образом, сигнал на клеммах *2* появляется на клеммах *3* спустя один период. Полная блок-схема (рис. 6.2.2, *б*) получается из условия удовлетворения данному разностному уравнению.

Если начальные условия задаются в виде $y(0)$, $y(T)$, то $y(0)$ — начальное значение выхода первого звена задержки, а $y(T)$ — начальное значение выхода второго звена задержки. Спустя период $y(T)$ появится на выходе первого звена задержки. Спустя два периода выход первого звена задержки будет равен $y(2T) = v(0) - ay(T) - by(0)$.

Из сравнения рис. 5.2.2, *б* и 6.2.2, *б* очевидно, что правила построения блок-схем аналогичны как для разностных, так и дифференциальных уравнений. Интегратор, используемый при моделировании дифференциальных уравнений, аналогичен звену задержки, используемому при моделировании разностных уравнений.

Пример 6.2.2. Построить блок-схему для разностного уравнения n-го порядка

$$y(nT+kT)+\alpha_{n-1}y(nT+kT-T)+\ldots+\alpha_0 y(kT)=$$
$$=\beta_n v(nT+kT)+\beta_{n-1}v(nT+kT-T)+\ldots+\beta_0 v(kT).$$

Схема моделирования данной системы построена по аналогии с рис. 5.5.4 на рис. 6.2.3. Величины блок-схемы описываются уравнениями (5.5.7) и (5.5.8).

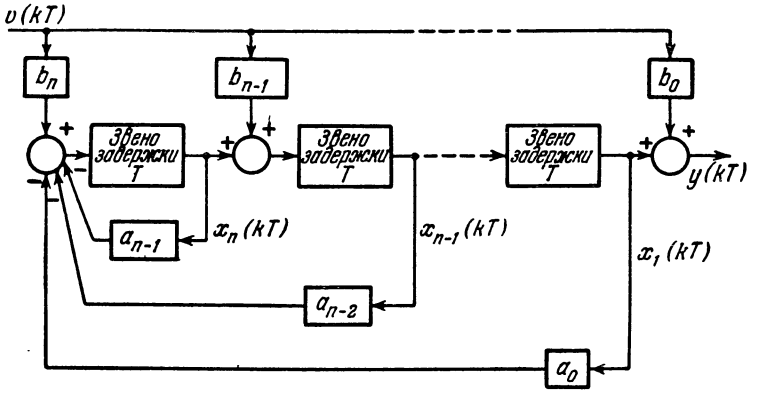


Рис. 6.2.3.

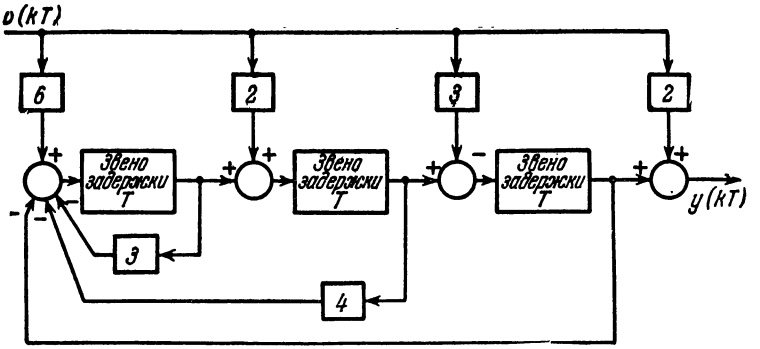


Рис. 6.2.4.

Для частного случая разностного уравнения

$$y(kT+3T)+3y(kT+2T)+4y(kT+T)+y(kT)=$$
$$=2v(kT+3T)+3v(kT+2T)+v(kT+T)+2v(kT)$$

имеем

$$b_0=\beta_n=2,$$
$$b_1=\beta_{n-1}-\alpha_{n-1}b_0=-3,$$
$$b_2=\beta_{n-2}-\alpha_{n-1}b_1-\alpha_{n-2}b_0=2,$$
$$b_3=\beta_{n-2}-\alpha_{n-1}b_2-\alpha_{n-2}b_1-\alpha_{n-3}b_0=6.$$

Схема моделирования этой системы показана на рис. 6.2.4. Из сравнения этой схемы со схемой рис. 5.5.5 видно, что единственное различие между ними состоит в том, что интеграторы на рис. 5.5.5 заменены здесь звеньями задержки.

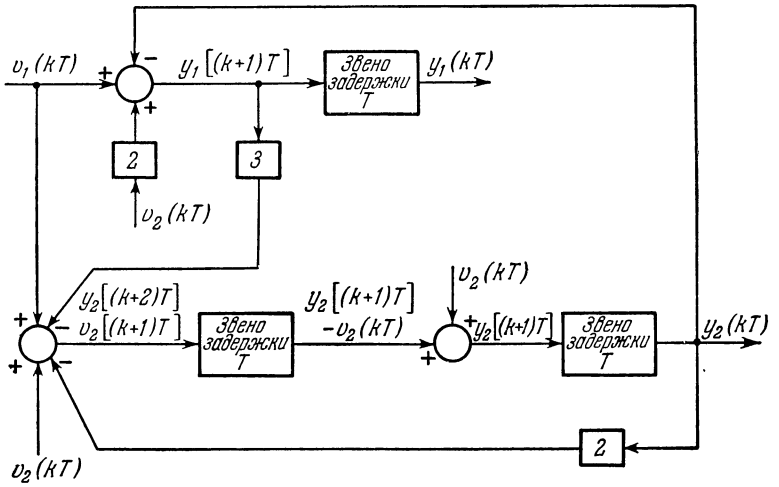


Рис. 6.2.5.

Пример 6.2.3. Построить схему моделирования системы, описываемой разностными уравнениями

$$y_1(kT+T)+y_2(kT)=v_1(kT)+2v_2(kT),$$
$$y_2(kT+2T)+3y_1(kT+T)+2y_2(kT)=v_2(kT+T)+v_2(kT)+v_1(kT).$$

Эти уравнения можно переписать в виде

$$y_1(kT+T)=v_1(kT)+2v_2(kT)-y_2(kT),$$
$$y_2(kT+2T)-v_2(kT+T)=v_2(kT)+v_1(kT)-3y_1(kT+T)-2y_2(kT).$$

Используя в качестве входа одной цепи задержки $y_2(kT+2T)-v_2(kT+T)$, получим блок-схему, изображенную на рис. 6.2.5. Подход подобен применяемому для непрерывных систем.

§ 6.3. Передаточные матричные функции

Передаточная функция $H(z)$ дискретной системы с одним входом и выходом равна отношению z-преобразований входных и выходных сигналов системы. Подобным образом определяется передаточная функция между различными входами и выходами многосвязной системы. Поэтому

$$H_{ij}(z)=\frac{Y_i(z)}{V_j(z)};\quad V_k(z)=0,\quad k\neq j, \tag{6.3.1}$$

где $Y_i(z)$ — z-преобразование i-го выхода, а $V_j(z)$ — z-преобразование j-го входа.

Передаточная матричная функция представляет собой просто упорядоченный набор этих передаточных функций (i обозначает строку, а j обозначает столбец, где расположена $H_{ij}(z)$). Если известна передаточная матричная функция $\mathbf{H}(z)$, то преобразование выходного вектора $\mathbf{Y}(z)$ задается выражением

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{H}(z)\mathbf{V}(z) \quad \text{(начальные условия предполагаются равными нулю)}, \tag{6.3.2}$$

где $\mathbf{V}(z)$ — матрица-столбец z-преобразования вектора входа $\mathbf{v}(kT)$.

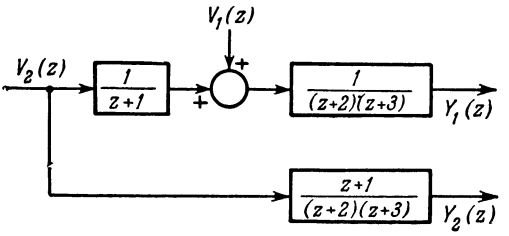


Рис. 6.3.1.

Пример 6.3.1. Найти передаточную матричную функцию системы с двумя входами и выходами, описываемой разностными уравнениями

$$y_1(kT+3T) + 6y_1(kT+2T) + 11y_1(kT+T) + 6y_1(kT) = \\ = v_1(kT+T) + v_1(kT) + v_2(kT),$$

$$y_2(kT+2T) + 5y_2(kT+T) + 6y_2(kT) = v_2(kT+T) + v_2(kT).$$

Предполагая нулевыми начальные условия, в результате z-преобразования обеих частей этих уравнений получим

$$(z^3+6z^2+11z+6)\,Y_1(z) = (z+1)\,V_1(z) + V_2(z),$$

$$(z^2+5z+6)\,Y_2(z) = (z+1)\,V_2(z).$$

Учитывая $z^3+6z^2+11z+6=(z+1)(z+2)(z+3)$ и $z^2+5z+6=(z+2)(z+3)$, имеем

$$H_{11}(z) = \frac{1}{(z+2)(z+3)}; \qquad H_{12}(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)(z+3)};$$

$$H_{21}(z) = 0; \qquad H_{22}(z) = \frac{z+1}{(z+2)(z+3)},$$

или

$$\mathbf{H}(z) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(z+2)(z+3)} & \dfrac{1}{(z+1)(z+2)(z+3)}, \\ 0 & \dfrac{(z+1)}{(z+2)(z+3)} \end{bmatrix}.$$

Блок-схема, соответствующая этой передаточной функции, показана на рис. 6.3.1.

Пример 6.3.2. Найти передаточную матричную функцию системы, описываемой разностными уравнениями

$$y_1(kT+2T)+y_1(kT+T)+y_2(kT+T)=v_1(kT+T)+v_1(kT)+v_2(kT),$$
$$y_2(kT+T)+y_1(kT)=v_2(kT).$$

Преобразуя обе части этих уравнений, при нулевых начальных условиях получим

$$(z^2+z)\,Y_1(z)+zY_2(z)=(z+1)\,V_1(z)+V_2(z),$$
$$Y_1(z)+zY_2(z)=V_2(z).$$

Решение относительно $Y_1(z)$ и $Y_2(z)$:

$$Y_1(z)=\frac{z+1}{z^2+z-1}V_1(z),$$
$$Y_2(z)=\frac{V_2(z)}{z}-\frac{z+1}{z(z^2+z+1)}V_1(z).$$

Передаточная матричная функция

$$\mathbf{H}(z)=\begin{bmatrix}\dfrac{z+1}{z^2+z-1} & 0\\ \dfrac{-(z+1)}{z(z^2+z-1)} & \dfrac{1}{z}\end{bmatrix}.$$

Блок-схема, соответствующая данной передаточной функции, изображена на рис. 6.3.2.

Звено задержки представляется согласно преобразованию Лапласа в виде e^{-sT}, что соответствует $1/z$ в z-области. Поэтому интегратор, представляемый в непрерывных системах как $1/s$,

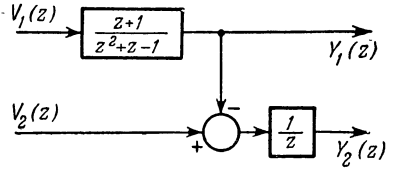


Рис. 6.3.2.

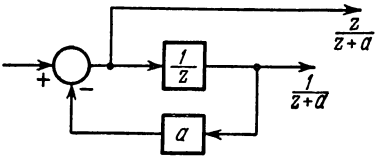


Рис. 6.3.3.

аналогичен в схемах дискретных систем звену задержки. Таким образом, передаточные функции $1/(z+a)$ и $z/(z+a)$ получаются так же, как и в непрерывных системах (рис. 6.3.3).

Здесь уместно указать на замечания, отмеченные в § 5.3. Операции только с передаточной матричной функцией могут привести к неправильным выводам о порядке системы, так как передаточная функция описывает лишь управляемую и наблюдаемую части системы. В результате этого некоторые свойства реальной системы остаются невыявленными.

§ 6.4. Понятие состояния [1]

Состояние системы можно схематично охарактеризовать как минимальную информацию о системе, необходимую для определения при известной входной функции ее выхода, а также ее состояний в будущем. Точнее, совокупность переменных $\mathbf{x}$ образует вектор состояния системы, если можно найти такие две однозначные функции $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$, что

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(kT+T) &= \mathbf{f}[\mathbf{x}(kT),\ \mathbf{v}(kT)], \\ \mathbf{y}(kT) &= \mathbf{g}[\mathbf{x}(kT),\ \mathbf{v}(kT)], \end{aligned} \tag{6.4.1}$$

где $\mathbf{y}(kT)$ — выходной вектор в момент времени kT, а $\mathbf{v}(kT)$ — входной вектор в момент времени kT. Интересно отметить, что эти условия были получены независимо Хаффманом и Муром в результате исследования близких, но различных проблем [2, 3].

При последующем изложении в качестве вектора состояния системы большей частью выбираются выходы звеньев задержки в схеме моделирования. Подобный выбор удобен и эффективен.

Пример 6.4.1. Емкостный накопитель на рис. 6.4.1 устроен таким образом, что напряжение на емкости ступенчато увеличивается в моменты появления прямоугольных импульсов [4]. Предположим, что первоначально емкость C_2 не заряжена. Первый входной прямоугольный импульс заряжает C_1 через диод D_1 до напряжения V_0. При отсутствии импульса заряд на C_1 распределяется между C_1 и C_2 обратно пропорционально их емкостям. Второй импульс снова заряжает C_1 до напряжения V_0, но последующий добавочный заряд на C_2 будет меньше, чем от первого импульса, из-за оставшегося на нем предыдущего заряда. Очевидно, что при действии на входе прямоугольных импульсов изменение напряжения на емкости C_2 со временем должно асимптотически уменьшаться. Произвести оценку этих изменений и проверить, что напряжение на C_2 является переменной состояния.

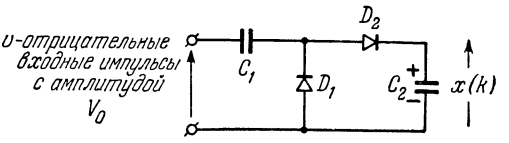


Рис. 6.4.1.

Если $x(k)$ — напряжение на емкости C_2 после действия k-го входного импульса, то разностное уравнение относительно $x(k)$, записываемое на основе принципа сохранения зарядов, имеет вид $C_1V_0+C_2x(k)=(C_1+C_2)x(k+1)$, или

$$x(k+1)-\left(\frac{C_2}{C_1+C_2}\right)x(k)=\frac{C_1V_0}{C_1+C_2}.$$

Решая это уравнение обычным образом, как указывалось в § 2.12, получим

$$x(k)=V_0\left[1-\left(\frac{C_2}{C_1+C_2}\right)^k\right].$$

Следовательно, напряжение на емкости увеличивается скачкообразно, как изображено на рис. 6.4.2. Высота ступени записывается так:

$$x(k+1)-x(k)=V_0\left(\frac{C_1}{C_1+C_2}\right)\left(\frac{C_2}{C_1+C_2}\right)^k.$$

Состояние этой цепи определяется напряжением на емкости $x(k)$. Отметим, что состояние здесь принимает только дискретные значения. Состояние

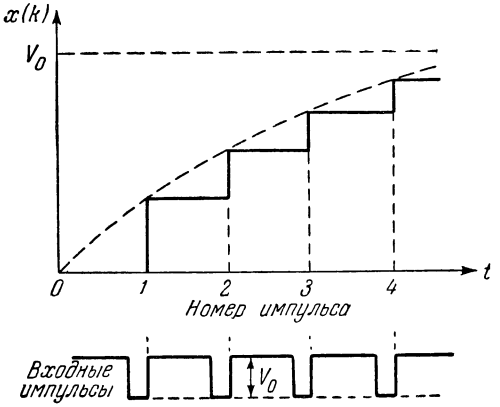


Рис. 6.4.2.

Тождества Буля

и	или
$0 \cdot 0 = 0$ $0 \cdot 1 = 0$ $1 \cdot 0 = 0$ $1 \cdot 1 = 1$	$0 + 0 = 0$ $0 + 1 = 1$ $1 + 0 = 1$ $1 + 1 = 1$
Отрицание	
$\bar{0} = 1$	$\bar{1} = 0$

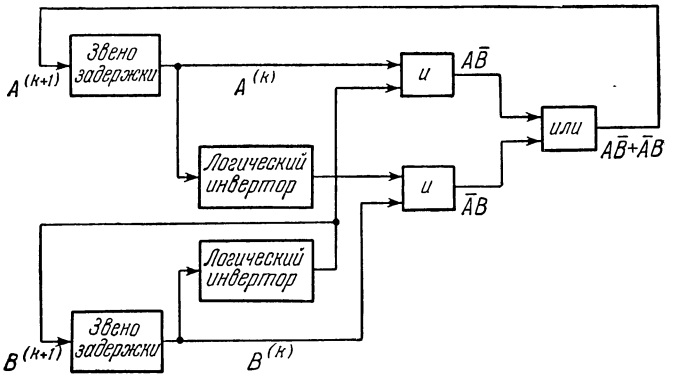


Рис. 6.4.3.

системы $x(k+1)$ в последующий момент времени единственным образом определяется ее состоянием и значением входного сигнала в данный момент времени. В общем виде состояния данной системы задаются уравнениями (6.4.1),

В рассматриваемом случае $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ — линейные однозначные скалярные функции.

Пример 6.4.2 [5]. Счетчик по mod 4 спроектирован таким образом, что его цикл образуют 00, 01, 10, 11, 00. Схема этого устройства изображена на рис. 6.4.3, и читатель, знакомый с последовательностными цепями, может удостовериться, что эта схема работает циклически, как указано выше. Выходы элементов задержки характеризуют состояние системы, а также ее выходные величины. Написать уравнения состояния.

Логические уравнения этого счетчика обычно записывают в виде

$$\mathbf{A}^{(k+1)T} = (\mathbf{A}\overline{\mathbf{B}} + \overline{\mathbf{A}}\mathbf{B})^{kT},$$
$$\mathbf{B}^{(k+1)T} = (\overline{\mathbf{B}})^{kT},$$

где индексы обозначают моменты времени, а не показатели степени. Это автономная последовательностная цепь, уравнения состояния которой равны

$\mathbf{x}[(k+1)T] = \mathbf{f}[x(kT)]$ $\mathbf{x}$ — состояние (выходы элементов задержки),

$\mathbf{y}[(kT)] = \mathbf{g}[x(kT)]$ $\mathbf{y}$ — выход (выходы элементов задержки).

§ 6.5. Представление линейных уравнений состояния при помощи матриц

Общий вид уравнений состояния многосвязной дискретной системы задается (6.4.1) уравнением

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[(k+1)T] &= \mathbf{f}[\mathbf{x}(kT),\ \mathbf{v}(kT)], \\ \mathbf{y}(kT) &= \mathbf{g}[\mathbf{x}(kT),\ \mathbf{v}(kT)]. \end{aligned} \tag{6.5.1}$$

В случае линейной системы уравнение (6.5.1) записывается в виде системы линейных разностных векторных уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[(k+1)T] &= \mathbf{A}(kT)\,\mathbf{x}(kT) + \mathbf{B}(kT)\,\mathbf{v}(kT), \\ \mathbf{y}(kT) &= \mathbf{C}(kT)\,\mathbf{x}(kT) + \mathbf{D}(kT)\,\mathbf{v}(kT). \end{aligned} \tag{6.5.2}$$

$\mathbf{A}(kT)$, $\mathbf{B}(kT)$, $\mathbf{C}(kT)$ и $\mathbf{D}(kT)$ — изменяющиеся во времени матрицы. В случае стационарной системы эти матрицы постоянные

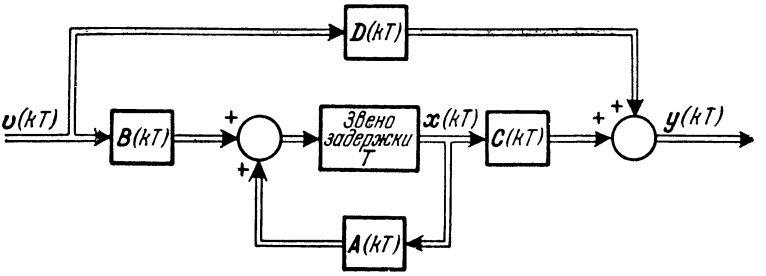


Рис. 6.5.1.

и записываются как $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$. Общая блок-схема системы, сходная с рис. 5.5.1, изображена на рис. 6.5.1.

Для системы, описываемой разностными уравнениями n-го порядка, выражения типа (6.5.2) можно получить, заменив данные уравнения системой разностных уравнений первого порядка.

Пример 6.5.1. Представить разностное уравнение второго порядка

$$y[(k+2)T]+ay[(k+1)T]+by(kT)=v(kT)$$

(см. рис. 6.2.2, *б*) в виде системы разностных уравнений первого порядка.

Пусть

$$y(kT)=x_1(kT),$$

$$y[(k+1)T]=x_1[(k+1)T]=x_2(kT).$$

Тогда

$$\begin{bmatrix} x_1(kT+T) \\ x_2(kT+T) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}v(kT),$$

$$y(kT)=[1\quad 0]\begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix}.$$

Переменные $x_1(kT)$ и $x_2(kT)$, являющиеся выходами звеньев задержки, характеризуют состояние системы. В соответствии с общей формой уравнения (6.5.2)

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix},\qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}=[1\quad 0],\qquad \mathbf{D}=[0].$$

Пример 6.5.2. В примере 6.2.2 приведен общий вид разностного уравнения n-го порядка. Схема моделирования дана на рис. 6.2.3. Найти матрицы **A**, **B**, **C** и **D**.

По аналогии с непрерывным случаем матрицы данной системы **A**, **B**, **C**, **D** задаются уравнением (5.5.9).

Линейные двоичные последовательностные цепи *). Интересное приложение находит подход с позиций переменных состояния при анализе линейных двоичных последовательностных цепей. Линейная двоичная последовательностная цепь состоит из «чистых» звеньев задержки и функций суммирования по модулю 2. Функция суммирования по модулю 2 является логической функцией «исключенное или», имеющей логическое уравнение $f=(x_1+x_2)\overline{x_1x_2}=\bar{x}_1x_2+x_1\bar{x}_2$. Выходом такого сумматора служит нуль в случае одинаковых входов x_1 и x_2 и единица, если входы различные. Несмотря на то, что рассмотрение ограничивается цепями по модулю 2, подобный анализ можно провести и для цепей с модулем p [6—8]. Данные линейные модульные последовательностные цепи нашли определенное применение в корректирующих кодах, схемах вычислительных устройств и в отдельных типах радиолокационных систем [9].

*) Читателям, совершенно не знакомым с последовательностными цепями, данный раздел следует пропустить.

С целью иллюстрации использования переменных состояния при анализе линейных двоичных последовательностных цепей рассмотрим цепь на рис. 6.5.2. Эта цепь состоит из четырех звеньев задержки (сдвигающий регистр из четырех элементов)

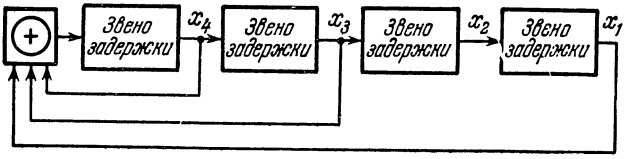


Рис. 6.5.2.

и одной функции суммирования по модулю 2 (логическая цепь «исключенное или»). Уравнения этой цепи равны

$$x_1(k+1) = x_2(k),$$
$$x_2(k+1) = x_3(k),$$
$$x_3(k+1) = x_4(k),$$
$$x_4(k+1) = x_4(k) \oplus x_3(k) \oplus x_1(k),$$

или, в матричной форме,

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) \bmod 2.$$

Последовательность состояний данной цепи равна $\mathbf{x}(0)$, $\mathbf{A}\mathbf{x}(0)$, $\mathbf{A}^2\mathbf{x}(0), \ldots$ Если матрица $\mathbf{A}$ неособенная, то каждое из состояний $\mathbf{x}(k)$ единственным образом определяется предшествующим состоянием $\mathbf{x}(k-1)$. Для цепей с модулем 2 определитель $|\mathbf{A}|$ равен единице или нулю. В данном примере $|\mathbf{A}| = 1$, так что $\mathbf{A}$ — неособенная матрица, а потому существует и обратная матрица $\mathbf{A}^{-1}$,

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Так как система содержит четыре переменных состояния, каждая из которых принимает значение нуль или единица, то возможное число состояний системы $2^4 = 16$. Следовательно, последовательность состояний (отсчитываемая от начального

состояния) либо стремится к состоянию равновесия, определяемому как $\mathbf{x}(k+1)=\mathbf{x}(k)$, либо изменяется периодически с периодом $P \leqslant 15$. Тривиальный случай, когда все переменные состояния равны нулю, называется нулевым состоянием. Все другие состояния равновесия называются финитными состояниями равновесия.

Рассмотрим случай, при котором система приходит в устойчивое состояние. Предполагается, что матрица $\mathbf{A}$ неособенная, так что $\mathbf{A}^k$ не равна нулевой матрице. Это исключает возможность перехода из ненулевого начального состояния в нулевое. В случае финитного равновесия $\mathbf{x}(k+1)=\mathbf{A}\mathbf{x}(k)=\mathbf{x}(\mathrm{k})$. Так как $(\mathbf{A}-\mathbf{I})\mathbf{x}(k)=\mathbf{0}$, то для существования равновесия необходимо, чтобы характеристическое уравнение $|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}|=0$ имело по крайней мере один корень, равный единице. Для цепи на рис. 6.5.2 характеристическое уравнение равно $\lambda^4+\lambda^3+\lambda^2+1=0 \bmod 2$. Его можно разложить на множители $(\lambda+1)(\lambda^3+\lambda+1)=0 \bmod 2$. Следовательно, характеристическое уравнение имеет один корень, равный единице, и существуют начальные состояния, из которых данная цепь приходит в состояние равновесия. Одно из таких начальных состояний равно $\mathbf{x}(0)=(1, 1, 1, 1)$.

Если состояния цепи последовательно изменяются с периодом P, то

$$\mathbf{x}(k+P)=\mathbf{A}^P\mathbf{x}(k)=\mathbf{x}(k) \bmod 2.$$

В этом случае $|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}^P|=0 \bmod 2$ должно иметь по крайней мере один корень, равный единице. Целое число P определяется как наименьшее целое, удовлетворяющее $\mathbf{A}^P=\mathbf{I} \bmod 2$. Если λ^P-1 делится без остатка на характеристический многочлен $p(\lambda)$, то $\lambda^P-1=p(\lambda)q(\lambda)$, где частное от деления — многочлен $q(\lambda)$. Следовательно, $\mathbf{A}^P-\mathbf{I}=\mathbf{P}(\mathbf{A})\mathbf{Q}(\mathbf{A})=[0] \bmod 2$ и $\mathbf{A}^P=\mathbf{I} \bmod 2$. Таким образом, определение длины минимальной периодической последовательности цепи состоит в нахождении такого наименьшего целого числа P, что λ^P-1 делится на $p(\lambda)$ без остатка. Для рассматриваемой задачи длина минимальной периодической последовательности равна семи. Типичная последовательность имеет вид

$$\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Класс цепей порядка n, у которых минимальная длина периодической последовательности равна 2^n-1, называется це-

пями с максимальным периодом. Необходимым и достаточным условием существования в цепи только последовательностей с максимальным периодом является то, что характеристический многочлен должен быть неприводимым и не служить делителем $\lambda^k - 1$, $k < 2^n - 1$ (неприводимым считается такой многочлен $f(\lambda)$, который нельзя разложить на множители вида $h(\lambda)g(\lambda)$,

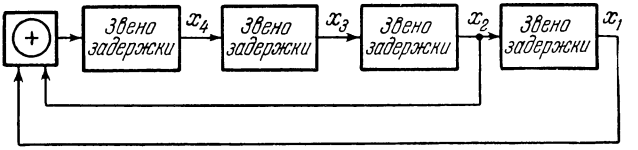


Рис. 6.5.3.

за исключением тривиального случая, где $g(\lambda)$ — постоянная величина). Цепь на рис. 6.5.3 имеет только последовательности с максимальным периодом. Уравнения этой цепи имеют вид

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k),$$

$$p(\lambda) = |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| \bmod 2 = \lambda^4 + \lambda^3 + 1 = 0 \bmod 2.$$

Так как $\lambda^4 \oplus \lambda^3 \oplus 1$ — неприводимый многочлен, являющийся простым множителем $\lambda^{15} - 1$, то минимальная длина периодической последовательности равна пятнадцати. Простые множители $\lambda^{15} - 1$ равны

$$\lambda^{15} - 1 = (\lambda^4 + \lambda^3 + 1)(\lambda^4 + \lambda + 1) \times$$
$$\times (\lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)(\lambda - 1).$$

Так как циклическая структура такой цепи полностью определяется характеристическим многочленом (в предположении, что матрица цепи неособенная, а характеристический многочлен — также и минимальный многочлен цепи), то линейные последовательностные цепи можно синтезировать аналогично обычным цепям с сосредоточенными параметрами. Ряд процедур синтеза дается в работе [6].

Уравнения состояния. Метод разложения на элементарные дроби. Метод разложения на элементарные дроби для получения уравнений состояния линейных дискретных стационарных процессов вытекает из аналогичной процедуры, используемой для непрерывных систем. Преобразование выходной величины $Y(z)$

системы с одним входом и выходом и передаточной функцией $H(z)$ выражается как $Y(z)=H(z)V(z)$. Если многочлен знаменателя передаточной функции имеет различные корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ $\ldots \lambda_n$, а порядок многочлена числителя $H(z)$ меньше порядка многочлена знаменателя, то $H(z)$ можно разложить на элементарные дроби

$$H(z)=\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{z-\lambda_i}.$$

Выход $Y(z)$ принимает вид

$$Y(z)=\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{z-\lambda_i}V(z).$$

Следовательно, $y(kT)$ можно записать в виде суммы вида

$$y(kT)=\sum_{i=1}^{n}c_i x_i,$$

где $x_i(kT)$ необходимо удовлетворяет разностному уравнению первого порядка

$$x_i[(k+1)T]=\lambda_i x_i(kT)+v(kT).$$

Тогда уравнения состояния для данной системы записываются в форме

$$\begin{bmatrix} x_1[(k+1)T] \\ x_2[(k+1)T] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n[(k+1)T] \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(kT) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix}v(kT),$$

$$[y(kT)]=[c_1\ c_2\ \ldots\ c_n]\begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(kT) \end{bmatrix}, \tag{6.5.3}$$

или

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[(k+1)T]&=\mathbf{\Lambda x}(kT)+\mathbf{Bv}(kT), \\ \mathbf{y}(kT)&=\mathbf{Cx}(kT), \end{aligned} \tag{6.5.4}$$

где матрицы $\mathbf{\Lambda}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ определяются из эквивалентности уравнений (6.5.3) и (6.5.4). Отметим, что символ $\mathbf{\Lambda}$ используется вме-

сто **A**, чтобы подчеркнуть, что **A** — диагональная матрица. Также отметим, что $\mathbf{B} = \mathbf{b} = \mathbf{1}$ — вектор-столбец.

Данный вид уравнений состояния особенно важен при доказательствах, формулировках, так как диагональная форма позволяет наиболее компактно и четко производить суждение о свойствах системы. Эта форма особенно удобна при операциях с вынуждающими функциями, так как соответствующая переходная матрица состояний также диагональная. При этом возникают, однако, и вычислительные трудности, связанные с тем, что передаточная функция $H(s)$ не дает информации о начальных условиях системы. Действительно, для вычисления начальных условий для x_i в данной системе следует найти $y(0), y(1), \ldots, y(n-1)$ и затем решить систему уравнений с целью определения связей между граничными условиями для y и соответствующими для переменных состояния (6.5.4).

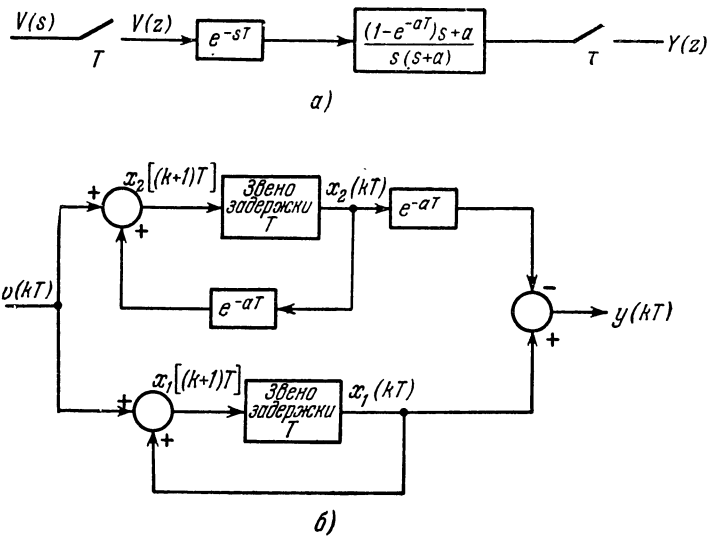


Рис. 6.5.4.

Пример 6.5.3. Найти матрицы **A**, **B** и **C** для импульсной системы на рис. 6.5.4, *а*.

Передаточная функция этой системы $H(z)$ (относительно квантованных входа и выхода) равна

$$\frac{Y(z)}{V(z)} = H(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{e^{-aT}}{z-e^{-aT}}.$$

Тогда преобразование выходной величины $Y(z)$ дается выражением

$$Y(z) = H(z)\,V(z) = \frac{V(z)}{z-1} - \frac{V(z)\,e^{-aT}}{z-e^{-aT}} = X_1(z) + X_2(z)\,e^{-aT},$$

где разностные уравнения для x_1 и x_2 имеют вид

$$x_1[(k+1)T] - x_1(kT) = v(kT),$$
$$x_2[(k+1)T] - e^{-aT}x_2(kT) = v(kT).$$

Векторные уравнения данной системы:

$$\mathbf{x}(k+1)T = \mathbf{\Lambda x}(kT) + \mathbf{Bv}(kT).$$
$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{Cx}(kT),$$

где

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-aT} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = [1 \quad -e^{-aT}].$$

Схема моделирования системы показана на рис. 6.5.4, *б*.

Для часто встречающегося в импульсных системах случая, когда многочлен числителя $H(z)$ такого же порядка, как и многочлен знаменателя $H(z)$, матрица $\mathbf{D}$ не равна нулю. $\mathbf{D}$ находится как первый член результата деления многочлена числителя на многочлен знаменателя. Простейшим примером служит $H(z) = 1/(1 - z^{-1})$, представляющая z-преобразование, соответствующее $1/s$. Следуя сказанному выше, получим

$$H(z) = \frac{z}{z-1} = 1 + \frac{1}{z-1}.$$

Эта операция эквивалентна

$$\mathbf{D} = D = \lim_{z \to \infty} H(z).$$

С оставшейся передаточной функцией $H_1(z) = H(z) - D$ можно оперировать описанным выше образом. В действительности, если найдена D, то нет необходимости находить $H_1(z)$, так как $H_1(z)$ имеет такие же, как и $H(z)$, полюсы и вычеты в них. Поэтому при порядке многочлена-числителя $H(z)$, равном порядку многочлена знаменателя, а также при полюсах $H(z)$ первого порядка (различных корнях многочлена знаменателя), общий вид уравнений состояния будет

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[(k+1)T] &= \mathbf{\Lambda x}(kT) + \mathbf{Bv}(kT), \\ \mathbf{y}(kT) &= \mathbf{Cx}(kT) + \mathbf{Dv}(kT), \end{aligned} \tag{6.5.5}$$

где $\mathbf{\Lambda}$ — диагональная матрица, элементы которой являются характеристическими корнями $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ многочлена знаменателя $\mathbf{H}(z)$; $\mathbf{B}$ — матрица-столбец с элементами, равными единице; $\mathbf{C}$ — матрица-строка с элементами, равными

$$c_i = (z - \lambda_i) H(z)|_{z=\lambda_i}; \qquad \mathbf{D} = d_0 = \lim_{z \to \infty} H(z).$$

Общая блок-схема показана на рис. 6.5.5.

В случае кратных корней многочлена знаменателя $H(z)$ процедура представления совпадает с приводимой в § 5.5 для непрерывного случая. Вместо того. чтобы повторно излагать ее, рассмотрим в качестве иллюстрации пример.

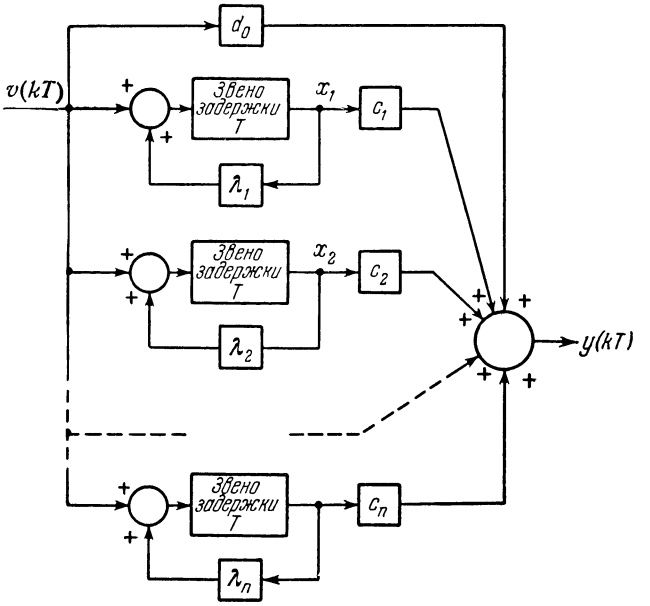


Рис. 6.5.5.

Пример 6.5.4. Найти матрицы **A**, **B**, **C** и **D** для системы с передаточной функцией

$$H(z) = \frac{4z^3 - 12z^2 + 13z - 7}{(z-1)^2(z-2)}.$$

Данная передаточная функция раскладывается на элементарные дроби

$$H(z) = \frac{c_1}{(z-1)^2} + \frac{c_2}{(z-1)} + \frac{c_3}{z-2} + d_0,$$

где

$$d_0 = \lim_{z\to\infty} H(z) = 4,$$

$$c_1 = (z-1)^2 H(z)\,|_{z=1} = 2,$$

$$c_2 = \frac{d}{dz}\,[(z-1)^2 H(z)]_{z=1} = 1,$$

$$c_3 = (z-2) H(z)\,|_{z=2} = 3.$$

Следовательно, выход $Y(z)$ записывается как

$$Y(z)=\frac{2V(z)}{(z-1)^2}+\frac{V(z)}{z-1}+\frac{3V(z)}{z-2}+4V(z)=2X_1(z)+X_2(z)+3X_3(z)+4V(z).$$

Так как $X_1(z)=X_2(z)/(z-1)$,

$$x_1[(k+1)T]-x_1(kT)=x_2(kT).$$

Уравнения состояния имеют вид

$$\mathbf{x}[(k+1)T]=\mathbf{J}\mathbf{x}(kT)+\mathbf{b}v(kT),$$

$$\mathbf{y}(kT)=\mathbf{C}\mathbf{x}(kT)+d_0v(kT),$$

где

$$\mathbf{J}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix},\qquad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\qquad \mathbf{C}=[2\quad 1\quad 3],\qquad d_0=4.$$

Схема моделирования этой системы показана на рис. 6.5.6.

Подобно описанному для нахождения уравнений состояния многосвязных систем (при многих входах и выходах) можно воспользоваться передаточной матричной функцией $\mathbf{H}(z)$. Однако

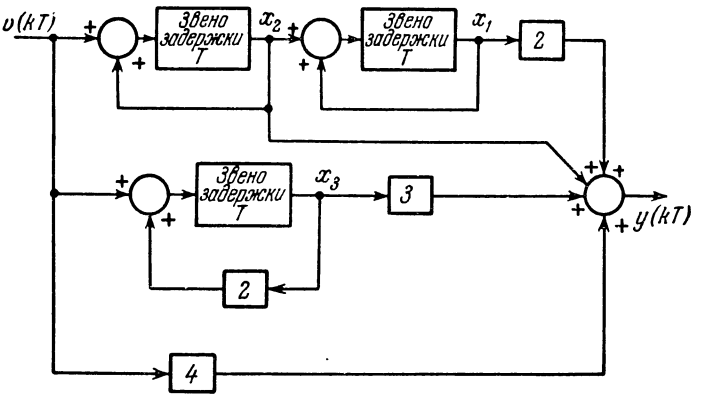


Рис. 6.5.6.

в этом случае подход не столь очевиден, как для одной входной и выходной величин, так как в общем здесь больше свободы в выборе надлежащих элементов матриц **B** и **C**.

Пример 6.5.5. Найти матрицы **A**, **B**, **C** и **D** для системы, блок-схема которой приведена на рис. 6.5.7.

Выходы $Y_1(z)$ и $Y_2(z)$ равны

$$Y_1(z)=\frac{z}{(z+1)(z+2)}V_1(z)+\frac{1}{z+2}V_2(z),$$

$$Y_2(z)=\frac{z^2}{(z+1)(z+3)}V_1(z)+4V_2(z).$$

Разложение на элементарные дроби приводит к

$$Y_1(z) = -\frac{1}{z+1}V_1(z) + \frac{2}{z+2}V_1(z) + \frac{1}{z+2}V_2(z),$$

$$Y_2(z) = \frac{\frac{1}{2}}{z+1}V_1(z) - \frac{\frac{9}{2}}{z+3}V_2(z) + V_1(z) + 4V_2(z).$$

На основе этих уравнений начерчена схема рис. 6.5.8, откуда очевидно, что соответствующие уравнения состояния:

$$\begin{bmatrix} x_1[(k+1)T] \\ x_2[(k+1)T] \\ x_3[(k+1)T] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \\ x_3(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -\frac{9}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(kT) \\ v_2(kT) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} y_1(kT) \\ y_2(kT) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \\ x_3(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(kT) \\ v_2(kT) \end{bmatrix}.$$

Отметим, что хотя матрица **A** в предыдущем примере находится легко, матрицы **B** и **C** отнюдь не единственны. Конечно,

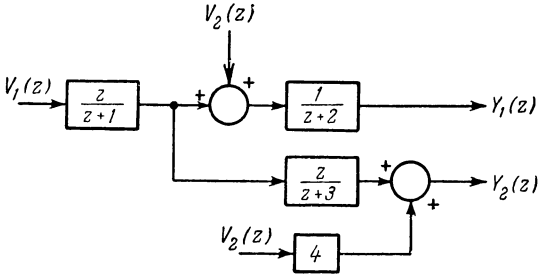


Рис. 6.5.7.

некоторые из элементов **B** и **C** можно поменять местами, сохраняя при этом неизменной передаточную матричную функцию. При отсутствии каких-либо знаний о физических свойствах системы любой выбор в равной степени справедлив. Различные варианты **B** и **C** должны удовлетворять неизменным произведениям $b_{ij}c_{ki}$. Использование передаточной функции или передаточной матричной функции для получения уравнений состояния системы представляет собой в лучшем случае компромисс; их следует применять лишь в том случае, когда исходные разностные уравнения системы неизвестны.

Если заданы исходные разностные уравнения и матрица **A** приводится к диагональному виду, то для этого можно использовать модальную матрицу **M**. Предположим, что уравнения состояния заданы в виде приводимого ниже уравнения (6.5.6)

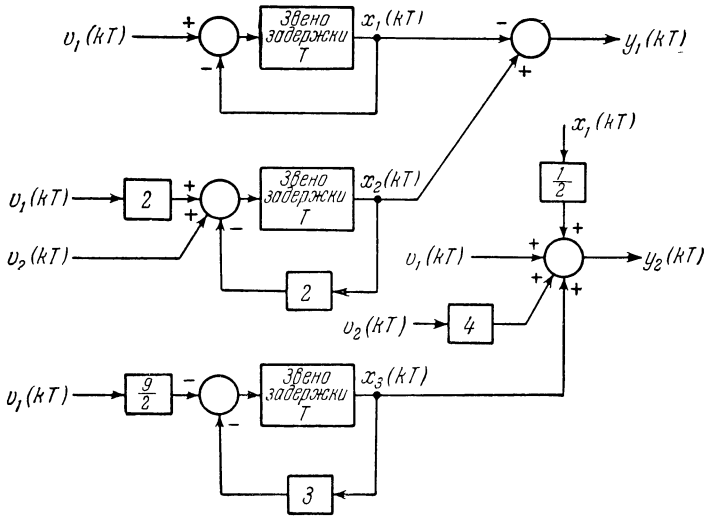


Рис. 6.5.8.

и требуется выбрать переменные состояния таким образом, чтобы матрицы **A** равнялась диагональной матрице Λ.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}\,[(k+1)\,T] &= \mathbf{A}\mathbf{x}\,(kT) + \mathbf{B}\mathbf{v}\,(kT), \\ \mathbf{y}\,(kT) &= \mathbf{C}\mathbf{x}\,(kT) + \mathbf{D}\mathbf{v}\,(kT). \end{aligned} \tag{6.5.6}$$

Определим новые переменные состояния таким образом, что

$$\mathbf{x}\,(kT) = \mathbf{M}\mathbf{q}\,(kT). \tag{6.5.7}$$

Уравнение (6.5.6) переписывается относительно этих нормальных координат в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\mathbf{q}\,[(k+1)\,T] &= \mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{q}\,(kT) + \mathbf{B}\mathbf{v}\,(kT), \\ \mathbf{y}\,(kT) &= \mathbf{C}\mathbf{M}\mathbf{q}\,(kT) + \mathbf{D}\mathbf{v}\,(kT). \end{aligned}$$

Умножение обеих частей первого уравнения слева на $\mathbf{M}^{-1}$ дает

$$\mathbf{q}\,[(k+1)\,T] = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{q}\,(kT) + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{v}\,(kT).$$

Учитывая $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M} = \Lambda$, получим нормальную форму векторных уравнений состояния

$$\begin{aligned} \mathbf{q}\,[(k+1)\,T] &= \Lambda\mathbf{q}\,(kT) + \mathbf{B}_n\mathbf{v}\,(kT), \\ \mathbf{y}\,(kT) &= \mathbf{C}_n\mathbf{q}\,(kT) + \mathbf{D}\mathbf{v}\,(kT), \end{aligned}$$

где $\mathbf{B}_n = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}$ — *нормальная форма* матрицы входа, а $\mathbf{C}_n = \mathbf{CM}$ — нормальная форма матрицы выхода. Указанной общей процедуре, непосредственно основанной на разностных уравнениях заданной системы, следует отдавать предпочтение по сравнению с методом, основанным на знании ее передаточной матричной функции.

Пример 6.5.6. Схема моделирования на рис. 6.5.9 характеризует исходную систему, передаточная функция которой дана в примере 6.5.5. Определить уравнения состояния в нормальной форме.

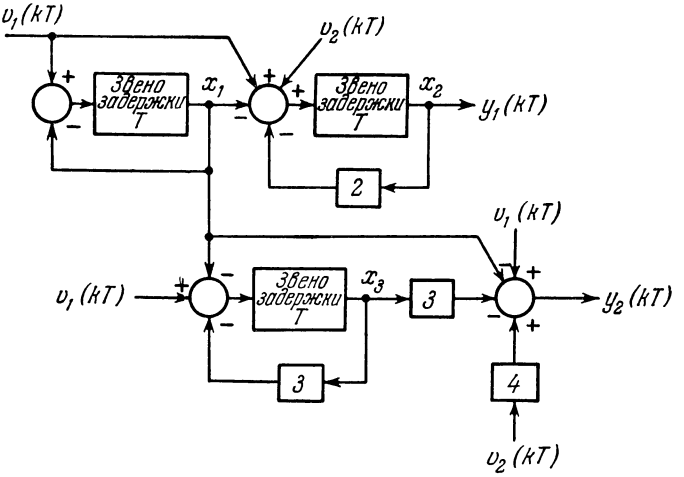


Рис. 6.5.9.

Векторные уравнения этой системы:

$$\begin{bmatrix} x_1[(k+1)T] \\ x_2[(k+1)T] \\ x_3[(k+1)T] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \\ x_3(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(kT) \\ v_2(kT) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} y_1(kT) \\ y_2(kT) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \\ x_3(kT) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(kT) \\ v_2(kT) \end{bmatrix}.$$

Приведенной выше $\mathbf{A}$ соответствуют модальная матрица $\mathbf{M}$ и ее обратная $\mathbf{M}^{-1}$:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

В результате подстановки в уравнения (6.5.8) получим матрицы нормальной формы:

$$\mathbf{\Lambda}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix},\qquad \mathbf{B}_n=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ -2 & -1\\ \frac{3}{2} & 0\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_n=\begin{bmatrix}-2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -3\end{bmatrix},\qquad \mathbf{D}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 4\end{bmatrix}.$$

Проверка всех произведений $b_{ij}c_{ki}$ показывает, что эти матрицы описывают ту же самую систему, что и в примере 6.5.5.

Новые переменные состояния $\mathbf{q}$ связаны со старыми переменными состояния $\mathbf{x}$ соотношением $\mathbf{q}=\mathbf{M}^{-1}\mathbf{x}$ или

$$q_1=\frac{1}{2}x_1,\qquad q_2=-(x_1+x_2),\qquad q_3=\frac{1}{2}x_1+x_3.$$

Использование соотношения $\mathbf{q}=\mathbf{M}^{-1}\mathbf{x}$ устраняет указанную ранее трудность нахождения начальных условий переменных состояния $\mathbf{q}$ по известным начальным условиям системы.

Нахождение модальной матрицы может потребовать не больше труда, чем любой из других методов нахождения переходной матрицы состояния. Но приведение матрицы $\mathbf{A}$ к диагональной форме имеет свои преимущества, а потому нормальная форма весьма желательна. Интересно также отметить, что рассматриваемый далее метод разложения на частоты и нормальная форма одинаковым образом развязывают уравнения состояния. В этом плане подходы идентичны, но записаны в различном виде. Форма представления уравнений системы часто определяется степенью знакомства с ними, а также зависит и от субъективного выбора.

§ 6.6. Частотная интерпретация

Идея разложения реакции линейной системы с постоянными параметрами на сумму реакций по характеристическим векторам матрицы $\mathbf{A}$ применима также и к дискретным системам с различными характеристическими числами. Вывод непосредственно следует из уравнений в нормальной форме.

Из уравнения (6.5.8)

$$\mathbf{q}(T)=\mathbf{\Lambda}\mathbf{q}(0)+\mathbf{B}_n\mathbf{v}(0) \tag{6.6.1}$$

и

$$\mathbf{q}(2T)=\mathbf{\Lambda}\mathbf{q}(T)+\mathbf{B}_n\mathbf{v}(T). \tag{6.6.2}$$

Подстановка уравнения (6.6.1) в уравнение (6.6.2) приводит к

$$\mathbf{q}(2T)=\mathbf{\Lambda}^2\mathbf{q}(0)+\mathbf{\Lambda}\mathbf{B}_n\mathbf{v}(0)+\mathbf{B}_n\mathbf{v}(T). \tag{6.6.3}$$

Подобным образом

$$\mathbf{q}(3T) = \Lambda\mathbf{q}(2T) + \mathbf{B}_n\mathbf{v}(2T),$$

и уравнение (6.6.3) дает

$$\mathbf{q}(3T) = \Lambda^3\mathbf{q}(0) + \Lambda^2\mathbf{B}_n\mathbf{v}(0) + \Lambda\mathbf{B}_n\mathbf{v}(T) + \mathbf{B}_n\mathbf{v}(2T).$$

Продолжение этой процедуры приводит к виду

$$\mathbf{q}(kT) = \Lambda^k\mathbf{q}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \Lambda^{k-j-1}\mathbf{B}_n\mathbf{v}(jT). \tag{6.6.4}$$

Тогда, ввиду $\mathbf{q} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{x}$ и $\mathbf{B}_n = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}$,

$$\mathbf{x}(kT) = \mathbf{M}\Lambda^k\mathbf{M}^{-1}\mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{M}\Lambda^{k-j-1}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{v}(jT). \tag{6.6.5}$$

Теперь, вспоминая из § 4.7, что столбцы

$$\mathbf{M} = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \ldots \mathbf{u}_n]$$

образуют базис и что строки $\mathbf{M}^{-1}$, где

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^T \\ \mathbf{r}_2^T \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{r}_n^T \end{bmatrix} \quad (\mathbf{r}_i \text{ — векторы-столбцы}),$$

образуют двойственный базис, уравнение (6.6.5) принимает вид

$$\mathbf{x}(kT) = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \ldots \mathbf{u}_n]\Lambda^k \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^T \\ \mathbf{r}_2^T \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{r}_n^T \end{bmatrix} \mathbf{x}(0) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{k-1} [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \ldots \mathbf{u}_n]\Lambda^{k-j-1} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^T \\ \mathbf{r}_2^T \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{r}_n^T \end{bmatrix} \mathbf{B}\mathbf{v}(jT).$$

Это можно переписать так:

$$\mathbf{x}(kT) = \sum_{i=1}^{n} \left[\langle \mathbf{r}_i, \mathbf{x}(0) \rangle \lambda_i^k + \sum_{j=0}^{k-1} \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{B}\mathbf{v}(jT) \rangle \lambda_i^{k-j-1} \right] \mathbf{u}_i. \tag{6.6.6}$$

Уравнение дискретной системы (6.6.6) аналогично уравнению (5.6.10).

«Частоты» системы задаются членами уравнения (6.6.6) при $i=1, 2, \ldots, n$. Метод разложения на частоты разделяет, или развязывает, частоты системы, так что реакция $\mathbf{x}(kT)$ выражается в виде линейной взвешенной суммы этих частот. Каждая частота направлена вдоль характеристического вектора $\mathbf{u}_i$, определенного в пространстве состояний $x_1, x_2, \ldots, x_n$. При свободном движении системы «величина возбуждения», вносимая каждой частотой, задается скалярным произведением $\langle \mathbf{r}_i, \mathbf{x}(0) \rangle$. При вынужденном движении системы скалярное произведение $\langle \mathbf{r}, \mathbf{Bv} \rangle$ является амплитудой вынуждающей функции, связанной с i-й частотой.

Характеристические векторы представляют, в сущности, новую систему координат, так что каждая из частот системы направления вдоль одной из координатных осей. *Нормальная форма* уравнений состояния выполняет такую же задачу, но в несколько отличном виде. Таким образом, если исходное уравнение состояния

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = \mathbf{Ax}(kT) + \mathbf{Bv}(kT),$$

то преобразование $\mathbf{q} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{x}$, где $\mathbf{M}$ — нормированная модальная матрица, приводит к новому уравнению состояния

$$\mathbf{q}[(k+1)T] = \mathbf{\Lambda q}(kT) + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{Bv}(kT).$$

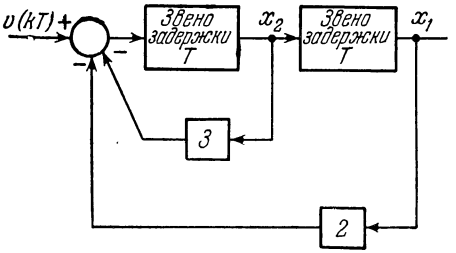


Рис. 6.6.1.

В этом уравнении переменные $q_1, q_2, \ldots, q_n$ не связаны, так как $\mathbf{\Lambda}$ — диагональная матрица. Переменная состояния направлена вдоль характеристического вектора $\mathbf{u}_i$. Скалярное произведение $\langle \mathbf{r}_i, \mathbf{x}(0) \rangle$ в разложении на частоты не что иное, как i-я составляющая вектора-столбца нормальной формы $\mathbf{q}(0) = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{x}(0)$, а скалярное произведение $\langle \mathbf{r}_i, \mathbf{Bv} \rangle$ — i-я составляющая вектора-столбца $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Bv}$.

Пример 6.6.1. Произвести анализ системы на рис. 6.6.1 на основе метода разложения на частоты и уравнений состояния в нормальной форме.

Матрица $\mathbf{A}$ этой системы равна

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Характеристические корни $\lambda_1=-2$ и $\lambda_2=-1$. Нормированные характеристические векторы

$$\mathbf{u}_1=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u}_2=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

Тогда двойственный базис равен

$$\mathbf{r}_1=\begin{bmatrix} 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{r}_2=\begin{bmatrix} -\sqrt{5} \\ -\sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

Нормированная модальная матрица $\mathbf{M}$ и ее обратная $\mathbf{M}^{-1}$ задается в виде

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{2} & -2\sqrt{5} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{M}^{-1}=\begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{5} & -\sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

Отметим, что строки $\mathbf{M}^{-1}$ служат базисными векторами $\mathbf{r}_i$ двойственного базиса.

Скалярные произведения $\langle \mathbf{r}_i, x(0)\rangle$ равны

$$\langle \mathbf{r}_1, \mathbf{x}(0)\rangle = 2\sqrt{2}\,x_1(0)+\sqrt{2}\,x_2(0),$$
$$\langle \mathbf{r}_2, \mathbf{x}(0)\rangle = -\sqrt{5}\,x_1(0)-\sqrt{5}\,x_2(0).$$

Начальные условия для вектора $\mathbf{q}$

$$\mathbf{q}(0)=\mathbf{M}^{-1}\mathbf{x}(0)=\begin{bmatrix} 2\sqrt{2}\,x_1(0)+\sqrt{2}\,x_2(0) \\ -\sqrt{5}\,x_1(0)-\sqrt{5}\,x_2(0) \end{bmatrix}.$$

Вынуждающая функция $\mathbf{B}\mathbf{v}(kT)$ представляет вектор $\mathbf{b}$, умноженный на $v(kT)$, где

$$\mathbf{b}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Поэтому скалярные произведения $\langle \mathbf{r}_i, \mathbf{B}\mathbf{v}(kT)\rangle$ равны

$$\langle \mathbf{r}_1, \mathbf{B}\mathbf{v}(kT)\rangle = \sqrt{2}\,v(kT),$$
$$\langle \mathbf{r}_2, \mathbf{B}\mathbf{v}(kT)\rangle = -\sqrt{5}\,v(kT).$$

Вынуждающая функция $\mathbf{B}_n\mathbf{v}(kT)$ равна

$$\mathbf{B}_n\mathbf{v}(kT)=\mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}v(kT)=\begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{5} \end{bmatrix} v(kT).$$

В общем виде выражение для реакции $\mathbf{x}(kT)$ имеет вид

$$\mathbf{x}(kT)=[2\sqrt{2}\,x_1(0)+\sqrt{2}\,x_2(0)](-1)^k\mathbf{u}_1+\sum_{j=0}^{k-1}\sqrt{2}(-1)^{(k-j-1)}v(jT)\,\mathbf{u}_1+$$
$$+[-\sqrt{5}\,x_1(0)-\sqrt{5}\,x_2(0)](-2)^k\mathbf{u}_2+\sum_{j=0}^{k-1}(-\sqrt{5})(-2)^{(k-j-1)}v(jT)\,\mathbf{u}_2.$$

Из приведенного выше, а также из уравнения (6.6.4) общее выражение для реакции $\mathbf{q}(kT)$ принимает вид

$$\mathbf{q}(kT)=\begin{bmatrix}(-1)^k q_1(0)+\sum_{j=0}^{k-1}\sqrt{2}(-1)^{(k-j-1)}v(jT)\\ (-2)^k q_2(0)+\sum_{j=1}^{k-1}(-\sqrt{5})(-2)^{(k-j-1)}v(jT)\end{bmatrix},$$

где $q_1(0)=2\sqrt{2}x_1(0)+\sqrt{2}x_2(0)$ и $q_2(0)=-\sqrt{5}x_1(0)-\sqrt{5}x_2(0)$.

Очевидно, что оба метода эквивалентны, причем координаты q *нормальной формы* являются нормированными характеристическими векторами в *разложении на частоты.*

§ 6.7. Управляемость и наблюдаемость

Понятия управляемости и наблюдаемости, приведенные в § 5.7, непосредственно переносятся на линейные дискретные системы, так что вряд ли целесообразно их дальнейшее рассмотрение. Снова сформулируем основные положения.

Управляемость является функцией связи между входами системы и ее различными частотами. Если уравнения системы при различных λ_i записаны в нормальной форме

$$\mathbf{q}[(k+1)T]=\mathbf{\Lambda q}(kT)+\mathbf{B}_n\mathbf{v}(kT),$$
$$\mathbf{y}(kT)=\mathbf{C}_n\mathbf{q}(kT)+\mathbf{Dv}(kT),$$

то система управляема по всем частотам, если $\mathbf{B}$ не содержит ни одной нулевой *строки.* Применительно к методу разложения на частоты это означает, что ни одно из скалярных произведений $\langle\mathbf{r}_i, \mathbf{Bv}\rangle$ не обращается в нуль.

Наблюдаемость является функцией связи между частотами системы и ее выходом. Все частоты системы наблюдаемы, если $\mathbf{C}_n$ не содержит ни одного нулевого *столбца.* Это требование может формулироваться еще и так: если скалярные произведения $\langle\mathbf{c}_i, \mathbf{u}_k\rangle=0$ для всех i, где вектор $\mathbf{c}_i$ означает i-ю строку исходной матрицы $\mathbf{C}$, то k-я частота системы ненаблюдаема.

Для импульсных систем существует дополнительное требование. Если при разложении на элементарные дроби в непрерывном случае содержится член $\beta/[(s+a)^2+\beta^2]$ и если период квантования $T=\pi/\beta$, то z-преобразование от этого члена равно

$$\mathcal{Z}\left[\frac{\beta}{(s+a)^2+\beta^2}\right]=\frac{z^{-1}e^{-aT}\sin\beta T}{1-2z^{-1}e^{-aT}\cos\beta T+z^{-2}e^{-2aT}}=0.$$

Система может быть даже неустойчивой (при $a<0$), однако это не вытекает из наблюдения ее выходов. Эти составляющие

называются «скрытыми колебаниями»; они имеют место, когда их нули в точности совпадают с периодом квантования. В этом случае система не является ни полностью управляемой, ни полностью наблюдаемой. Следовательно, дополнительное требование полной управляемости и наблюдаемости импульсных систем состоит в том, чтобы при характеристических корнях $-\alpha \pm j\beta$ непрерывной системы $T \neq \pi/\beta$.

§ 6.8. Переходная матрица состояния

В данном параграфе рассматривается переходная матрица состояния линейной дискретной системы. Подобно непрерывному случаю переходная матрица состояния служит фундаментальной матрицей приводимого ниже уравнения (6.8.1) при условии, что $\varphi[(k_0, k_0)T] = \mathbf{I}$ — единичная матрица. Рассмотрим разностное уравнение состояния с переменными параметрами

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = \mathbf{A}(kT)\,\mathbf{x}(kT). \tag{6.8.1}$$

При известных начальных условиях $\mathbf{x}(k_0T)$

$$\mathbf{x}[(k_0+1)T] = \mathbf{A}(k_0T)\,\mathbf{x}(k_0T).$$

Подобным образом

$$\mathbf{x}[(k_0+2)T] = \mathbf{A}[(k_0+1)T]\,\mathbf{A}(k_0T)\,\mathbf{x}(k_0T).$$

В результате итераций получим произведение [13]

$$\mathbf{x}(kT) = \prod_{n=k_0}^{k-1} \mathbf{A}(nT)\,\mathbf{x}(k_0T) \qquad (k > k_0). \tag{6.8.2}$$

Так как переходная матрица состояния $\varphi[(k, k_0)T]$ определяется соотношением

$$\mathbf{x}(kT) = \varphi[(k, k_0)T]\,\mathbf{x}(k_0T), \tag{6.8.3}$$

то

$$\varphi[k, k_0)T] = \begin{cases} \prod\limits_{n=k_0}^{k-1} \mathbf{A}(nT) & (k > k_0), \\ \mathbf{I} & (k = k_0). \end{cases} \tag{6.8.4}$$

Этот итеративный процесс нахождения переходной матрицы состояния подобен итеративному процессу вычисления матрицанта для аналогичной непрерывной системы.

В случае постоянной матрицы $\mathbf{A}(kT) = \mathbf{A}_0$ переходная матрица состояния $\varphi_0[(k, k_0)T]$ равна

$$\varphi_0[(k, k_0)T] = \mathbf{A}_0^{(k-k_0)}, \quad \mathbf{A}(kT) = \mathbf{A}_0 \text{ — постоянная матрица.} \tag{6.8.5}$$

Это аналогично непрерывному случаю, где решение системы с постоянными параметрами зависит лишь от разности моментов времени действия причины и следствия, тогда как при переменных параметрах системы ее решение зависит одновременно от момента времени действия причины и момента наблюдения следствия.

Если матрицу $\mathbf{A}(kT)$ нестационарной системы можно представить в виде суммы двух матриц, $\mathbf{A}_0$ и $\mathbf{A}_1(kT)$, то для нахождения переходной матрицы состояния можно воспользоваться методом возмущений. Метод эффективен, если матрица $\mathbf{A}_1(kT)$ мала (является малым возмущением) по сравнению с постоянной матрицей $\mathbf{A}_0$. В этом случае

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = [\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1(kT)]\,\mathbf{x}(kT). \tag{6.8.6}$$

Данное уравнение можно рассматривать, как уравнение с постоянной матрицей $\mathbf{A}_0$ и вынуждающей функцией $\mathbf{v}(kT)$, где $\mathbf{v}(kT) = \mathbf{A}_1(kT)\mathbf{x}(kT)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[(k+1)T] &= \mathbf{A}_0\mathbf{x}(kT) + \mathbf{v}(kT), \\ \mathbf{v}(kT) &= \mathbf{A}_1(kT)\,\mathbf{x}(kT). \end{aligned} \tag{6.8.7}$$

Решение $\mathbf{x}(kT)$ системы (6.8.7) определяется посредством такой же итеративной процедуры, как и для уравнений (6.6.4) и (6.8.2). Поэтому

$$\mathbf{x}(kT) = \mathbf{A}_0^{(k-k_0)}\mathbf{x}(k_0T) + \sum_{n=k_0}^{k-1} \mathbf{A}_0^{(k-n-1)}\mathbf{v}(nT). \tag{6.8.8}$$

Подстановка $\mathbf{v}(nT) = \mathbf{A}_1(nT)\mathbf{x}(nT)$ в уравнение (6.8.8) дает

$$\mathbf{x}(kT) = \mathbf{A}_0^{(k-k_0)}\mathbf{x}(k_0T) + \sum_{n=k_0}^{k-1} \mathbf{A}_0^{(k-n-1)}\mathbf{A}_1(nT)\,\mathbf{x}(nT). \tag{6.8.9}$$

Данное уравнение решается обычными итерационными методами.

Первая итерация

$$\mathbf{x}(kT) = \mathbf{A}_0^{(k-k_0)}\mathbf{x}(k_0T) + \sum_{n=k_0}^{k-1} \mathbf{A}_0^{(k-n-1)}\mathbf{A}_1(nT) \times$$
$$\times \left[\mathbf{A}_0^{(n-k_0)}\mathbf{x}(k_0T) + \sum_{m=k_0}^{n-1} \mathbf{A}_0^{(n-m-1)}\mathbf{A}_1(mT)\,\mathbf{x}(mT)\right].$$

Последующие итерации приводят к уравнению

$$\mathbf{x}(kT) = [\mathbf{I} + \mathbf{S}(\varphi_0\mathbf{A}_1) + \mathbf{S}(\varphi_0\mathbf{A}_1\mathbf{S}(\varphi_0\mathbf{A}_1) +$$
$$+ \mathbf{S}(\varphi_0\mathbf{A}_1\mathbf{S}(\varphi_0\mathbf{A}_1\mathbf{S}(\varphi_0\mathbf{A}_1)))) + \ldots]\,\varphi_0\mathbf{x}(k_0T), \tag{6.8.10}$$

где $\mathbf{S}$ указывает на суммирование всех членов, стоящих справа, а φ_0 задается уравнением (6.8.5). Переходная матрица состояния $\varphi(kT, k_0T)$ записывается тогда в виде выражения

$$\varphi[(k, k_0)T] = [\mathbf{I} + \mathbf{S}(\varphi_0\mathbf{A}_1) + \mathbf{S}(\varphi_0\mathbf{A}_1\mathbf{S}(\varphi_0\mathbf{A}_1)) + \\ + \mathbf{S}(\varphi_0\mathbf{A}_1\mathbf{S}(\varphi_0\mathbf{A}_1\mathbf{S}(\varphi_0\mathbf{A}_1))) + \ldots]\varphi_0, \quad (6.8.11)$$

которое непосредственно сводится к φ_0 в случае стационарной системы, т. е. при $\mathbf{A}_1(kT) = [0]$.

Уравнение (6.8.11) для дискретных систем аналогично уравнению (5.9.21) для непрерывных систем. Если $\mathbf{A}_1$ мала по сравнению с $\mathbf{A}_0$, то этот ряд сходится быстро и для нахождения $\varphi[(k, k_0)T]$ требуется лишь несколько членов.

Преимущество описанного метода состоит в том, что переходная матрица состояния φ нестационарной системы строится путем последовательной коррекции матрицы φ_0 стационарной системы.

Свойства переходной матрицы состояния. Переходная матрица состояния дискретных систем обладает рядом свойств, непосредственно аналогичных описанным в § 5.9 для непрерывных систем, а именно

$$\varphi[(k_0, k_0)T] = \mathbf{I}, \quad (6.8.12)$$

$$\varphi[(k_2, k_1)T]\varphi[(k_1, k_0)T] = \varphi[(k_2, k_0)T], \quad (6.8.13)$$

$$\varphi[(k_1, k_2)T] = \varphi^{-1}[(k_2, k_1)T]. \quad (6.8.14)$$

Для систем с постоянными параметрами

$$\varphi[(k+n)] = \varphi(k)\varphi(n), \quad (6.8.15)$$

$$\varphi(k) = \varphi^{-1}(-k). \quad (6.8.16)$$

Вычисление φ. Вычисление переходной матрицы состояния для нестационарных систем в общем случае представляет чрезвычайно трудоемкую задачу. Ясно, что при больших n уравнение (6.8.4) становится очень громоздким. Аналитическое решение разностных уравнений можно получить в отдельных (однако очень редких) случаях (см. § 2.13). Как правило, наилучший способ получения решения — использование вычислительных устройств.

Аналитическое решение обычно свойственно системам с постоянными параметрами. Один из методов вычисления переходной матрицы состояния дается уравнением (4.10.20). Ряд других методов сводится к следующему.

1. *Метод Кэли — Гамильтона.* Процедуру Кэли — Гамильтона можно использовать для вычисления $\mathbf{A}^k$. Здесь $f(\lambda_i)$ следует считать равным λ^k, а не e^{λ_i}, как в непрерывном случае.

Пример 6.8.1. Вычислить $\varphi(k)$ для разностного уравнения

$$y[(k+2)T]+5y[(k+1)T]+6y(kT)=0.$$

Матрица $\mathbf{A}$ данной системы равна

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}$$

(предполагается, что $x_1(kT)=y(kT)$, $x_2(kT)=y[(k+1)T]$). Характеристическое уравнение $|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}|=0$ имеет два характеристических корня $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=-3$. Следовательно,

$$F(\lambda_1)=\lambda_1^k=(-2)^k=\alpha_0+\alpha_1\lambda_1=\alpha_0-2\alpha_1,$$

$$F(\lambda_2)=\lambda_2^k=(-3)^k=\alpha_0+\alpha_1\lambda_2=\alpha_0-3\alpha_1.$$

Из этих двух уравнений имеем $\alpha_0=3(-2)^k-2(-3)^k$ и $\alpha_1=(-2)^k-(-3)^k$. Следовательно,

$$\mathbf{F}(\mathbf{A})=\mathbf{A}^k=\alpha_0\mathbf{I}+\alpha_1\mathbf{A}$$

или

$$\varphi(k)=\begin{bmatrix} 3(-2)^k-2(-3)^k & (-2)^k-(-3)^k \\ -6[(-2)^k-(-3)^k] & -2(-2)^k+3(-3)^k \end{bmatrix}.$$

Пример 6.8.2. Вычислить $\varphi(k)$ для системы с матрицей $\mathbf{A}$, равной

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Характеристическое уравнение $|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}|=0$ имеет два характеристических корня -1. В случае кратных корней условия, используемые для нахождения α, равны

$$\left.\frac{d^sF(\lambda)}{d\lambda^s}\right|_{\lambda=\lambda_i}=\frac{d^s}{d\lambda^s}\left[\sum_{r=0}^{n-1}\alpha_r\lambda^r\right]_{\lambda=\lambda_i}=\frac{d^s}{d\lambda^s}\,[\alpha_0+\alpha_1\lambda]_{\lambda=\lambda_i},$$

$$s=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ p_i-1,$$

где p_i — порядок корня. Следовательно, $(-1)^k=\alpha_0+\alpha_1\lambda_1=\alpha_0-\alpha_1$ и $-k(-1)^k=\alpha_1$, или $\alpha_1=-k(-1)^k$ и $\alpha_0=(-1)^k(1-k)$. Таким образом,

$$\varphi(k)=\alpha_0\mathbf{I}+\alpha_1\mathbf{A}=\begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ -\alpha_1 & \alpha_0-2\alpha_1 \end{bmatrix}=(-1)^k\begin{bmatrix} 1-k & -k \\ k & 1+k \end{bmatrix}.$$

Пример 6.8.3. Интересно рассмотреть случай комплексных корней матрицы $\mathbf{A}$. Поэтому определим $\varphi(k)$, соответствующую

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Характеристические числа этой матрицы равны $1\pm j$. Для вычисления $\mathbf{A}^k$ наиболее удобна полярная форма $\sqrt{2}\,e^{\pm j\pi/4}$. Тогда вычисление $\mathbf{A}^k$ дает

$$F(\lambda_1)=(2)^{k/2}e^{jk\pi/4}=\alpha_0+\alpha_1+j\alpha_1,$$

$$F(\lambda_2)=(2)^{k/2}e^{-jk\pi/4}=\alpha_0+\alpha_1-j\alpha_1.$$

Сложение и вычитание этих выражений приводит к $(2)^{k/2}\cos(k\pi/4) = \alpha_0 + \alpha_1$ и $\alpha_1 = (2)^{k/2}\sin(k\pi/4)$ или $\alpha_0 = (2)^{k/2}[\cos(k\pi/4) - \sin(k\pi/4)]$. Из уравнения

$$\varphi(k) = \alpha_0\mathbf{I} + \alpha_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ -2\alpha_1 & \alpha_0 + 2\alpha_1 \end{bmatrix}$$

следует, что

$$\varphi(k) = (2)^{k/2}\begin{bmatrix} \cos\frac{k\pi}{4} - \sin\frac{k\pi}{4} & \sin\frac{k\pi}{4}, \\ -2\sin\frac{k\pi}{4} & \cos\frac{k\pi}{4} + \sin\frac{k\pi}{4} \end{bmatrix}.$$

2. *Метод частотной области.* Для нахождения переходной матрицы состояния уравнения

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = \mathbf{A}\mathbf{x}(kT) \tag{6.8.17}$$

можно воспользоваться (по аналогии с применением преобразования Лапласа) z-преобразованием. Преобразуя обе части уравнения (6.8.17) с учетом уравнения (3.12.3), получим $z\mathbf{X}(z) - z\mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(z)$. Отсюда имеем

$$\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}z\mathbf{x}(0), \tag{6.8.18}$$

или $\mathbf{X}(z) = \mathbf{\Phi}(z)\mathbf{x}(0)$, где

$$\mathbf{\Phi}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}z. \tag{6.8.19}$$

Это выражение несколько отличается от аналогичного $\mathbf{\Phi}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ для непрерывных систем. Переходная матрица состояния задается обратным z-преобразованием $\mathbf{\Phi}(z)$ или

$$\varphi(k) = \mathscr{Z}^{-1}[(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}z] = \sum \text{вычетов } (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}z^k. \tag{6.8.20}$$

Пример 6.8.4. Для матрицы $\mathbf{A}$ из примера 6.8.1 на основе метода частотной области определить $\varphi(k)$.

В этом случае

$$(z\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} z & -1 \\ 6 & z+5 \end{bmatrix},$$

так что

$$(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} z+5 & 1 \\ -6 & z \end{bmatrix}}{(z+2)(z+3)}.$$

Определив сумму вычетов $(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}z^k$, получим

$$\varphi(k) = \begin{bmatrix} 3(-2)^k - 2(-3)^k & (-2)^k - (-3)^k \\ -6[(-2)^k - (-3)^k] & -2(-2)^k + 3(-3)^k \end{bmatrix}.$$

Пример 6.8.5 Для матрицы $\mathbf{A}$ из примера 6.8.2 на основе метода частотной области определить $\varphi(k)$.

В этом случае

$$(z\mathbf{I}-\mathbf{A})=\begin{bmatrix} z & -1 \\ 1 & z+2 \end{bmatrix},$$

так что

$$(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\frac{\begin{bmatrix} z+2 & 1 \\ -1 & z \end{bmatrix}}{(z+1)^2}.$$

Определение суммы вычетов $(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}z^k$ приводит к выражению

$$\varphi(k)=(-1)^k\begin{bmatrix} 1-k & -k \\ k & 1+k \end{bmatrix}.$$

3. *Метод передаточной функции.* Как и в непрерывном случае, для получения $\Phi_{ij}(z)$ можно воспользоваться схемой моделирования. Основой метода служит то, что решение уравнения (6.8.17) имеет вид

$$\mathbf{x}(kT)=\varphi(k)\,\mathbf{x}(0). \tag{6.8.21}$$

Поэтому $x_i(kT)$ задается соотношением

$$x_i(kT)=\sum_{j=1}^{n}\varphi_{ij}(k)\,x_j(0). \tag{6.8.22}$$

Если все переменные состояния, кроме j-й, равны нулю, а начальное условие x_j равно единице, то реакция i-й переменной состояния характеризуется членом $\varphi_{ij}(k)$. Следовательно, передаточная функция от *выхода* j-го звена задержки к *выходу* i-го звена задержки характеризуется членом $\Phi_{ij}(z)$. Это несколько отличается от непрерывного случая, где передаточная функция вычислялась между входом j-го интегратора и выходом i-го интегратора. Различие обусловлено тем, что передаточная функция в непрерывном случае выражается как преобразование *импульсной характеристики* (в непрерывном случае единичный мгновенный импульс *мгновенно* «устанавливает» единичное мгновенное условие), тогда как в дискретном случае она равна преобразованию *реакции системы при единичном начальном условии.* Согласно проводимой аналогии для получения $\Phi_{ij}(z)$ передаточную функцию от *входа* j-го звена задержки к выходу i-го звена задержки следует умножить на z. Так как непосредственно интересующей нас величиной является $(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=z^{-1}\mathbf{\Phi}(z)$, то представляется удобным рассмотрение передаточной функции от *входа* j-го звена задержки ко входу i-го звена задержки.

Пример 6.8.6. Схема моделирования на рис. 6.8.1, *а* характеризует систему из примера 6.8.1. Определить $\varphi(k)$.

С целью удобства вычисления передаточных функций та же система перечерчена на рис. 6.8.1, *б*. Так как 1/(1 — передаточная функция разомкнутой системы) равна $z(z+5)/(z^2+5z+6)$, различные передаточные функции

$z^{-1}\Phi_{ij}(z)$ получаются путем умножения передаточной функции от входа j к выходу i на $z(z+5)/(z^2+5z+6)$. В результате выполнения этой операции получим матрицу $(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=z^{-1}\mathbf{\Phi}(z)$. Следовательно,

$$[z\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}=z^{-1}\mathbf{\Phi}(z)=\frac{\begin{bmatrix} z+5 & 1 \\ -6 & z \end{bmatrix}}{z^2+5z+6}.$$

Обратное преобразование $\mathbf{\Phi}(z)$ дает такую же $\varphi(k)$, как и в примере 6.8.4.

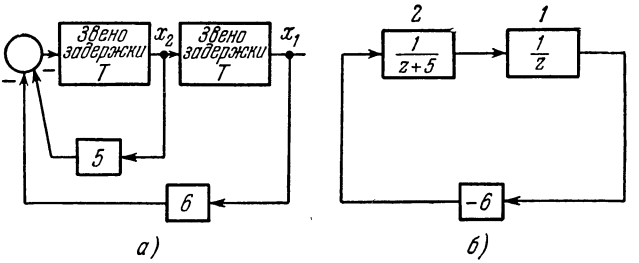


Рис. 6.8.1.

Сопряженная система. Переходная матрица состояния. Подобно сопряженной линейной непрерывной системе (при отсутствии вынуждающих функций) существует аналогичная сопряженная дискретная линейная система. Сопряженный оператор $\mathbf{L}^*$ выражается через оператор системы $\mathbf{L}$ посредством

$$\langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{Lx}\rangle = \langle \mathbf{L}^*\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{x}\rangle, \tag{6.8.23}$$

где $\boldsymbol{\alpha}$ — сопряженный вектор, а внутреннее произведение обозначает *)

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle = \sum_{i=k_0}^{k-1} \mathbf{a}^T[(i+1)T]\,\mathbf{b}(iT).$$

Из рассмотрения $\langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{Lx}\rangle$ имеем

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{Lx}\rangle &= \sum_{i=k_0}^{k-1} \boldsymbol{\alpha}^T[(i+1)T]\{\mathbf{x}[(i+1)T]-\mathbf{A}(iT)\,\mathbf{x}(iT)\} = \\ &= \boldsymbol{\alpha}^T(kT)\,\mathbf{x}(kT) + \sum_{i=k_0-1}^{k-2} \boldsymbol{\alpha}^T[(i+1)T]\,\mathbf{x}(i+1)T] - \\ &- \boldsymbol{\alpha}^T(k_0T)\,\mathbf{x}(k_0T) - \sum_{i=k_0}^{k-1} \boldsymbol{\alpha}^T[(i+1)T]\,\mathbf{A}(iT)\,\mathbf{x}(iT) = \\ &= \sum_{i=k_0}^{k-1} \{\boldsymbol{\alpha}^T(iT) - \boldsymbol{\alpha}^T[(i+1)]\,\mathbf{A}(iT)\}\,\mathbf{x}(iT) + \\ &+ \boldsymbol{\alpha}^T(kT)\,\mathbf{x}(kT) - \boldsymbol{\alpha}^T(k_0T)\,\mathbf{x}(k_0T).\end{aligned} \tag{6.8.24}$$

*) В случае комплексных элементов транспонируются комплексно сопряженные.

Тогда, полагая

$$\mathbf{L}^*\alpha = \alpha^T(iT) - \alpha^T[(i+1)T]\,\mathbf{A}(iT), \tag{6.8.25}$$

так что сопряженное уравнение равно

$$\alpha^T(iT) = \alpha^T[(i+1)T]\,\mathbf{A}(iT), \tag{6.8.26}$$

умножим уравнение свободного движения системы

$$\mathbf{x}[(i+1)T] = \mathbf{A}(iT)\,\mathbf{x}(iT)$$

на $\alpha^T[(i+1)T]$. С учетом уравнения (6.8.26) получим

$$\alpha^T[(i+1)T]\,\mathbf{x}[(i+1)T] = \alpha^T(iT)\,\mathbf{x}(iT).$$

В результате итерации имеем

$$\alpha^T(kT)\,\mathbf{x}(kT) = \alpha^T(k_0T)\,\mathbf{x}(k_0T). \tag{6.8.27}$$

Подстановка уравнений (6.8.25) и (6.8.27) в уравнение (6.8.24) приводит к уравнению (6.8.23). Поэтому уравнение (6.8.26), переписанное в виде

$$\alpha[(i+1)T] = [\mathbf{A}^{-1}(iT)]^T\,\alpha(iT), \tag{6.8.28}$$

является уравнением сопряженной системы *).

Так как переходная матрица состояния $\varphi[(k, k_0)T]$ должна удовлетворять уравнению (6.8.1), то

$$\varphi[(k+1, k_0)T] = \mathbf{A}(kT)\,\varphi[(k, k_0)T].$$

Взяв обратную матрицу и произведя транспонирование **), получим

$$\{\varphi^{-1}[(k+1, k_0)T]\}^T = [\mathbf{A}^{-1}(kT)]^T\{\varphi^{-1}[(k, k_0)T]\}^T, \tag{6.8.29}$$

Из сравнения уравнений (6.8.28) и (6.8.29) следует, что переходная матрица состояния сопряженной системы равна

$$\{\varphi^{-1}[(k, k_0)T]\}^T = \varphi^T[(k_0, k)T]. \tag{6.8.30}$$

Отметим, что приводимое здесь рассмотрение давалось в обратном порядке по сравнению с аналогичным в пятой главе, где определялись непрерывные аналоги уравнений (6.8.28) и (6.8.30) и в результате выведен непрерывный аналог уравнения (6.8.23). Здесь же уравнения (6.8.28) и (6.8.30) получены из определения сопряженного оператора (6.8.23).

---

*) Это выражение, как и (6.8.27), непосредственно следует из (6.8.24) и (6.8.26). (*Прим. перев.*)

**) В случае комплексных элементов $\mathbf{A}(kT)$ транспонируются комплексно сопряженные элементы.

Переходную матрицу состояния сопряженной дискретной системы

$$\varphi^{-1}[(k,\ k_0)T]\}^T$$

можно найти путем итераций уравнения (6.8.28). В результате получим

$$\{\varphi^{-1}[(k,\ k_0)T]\}^T = \prod_{n=k_0}^{k-1} [\mathbf{A}^{-1}(nT)]^T, \quad k > k_0. \tag{6.8.31}$$

Переходную матрицу состояния исходной системы при $k_0 < k$ можно найти «обратными итерациями» уравнения (6.8.1), т. е.

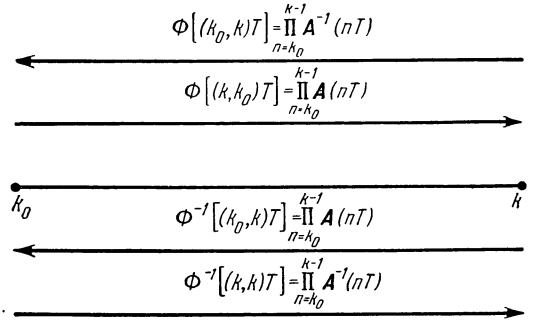


Рис. 6.8.2.

уравнение (6.8.1) переписывается как $\mathbf{x}(nT) = \mathbf{A}^{-1}(nT)\mathbf{x}[(n+1)T]$ и затем это выражение итерируется от $n=k$ до $n=k_0$. В результате получим

$$\mathbf{x}(k_0T) = \left[\prod_{n=k_0}^{k-1} \mathbf{A}^{-1}(nT)\right]\mathbf{x}(kT),$$

так что

$$\varphi[(k_0,\ k)T] = \prod_{n=k_0}^{k-1} \mathbf{A}^{-1}(nT), \qquad k > k_0. \tag{6.8.32}$$

Эти два уравнения показывают справедливость (6.8.14), а именно:

$$\varphi^{-1}[(k,\ k_0)T] = \varphi[(k_0,\ k)T], \qquad k > k_0.$$

Уравнение (6.8.31) получено «итерациями вперед» или «движением сопряженной системы вперед» от момента времени k_0T_0 к kT, тогда как уравнение (6.8.32) получено «обратными итерациями» или «движением исходной системы назад» от момента времени kT к k_0T. Это изображено на рис. 6.8.2.

Отметим, что вид переходной матрицы состояния для «возрастающего времени» (6.8.4) отличается от вида переходной матрицы состояния для «убывающего времени» (6.8.32). Это отличие обусловлено тем, что изменение направления течения времени в дискретной системе влечет за собой обращение матрицы $\mathbf{A}$ $\{\mathbf{x}(kT) = \mathbf{A}^{-1}(kT)\mathbf{x}[(k+1)T]\}$. Изменение направления течения времени в непрерывной системе влечет за собой просто изменение знака матрицы $\mathbf{A}$ $[d/d(-t) = -d/dt]$. Альтернативные формы переходной матрицы состояния показаны в таблице 6.8.1.

Таблица 6.8.1

Исходная система	Сопряженная система (транспонированная)
Прямое направление	Обратное направление
$\varphi[(k, k_0)T] = \prod_{n=k_0}^{k-1} \mathbf{A}(nT), \quad k > k_0$	$\varphi^{-1}[(k, k_0)T] = \prod_{n=k_0}^{k-1} \mathbf{A}^{-1}(nT), \quad k > k_0,$
$\varphi[(k_0, k)T] = \prod_{n=k}^{k_0-1} \mathbf{A}(nT), \quad k > k_0$	$\varphi^{-1}[(k_0, k)T] = \prod_{n=k}^{k_0-1} \mathbf{A}^{-1}(nT), \quad k_0 > k.$
Обратное направление	Прямое направление
$\varphi[(k_0, k)T] = \prod_{n=k_0}^{k-1} \mathbf{A}^{-1}(nT), \quad k > k_0$	$\varphi^{-1}[(k_0, k)T] = \prod_{n=k_0}^{k-1} \mathbf{A}(nT), \quad k > k_0$
$\varphi[(k, k_0)T] = \prod_{n=k}^{k_0-1} \mathbf{A}^{-1}(nT), \quad k_0 > k$	$\varphi^{-1}[(k, k_0)T] = \prod_{n=k}^{k_0-1} \mathbf{A}(nT), \quad k_0 > k$

§ 6.9. Общее решение

Общее решение системы уравнений состояния

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = \mathbf{A}(kT)\mathbf{x}(kT) + \mathbf{B}(kT)\mathbf{v}(kT),$$
$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{C}(kT)\mathbf{x}(kT) + \mathbf{D}(kT)\mathbf{v}(kT) \qquad (6.9.1)$$

можно найти путем итераций и индукции подобно методу получения переходной матрицы состояния. Однако с целью иллюстрации аналогии между дискретными и непрерывными системами воспользуемся сопряженной системой в методе, подобном методу интегрирующего множителя.

Переходная матрица состояния сопряженной системы $\{\varphi^{-1}[(k, k_0)T]\}^T$ должна удовлетворять уравнению (6.8.29). Транспонирование и умножение справа на $\mathbf{A}(kT)$ приводит к

$$\varphi^{-1}[k, k_0)T] = \varphi^{-1}[(k+1, k_0)T]\mathbf{A}(kT). \qquad (6.9.2)$$

Умножив уравнение (6.9.1) для $\mathbf{x}$ слева на $\varphi^{-1}[(k+1, k_0)T]$, а уравнение (6.9.2) — справа на $\mathbf{x}(kT)$ и определив разность между ними, получим

$$\varphi^{-1}[(k+1, k_0)T]\,\mathbf{x}[(k+1)T] - \varphi^{-1}[(k, k_0)T]\,\mathbf{x}(kT) = \\ = \varphi^{-1}[(k+1, k_0)T]\,\mathbf{B}(kT)\,\mathbf{v}(kT). \quad (6.9.3)$$

В результате замены k в уравнении (6.9.3) на m и суммирования обеих частей от k_0 до $k-1$ получим

$$\varphi^{-1}[(k, k_0)T]\,\mathbf{x}(kT) - \varphi^{-1}[(k_0, k_0)T]\,\mathbf{x}(k_0T) = \\ = \sum_{m=k_0}^{k-1} \varphi^{-1}[(m+1, k_0)T]\,\mathbf{B}(mT)\,\mathbf{v}(mT). \quad (6.9.4)$$

Ввиду $\varphi^{-1}[(k_0, k_0)T] = \mathbf{I}$ умножение слева на $\varphi[(k, k_0)T]$ дает

$$\mathbf{x}(kT) = \varphi[(k, k_0)T]\,\mathbf{x}(k_0T) + \\ + \sum_{m=k_0}^{k-1} \varphi[(k, m+1)T]\,\mathbf{B}(mT)\,\mathbf{v}(mT). \quad (6.9.5)$$

Первый член правой части уравнения (6.9.5) характеризует реакцию системы, обусловленную начальными условиями, тогда как второй член представляет совмещение реакций, вызываемых вынуждающей функцией. Это уравнение аналогично уравнению (5.10.6) для непрерывного случая.

Если исследуемая система с постоянными параметрами, то уравнение (6.9.5) записывается как сумма реакции от начальных условий и суммы *свертывания:*

$$\mathbf{x}(kT) = \varphi(k-k_0)\,\mathbf{x}(k_0T) + \sum_{m=k_0}^{k-1} \varphi(k-m-1)\,\mathbf{B}\mathbf{v}(mT). \quad (6.9.6)$$

Соответствующий выход $\mathbf{y}(kT)$ получается подстановкой уравнения (6.9.5) или (6.9.6) в (6.9.1), откуда

$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{C}(kT)\,\varphi[(k, k_0)T]\,\mathbf{x}(k_0T) + \\ + \sum_{m=k_0}^{k-1} \mathbf{C}(kT)\,\varphi[(k, m+1)T]\,\mathbf{B}(mT)\,\mathbf{v}(mT) + \\ + \mathbf{D}(kT)\,\mathbf{v}(kT) \quad (6.9.7)$$

для систем с переменными параметрами или

$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{C}\varphi(k-k_0)\,\mathbf{x}(k_0T) + \\ + \sum_{m=k_0}^{k-1} \mathbf{C}(kT)\,\varphi[(k, m+1)T]\,\mathbf{B}(mT)\,\mathbf{v}(mT) + \mathbf{D}(kT)\,\mathbf{v}(kT) \quad (6.9.8)$$

для систем с постоянными параметрами.

Для стационарной системы часто удобнее пользоваться методом частотной области. В этом случае $\mathbf{Y}(z)$ находится непосредственным преобразованием уравнения (6.9.1). В результате получим

$$\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} z\mathbf{x}(0) + (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{V}(z), \tag{6.9.9}$$

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} z\mathbf{x}(0) + [\mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]\mathbf{V}(z). \tag{6.9.10}$$

С целью иллюстрации применения различных методов рассмотрим следующий пример.

Пример 6.9.1. Определить решение разностного уравнения

$$y = (k+2) + 5y(k+1) + 6y(k) = 1 \quad (T = 1)$$

каждым из указанных ниже методов.

1. *Классическое решение. Временна́я область.* Предположим $y_H(k) = \beta^k$. Тогда $(\beta^2+5\beta+6)\beta^k = 0$ или $\beta_1 = -2$ и $\beta_2 = -3$. Решение однородного уравнения $y_H(k) = C_1(-2)^k + C_2(-3)^k$. Предположим, что $y_P(k) = C_3$. Тогда $C_3 + 5C_3 + 6C_3 = 1$ или $C_3 = 1/12$. Общее решение

$$y(k) = C_1(-2)^k + C_2(-3)^k + \frac{1}{12}.$$

Используя начальные условия $y(0)$ и $y(1)$, имеем

$$y(0) = C_1 + C_2 + \frac{1}{12} \quad \text{и} \quad y(1) = -2C_1 - 3C_2 + \frac{1}{12}.$$

Постоянные C_1 и C_2 равны

$$C_1 = 3y(0) + y(1) - \frac{1}{3},$$

$$C_2 = \frac{1}{4} - 2y(0) - y(1).$$

Подстановка этих постоянных в общее решение дает

$$y(k) = [3(-2)^k - 2(3)^k]\,y(0) + [(-2)^k - (-3)^k]\,y(1) + \left[\frac{1}{4}(-3)^k - \frac{1}{3}(-2)^k + \frac{1}{12}\right].$$

2. *Метод переменных состояний. Временна́я область.* Из примера 6.8.1 переходная матрица состояния этой системы имеет вид

$$\varphi(k) = \begin{bmatrix} 3(-2)^k - 2(-3)^k & (-2)^k - (-3)^k \\ -6[(-2)^k - (-3)^k] & -2(-2)^k + 3(-3)^k \end{bmatrix}.$$

Матрицы $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ равны

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0], \quad \mathbf{D} = [0].$$

Выход $\mathbf{y}(k)$ согласно уравнению (6.9.8) задается выражением

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\varphi(k)\mathbf{x}(0) + \sum_{m=0}^{k-1} \mathbf{C}\varphi(k-m-1)\,\mathbf{B}\mathbf{v}(mT) + \mathbf{D}\mathbf{v}(kT),$$

которое в рассматриваемом случае сводится к

$$y(k) = \varphi_{11}(k)\, y(0) + \varphi_{12} y(1) + \sum_{m=0}^{k-1} \varphi_{12}(k-m-1).$$

Выполнение суммирования (в случае воздействия на входе системы) может потребовать определенного искусства при нахождении выражения суммы ряда в замкнутой форме. Для выражений рассматриваемого типа полезно воспользоваться формулой суммирования [13]

$$\sum_{m=0}^{k-1} a^{k-m-1} = \frac{1-a^k}{1-a} \text{ (сумма геометрической прогрессии).}$$

Так как $\varphi_{12}(k-m-1) = (-2)^{k-m-1} - (-3)^{k-m-1}$, суммирование в этом случае дает

$$\frac{1-(-2)^k}{1-(-2)} - \frac{1-(-3)^k}{1-(-3)} = \frac{1}{12} + \frac{1}{4}(-3)^k - \frac{1}{3}(-2)^k.$$

Тогда общее решение имеет вид

$$y(k) = [3(-2)^k - 2(-3)^k]\, y(0) + [(-2)^k - (-3)^k]\, y(1) + \\ + \left[\frac{1}{4}(-3)^k - \frac{1}{3}(-2)^k + \frac{1}{12}\right].$$

Приведенное выше выражение для суммы геометрической прогрессии особенно полезно для нахождения суммы матриц

$$\sum_{m=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-m-1}.$$

Можно применить метод Кэли — Гамильтона, $F(\lambda_i) = (1-\lambda_i^k)/(1-\lambda_i)$. При нахождении в замкнутой форме выражения для суммы ряда (если она существует) полезна формула *суммирования по частям*, аналогичная формуле *интегрирования по частям*. Эта формула имеет вид (см. задачу 2.12)

$$\sum_{M}^{N} u(k)\, \Delta v(k) = [u(k)\, v(k)]_M^{N+1} - \sum_{M}^{N} v(k+1)\, \Delta u(k).$$

В качестве примера сумму

$$\sum_{0}^{N} k r^k \qquad (r \neq 1)$$

можно найти, положив $u(k) = k$, $\Delta v(k) = r^k$. Тогда $\Delta u(k) = 1$,

$$v(k) = \sum_{n=0}^{k-1} r^n + C_1 = \frac{r^k - 1}{r-1} + C_1 = \frac{r^k}{r-1} + C_2.$$

Для удобства пусть $C_2 = 0$. Тогда

$$\sum_{0}^{N} k r^k = \left[\frac{k r^k}{r-1}\right]_0^{N+1} - \frac{1}{r-1} \sum_{0}^{N} r^{k+1} = \\ = \frac{1}{(r-1)^2}\left[N r^{N+2} - (N+1) r^{N+1} + r\right], \qquad r \neq 1.$$

3. *Метод z-преобразования.* z-преобразование обеих частей данного разностного уравнения приводит к

$$z^2 [Y(z) - y(0) - z^{-1}y(1)] + 5z [Y(z) - y(0)] + 6Y(z) = \frac{z}{z-1},$$

или

$$Y(z) = \frac{z/(z-1) + z[zy(0) + y(1) + 5y(0)]}{(z+2)(z+3)}.$$

Полюсы этой функции $z=1$, -2, -3. Так как

$$y(k) = \sum \text{ вычетов } Y(z)\, z^{k-1} \text{ в полюсах } Y(z),$$

вычисляем вычеты.

$$R_1 = (z-1)\, Y(z)\, z^{k-1}\big|_{z=1} = \frac{1}{12},$$

$$R_2 = (z+2)\, Y(z)\, z^{k-1}\big|_{z=-2} = \left[-\frac{1}{3} + 3y(0) + y(1)\right](-2)^k,$$

$$R_3 = (z+3)\, Y(z)\, z^{k-1}\big|_{z=-3} = \left[\frac{1}{4} - 2y(0) - y(1)\right](-3)^k.$$

Тогда общее решение имеет вид

$$y(k) = [3(-2)^k - 2(-3)^k]\, y(0) + \\ + [(-2)^k - (-3)^k]\, y(1) + \left[\frac{1}{4}(-3)^k - \frac{1}{3}(-2)^k + \frac{1}{12}\right].$$

4. *Метод пространства состояний. Частотная область.* Согласно уравнению (6.9.10) z-преобразование выхода $\mathbf{y}(k)$ равно

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} z x(0) + [\mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]\, \mathbf{V}(z).$$

Матрица $(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ из примера 6.8.4 задается как

$$(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} z+5 & 1 \\ -6 & z \end{bmatrix}}{(z+2)(z+3)}.$$

Матрицы $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ приводились в п. 2 этого примера:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1\ 0], \quad \mathbf{D} = [0].$$

Тогда преобразование выхода $Y(z)$ равно

$$Y(z) = \frac{z(z+5)}{(z+2)(z+3)}\, y(0) + \frac{z}{(z+2)(z+3)}\, y(1) + \frac{z}{(z-1)(z+2)(z+3)}.$$

Это соответствует $Y(z)$, найденному в п. 3 данного примера. Следовательно, результат совпадает с полученным в трех предыдущих пунктах данного примера.

5. *Метод переменных состояния. Нормальная форма.* Модальная матрица $\mathbf{M}$ находится путем последовательных подстановок характеристических чисел $\mathbf{A}$ в матрицу $\operatorname{Adj}[\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}]$. Характеристические числа $\mathbf{A}$ $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -3$, а

$$\operatorname{Adj}[\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}] = \begin{bmatrix} \lambda+5 & 1 \\ -6 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{M}^{-1}=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Так как

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}=\mathbf{\Lambda}=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix},$$

преобразование $\mathbf{q}=\mathbf{M}^{-1}\mathbf{x}$ приводит к виду

$$\mathbf{q}(k+1)=\mathbf{\Lambda}\mathbf{q}(k)+\mathbf{B}_n\mathbf{v}(k) \qquad (T=1),$$
$$y(k)=\mathbf{C}_n\mathbf{q}(k)+\mathbf{D}_n\mathbf{v}(k),$$

где $\mathbf{B}_n=\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}_n=\mathbf{C}\mathbf{M}$. Поэтому $q_1=3x_1+x_2$, $q_2=-2x_1-x_2$ и

$$\mathbf{B}_n=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{C}_n=[1\ \ 1].$$

Тогда согласно приведенному выше уравнению, а также (6.6.4), выход $\mathbf{y}(k)$ равен

$$\mathbf{y}(k)=\mathbf{C}_n\mathbf{\Lambda}^k\mathbf{q}(0)+\sum_{m=0}^{k-1}\mathbf{C}_n\mathbf{\Lambda}^{k-m-1}\mathbf{B}_n\mathbf{v}(m).$$

Так как матрица $\mathbf{\Lambda}$ — диагональная, то для нахождения $\mathbf{\Lambda}^k$ требуется просто возвести в k-ю степень элементы $\mathbf{\Lambda}$. Это одно из преимуществ применения этого метода. Имеем

$$y(k)=(-2)^kq_1(0)+(-3)^kq_2(0)+\sum_{m=0}^{k-1}\{(-2)^{k-m-1}-(-3)^{k-m-1}\}$$

или

$$y(k)=(-2)^kq_1(0)+(-3)^kq_2(0)+\left[\frac{1}{4}(-3)^k-\frac{1}{3}(-2)^k+\frac{1}{12}\right].$$

Если требуется выразить $y(k)$ через исходные начальные условия, то выражения $q_1(0)=3x_1(0)+x_2(0)=3y(0)+y(1)$ и $q_2(0)=-2x_1(0)-x_2(0)=-2y(0)-y(1)$ приводят к

$$y(k)=[3y(0)-y(1)](-2)^k-[2y(0)+y(1)](-3)^k+$$
$$+\left[\frac{1}{4}(-3)^k-\frac{1}{3}(-2)^k+\frac{1}{12}\right].$$

6. *Метод разложения на частоты.* Из

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{M}^{-1}=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

(см. п. 5) следует, что

$$\mathbf{u}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{u}_2=\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

образуют базис, а

$$\mathbf{r}_1=\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{r}_2=\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

образуют двойственный базис. Поэтому согласно уравнению (6.6.6)

$$y(k) = x_1(k) = [3x_1(0) + x_2(0)](-2)^k + [-2x_1(0) - x_2(0)](-3)^k + \\ + \sum_{m=0}^{k-1} [(-2)^{k-m-1} - (-3)^{k-m-1}].$$

Это такое же выражение, как и приведенное в п. 2 для $y(k)$ относительно ф. Поэтому выполнение указанных операций суммирования и подстановка $y(0) = x_1(0)$, $y(1) = x_2(0)$ дают искомый результат.

7. *Метод переменных состояния. Разложение на элементарные дроби.* Так как

$$H(z) = \frac{1}{z^2 + 5z + 6} = \frac{1}{z+2} - \frac{1}{z+3},$$

то

$$Y(z) = \frac{V(z)}{z+2} - \frac{V(z)}{z+3} = X_1(z) + X_2(z)$$

или $y(k) = x_1(k) + x_2(k)$, где x_1 и x_2 удовлетворяют разностным уравнениям первого порядка:

$$x_1(k+1) + 2x_1(k) = v(k) \quad \text{и} \quad x_2(k+1) + 3x_2(k) = -v(k).$$

Следовательно, матрицы **A**, **B**, **C** и **D** равны

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \;\; 1], \quad \mathbf{D} = [0].$$

Так как они в точности совпадают с полученными в п. 5, то $y(k)$ равен

$$y(k) = (-2)^k x_1(0) + (-3)^k x_2(0) + \left[\frac{1}{4}(-3)^k - \frac{1}{3}(-2)^k + \frac{1}{12}\right].$$

Однако, так как передаточная функция не дает ключ к установлению взаимосвязи **y** и **x**, ее следует определять путем исследования $y(k)$. Это необходимо в связи с тем, что известные начальные условия выражаются посредством $y(0)$ и $y(1)$. Требуемые соотношения находятся подстановкой $k=0$ и $k=1$ в $y(k) = x_1(k) + x_2(k)$. Получим $y(0) = x_1(0) + x_2(0)$ и $y(1) = x(1) + x_2(1)$. Теперь на основе уравнений для $x_1(k+1)$ и $x_2(k+1)$ при $k=1$ эти выражения станут равными

$$y(0) = x_1(0) + x_2(0),$$
$$y(1) = -2x_1(0) - 3x_2(0).$$

Решение данных двух уравнений приводит к соотношениям

$$x_1(0) = 3y(0) + y(1)$$

и

$$x_2(0) = -2y(0) - y(1),$$

совпадающим с найденным в п. 5 для q. Хотя для системы второго порядка указанная процедура не представляет особых затруднений, для систем более высокого порядка со многими входами и выходами она может оказаться трудоемкой.

Каждый из рассмотренных методов имеет свои достоинства и недостатки. Для стационарных систем с одним входом и выходом, несомненно, наиболее простым является метод z-преобразования. Для систем со многими входами и выходами целесообразны матричные методы. Какой из матричных методов следует использовать — это вопрос другой. Так как нестационарные системы почти невозможно решить аналитически, то для вычислительных целей наилучшим является их временно́е представление. В случае стационарных систем весьма полезно z-преобразование уравнений состояния, так как существуют многочисленные таблицы z-преобразований. Использование z-преобразования позволяет избежать ряд трудностей при выполнении операций суммирования во временно́й области. Нормальная форма, по-видимому, наилучшая для математических доказательств, для временно́го анализа свободного движения систем. Когда на систему действует вынуждающая функция, наиболее удобным оказывается z-преобразование нормальной формы.

Устойчивость стационарных дискретных систем. Переходная матрица состояния стационарной дискретной системы стремится к нулю при стремлении k к бесконечности, если характеристические числа $\mathbf{A}$ расположены внутри единичной окружности. Если же характеристическое число лежит на единичной окружности и имеет порядок, равный единице, то при стремлении k к бесконечности $\varphi(k)$ ограничена. При каком-либо характеристическом числе, лежащем вне единичной окружности, или в случае кратных характеристических чисел, лежащих на единичной окружности, при стремлении k к бесконечности $\varphi(k)$ неограниченно возрастает. Эти утверждения можно доказать на основе методе Кэли — Гамильтона получения матрицы $\mathbf{A}^k$, которая зависит от определенных элементов α_m, так что

$$\mathbf{A}^k = \sum_{m=0}^{n-1} \alpha_m \mathbf{A}^m,$$

где n-порядок матрицы $\mathbf{A}$. α_k находятся из уравнений

$$F(\lambda)|_{\lambda=\lambda_i} = \sum_{m=0}^{n-1} \alpha_m \lambda_i^m = \lambda_i^k$$

или

$$\frac{d^p}{d\lambda^p} F(\lambda)|_{\lambda=\lambda_i} = \frac{d^p}{d\lambda^p}\left(\sum_{m=0}^{n-1} \alpha_m \lambda^m\right)\Bigg|_{\lambda=\lambda_i} = \frac{d^p}{d\lambda^p}(\lambda^k)\Big|_{\lambda=\lambda_i},$$

где $p = 0, 1, 2, \ldots, r-1$ для характеристического числа порядка r. При различных характеристических числах элементы $\mathbf{A}^k$

состоят из линейных комбинаций элементов типа $(\lambda_i)^k$. Эти элементы стремятся к нулю при стремлении k к бесконечности, если $|\lambda_i| < 1$, ограничены, если $|\lambda_i| = 1$ и становятся неограниченными, если $|\lambda_i| > 1$. При кратных характеристических числах элементы $\mathbf{A}^k$ состоят из линейных комбинаций элементов типа $k\lambda_i^{k-1}$. Ясно, что при стремлении k к бесконечности эти элементы неограничены, если $|\lambda_i| \geqslant 1$, и стремятся к нулю, если $|\lambda_i| < 1$.

§ 6.10. Импульсная матричная характеристика

Выход $\mathbf{y}(kT)$ линейной нестационарной системы запишем при помощи матриц $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$, положив в уравнении (6.9.7) k_0 равным $-\infty$:

$$\mathbf{y}(kT) = \sum_{m=-\infty}^{k-1} \mathbf{C}(kT)\varphi[(k, m+1)T]\mathbf{B}(mT)\mathbf{v}(mT) + \\ + \mathbf{D}(kT)\mathbf{v}(kT). \quad (6.10.1)$$

Через импульсную матричную характеристику выход $\mathbf{y}(kT)$ выражается посредством

$$\mathbf{y}(kT) = \sum_{m=-\infty}^{k} \mathbf{H}[(k, m)T]\mathbf{v}(mT). \quad (6.10.2)$$

Из сравнения уравнений (6.10.1) и (6.10.2) следует, что импульсная матричная характеристика равна

$$\mathbf{H}[(k, k_0)T] = \begin{cases} \mathbf{C}(kT)\varphi[(k, k_0+1)T]\mathbf{B}(k_0T), & k \geqslant k_0+1, \\ \mathbf{D}(kT), & k = k_0, \\ [0], & k < k_0. \end{cases} \quad (6.10.3)$$

Импульсная матричная характеристика стационарной системы

$$\mathbf{H}[(k-k_0)T] = \begin{cases} \mathbf{C}\varphi[(k-k_0-1)]\mathbf{B}, & k \geqslant k_0+1, \\ \mathbf{D}, & k = k_0, \\ [0], & k < k_0, \end{cases} \quad (6.10.4)$$

Согласно уравнению (6.9.10) импульсная матричная характеристика в частотной области имеет вид

$$\mathbf{H}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}. \quad (6.10.5)$$

Пример 6.10.1. На рис. 6.10.1 представлена простая импульсная система. Блок $(1 - e^{-sT})/s$ обычно называется фиксатором нулевого порядка,

так как значения поступающих на его вход мгновенных импульсов в моменты kT он поддерживает на выходе до моментов $(k+1)T$. Определить импульсную матричную характеристику $\mathbf{H}(kT)$, полагая $T=1$.

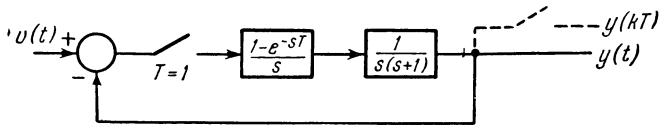


Рис. 6.10.1.

Передаточная функция $G(z)$ прямой цепи равна

$$G(z)=(1-z^{-1})\,\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right]=\frac{e^{-1}-1}{z-e^{-1}}+\frac{1}{z-1}.$$

Согласно этой передаточной функции схему импульсной системы на рис. 6.10.1 можно представить в виде дискретной системы (рис. 6.10.2). На этой схеме прямая цепь разбита на участки, соответствующие элементам

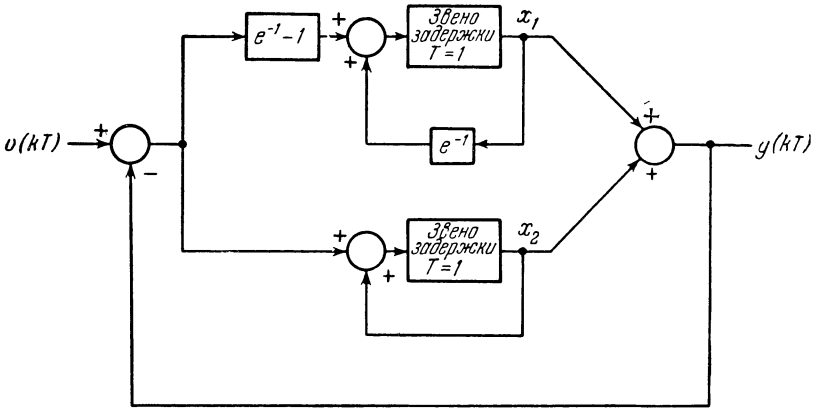


Рис. 6.10.2.

разложения на элементарные дроби. Тогда непосредственно по схеме записываются уравнения состояния замкнутой системы, имеющие вид

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1-e^{-1} \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} e^{-1}-1 \\ 1 \end{bmatrix}v(k),$$

$$y(k)=[1\ \ 1]\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}.$$

Согласно уравнению (6.10.4) импульсная матричная характеристика $\mathbf{H}(k)$ равна

$$\mathbf{H}(k)=[1\ \ 1]\begin{bmatrix} \varphi_{11}(k-1) & \varphi_{12}(k-1) \\ \varphi_{21}(k-1) & \varphi_{22}(k-1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-1}-1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Так как

$$\varphi(k-1) = \mathbf{A}^{(k-1)} = \alpha_0\mathbf{I} + \alpha_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_0 + \alpha_1 & \alpha_1 - \alpha_1 e^{-1} \\ -\alpha_1 & \alpha_0 \end{bmatrix},$$

то $H(k) = \alpha_0 e^{-1} + \alpha_1(1 - e^{-1})$, где следует определить α_0 и α_1. Корни характеристического уравнения

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \lambda^2 - \lambda + (1 - e^{-1}) = 0$$

равны $\lambda_{1,2} = Ne^{\pm j\theta}$, где $N=0{,}795$, $\theta=0{,}680$ *радиан*. Применив метод Кэли — Гамильтона, где $F(\lambda_i) = \lambda^{k-1}$, получим уравнения

$$N^{(k-1)}e^{j(k-1)\theta} = \alpha_0 + \alpha_1 N e^{j\theta},$$

$$N^{(k-1)}e^{-j(k-1)\theta} = \alpha_0 + \alpha_1 N e^{-j\theta}.$$

Разрешив их относительно α_0 и α_1 получим

$$\alpha_0 = N^{(k-1)}[\cos(k-1)\theta - \operatorname{ctg}\theta \sin(k-1)\theta],$$

$$\alpha_1 = \frac{N^{(k-2)}\sin[(k-1)\theta]}{\sin\theta}.$$

Тогда импульсная матричная характеристика равна

$$H(k) = e^{-1}N^{(k-1)}[\cos(k-1)\theta - \operatorname{ctg}\theta\sin(k-1)\theta] + \frac{(1-e^{-1})N^{(k-2)}}{\sin\theta}\sin(k-1)\theta,$$

или

$$H(k) = (0{,}795)^{(k-1)}\{0{,}368\cos[0{,}680(k-1)] + 0{,}724\sin[0{,}680(k-1)]\}.$$

Этот результат можно проверить обычными методами теории обратной связи,

$$H(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{0{,}368(z+0{,}72)}{(z-Ne^{j\theta})(z-Ne^{-j\theta})} \begin{cases} N = 0{,}795, \\ \theta = 0{,}680 \text{ радиан}. \end{cases}$$

Применив обратное z-преобразование, получим

$$H(k) = 0{,}368N^{(k-1)}\left[\frac{(Ne^{j\theta}+0{,}72)e^{j(k-1)\theta} - (Ne^{-j\theta}+0{,}72)e^{-j(k-1)\theta}}{N(e^{j\theta}-e^{-j\theta})}\right].$$

После ряда операций его можно записать как

$$H(k) = 0{,}368N^{(k-1)}\left[\cos(k-1)\theta + \left(\operatorname{ctg}\theta + \frac{0{,}72}{N\sin\theta}\right)\sin(k-1)\theta\right] =$$

$$= (0{,}795)^{(k-1)}\{0{,}368\cos[0{,}680(k-1)] + 0{,}724\sin[0{,}680(k-1)]\}.$$

Элементы импульсной матричной характеристики нестационарной системы можно получить путем моделирования способом, аналогичным применяемому для непрерывных систем.

i-й выход $y_i(kT)$ системы с m входами и p выходами задается в виде

$$y_i(kT) = \sum_{n=-\infty}^{k}\sum_{j=1}^{m} h_{ij}[(k,n)T]\,v_j(nT). \qquad (6.10.6)$$

j-й *столбец* $\mathbf{H}[(k, n)T]$ можно получить, полагая все входы, кроме j-го, равными нулю и подавая единичную функцию на j-й вход в момент времени nT. Выходы системы равны $h_{ij}[(k, n)T]$ ($i = 1, 2, \ldots, p$; j — фиксированная величина). Для получения полной реакции $h_{ij}[(k, n)T]$ как функции k и n следует проделать ряд этапов моделирования, начиная каждый из них в различное время n_1T, n_2T. Результаты этапов должны быть представлены в функции nT — момента времени приложения единичной функции. Указанные операции следует проводить для различных j до тех пор, пока не будут получены все m столбцов импульсной матричной характеристики. Это та же самая задача, что излагалась в пятой главе, где подобным образом находилась импульсная матричная характеристика $\mathbf{H}(t, \tau)$. Однако в дискретном случае разностные уравнения могут решаться на цифровой вычислительной машине; на ней же может выполняться и необходимое определение $\mathbf{H}(t, \tau)$ в функции τ. В связи с этим дискретная модифицированная сопряженная система не рассматривается.

Пример 6.10.2. В § 5.11 исследовалось дифференциальное уравнение $\ddot{y} + t\dot{y} + y = 0$. Путем ряда этапов моделирования для различных τ и построения результирующих кривых для фиксированных $t=T$ получена импульсная характеристика $h(T, \tau)$. Результаты отдельных этапов моделирования показаны на рис. 5.11.2, *а*, а результаты построения при фиксированных t изображены на рис. 5.11.2, *б*. Выполним те же операции с дискретным вариантом этого дифференциального уравнения. Указанный метод часто используется для численного решения дифференциальных уравнений с переменными параметрами при помощи специального счетного устройства или простейшей программы для цифровой вычислительной машины.

Дискретный аналог данного уравнения получается следующим образом. Так как

$$\frac{d^2y}{dt} = \lim_{h\to 0}\left[\frac{y(t+h) - 2y(t) + y(t-h)}{h^2}\right],$$

$$\frac{dy}{dt} = \lim_{h\to 0}\left[\frac{y(t+h) - y(t)}{h}\right],$$

приближенное решение можно получить, считая $h=T$, $t=kT$ и выбирая «малые» значения T. Таким образом,

$$\frac{y(kT+T) - 2y(kT) + y(kT-T)}{T^2} + \frac{kT\,[y(kT+T) - y(kT)]}{T} + y(kT) = 0,$$

или

$$(1 + kT^2)\,[y(kT+T)] + (T^2 - kT^2 - 2)\,[y(kT)] + [y(kT-T)] = 0.$$

Начальные условия $y(\tau)=0$, $\dot{y}(\tau)=1$ заменяются на

$$y(k_0T) = 0,$$

$$\frac{y(k_0T+T) - y(k_0T)}{T} = 1,$$

или

$$y(k_0T) = 0 \quad \text{и} \quad y(k_0T+T) = T.$$

Полагая $T = 0{,}05$ и $k = 0, 4, 8, \ldots, 48$, получим точки, изображенные на рис. 6.10.3, *а*. Для цифрового вычислительного устройства получение этих точек — сравнительно простая задача, причем оно может также выдавать

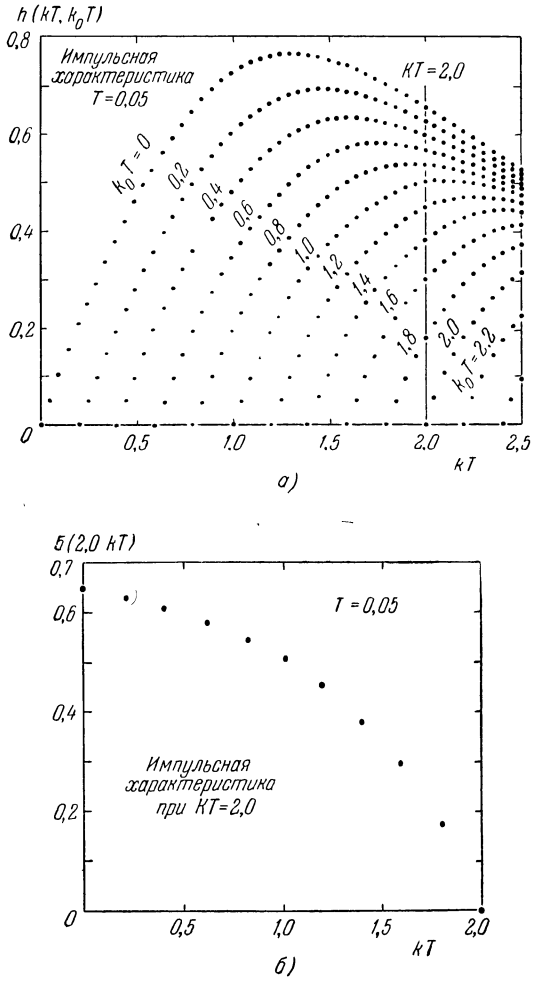


Рис. 6.10.3.

данные, соответствующие фиксированному kT и различным k_0T. Можно также использовать специальное счетное устройство. Однако вычисление каждой точки следует проводить с достаточной точностью, так как может произойти быстрое накопление ошибок округления. Интересующийся читатель может ознакомиться с множеством работ, посвященных численному решению дифференциальных уравнений [14, 15].

В качестве оценки точности, которую можно достичь численными методами, в таблице 6.10.1 приведены результаты моделирования непрерывной системы и результаты приближенного численного решения для $\tau=k_0=0$. Результаты численного решения даются с учетом третьего знака, а моделирования непрерывной системы — с учетом второго знака, причем это точность считывания данных исходной записи кривой моделирования. Из сравнения видно, что дискретное моделирование воспроизводит результаты непрерывного моделирования в пределах точности записи непрерывной информации.

Таблица 6.10.1

$T=0{,}05$					
k	$h(k, 0)$	$h(t, 0)$	k	$h(k, 0)$	$h(t, 0)$
0	0	0	22	0,751	0,75
2	0,100	0,10	24	0,766	0,76
4	0,198	0,20	26	0,771	0,77
6	0,291	0,29	28	0,769	0,77
8	0,380	0,38	30	0,76	0,76
10	0,461	0,46	32	0,746	0,75
12	0,534	0,53	34	0,727	0,73
14	0,597	0,60	36	0,705	0,71
16	0,651	0,65	38	0,679	0,68
18	0,695	0,69	40	0,653	0,65
20	0,728	0,72			

На рис. 6.10.3, *б* изображены точки, соответствующие абсциссе $kT = 2{,}0$ на рис. 6.10.3, *а*. Эти точки (рис. 6.10.3, *б*) изображают импульсную характеристику $h(2{,}0;\ k_0T)$ системы при $kT=2{,}0$ как функцию момента времени приложения единичного входного сигнала. Сравнение этих характеристик, полученных при дискретном и непрерывном моделировании (см. рис. 5.11.2, *б*), приведено в таблице 6.10.2. Сравнение показывает, что дискретное моделирование достаточно эффективно, однако уступает в точности непрерывному. Различие между непрерывными системами и их дискретными аналогами обусловлены применяемым методом аппроксимации, а также накоплением ошибок округления.

В связи с тем, что эти эффекты сильно сказываются при больших kT, данные при $kT<KT$ точнее, чем при $kT=KT$.

Рис. 6.10.3, *б* можно также получить дискретным моделированием модифицированного сопряженного уравнения. При исходном дифференциальном уравнении $\ddot{y}+t\dot{y}+y=0$ сопряженное дифференциальное уравнение имеет вид $\ddot{\alpha}-(d/dt)(t\alpha)+\alpha=0$ или $\ddot{\alpha}-t\dot{\alpha}=0$. Произведя замену переменной $t=T_0-T_1$, получим модифицированное сопряженное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\alpha}{dt_1^2}+(T_0-t_1)\frac{d\alpha}{dt_1}=0.$$

Дискретное моделирование этого уравнения производится так же, как и исходного дифференциального уравнения. Результирующее разностное уравнение имеет вид

$$[1+(K-k')T^2]\,y(k'T+T)+[-2-(K-k')T^2]\,y(k'T)+y(k'T-T)=0,$$

Таблица 6.10.2

$T = 0{,}05$		
k	$h(2{,}0;\ k_0T)$	$h(2{,}0;\ \tau)$
0	0,653	0,65
4	0,628	0,63
8	0,603	0,60
12	0,574	0,56
16	0,541	0,53
20	0,501	0,48
24	0,45	0,43
28	0,385	0,37
32	0,297	0,28
36	0,175	0,17
40	0	0

Таблица 6.10.3

$KT = 1{,}0,\ \ T = 0{,}1$		
k	$h^*_{k'}(k',\ 0)$	$h^*_{t_1}(t_1,\ 0)$
0	0	0
1	0,100	—
2	0,191	0,18
3	0,276	—
4	0,350	0,33
5	0,420	—
6	0,487	0,47
7	0,550	—
8	0,612	0,60
9	0,673	—
10	0,733	0,72

где $KT = T_0$ — фиксированный конец времени. В таблице 6.10.3 приводится сравнение точек, полученных в результате моделирования этого уравнения и путем моделирования непрерывной системы.

Передаточные матрицы. *Передаточная матрица* системы с одним выходом иногда используется для описания реакции на единичный сигнал. Передаточная матрица представляет собой упорядоченный набор элементов $h(iT,\ jT)$, где i указывает на строку, а j — на столбец расположения данного элемента. Общий вид передаточной матрицы

$$H_T(kT,\ k_0T) = \begin{bmatrix} h(0,\ 0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h(T,\ 0) & h(T,\ T) & 0 & \dots & 0 \\ h(2T,\ 0) & h(2T,\ T) & h(2T,\ 2T) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h(mT,\ 0) & h(mT,\ T) & h(mT,\ 2T) & \dots & h(mT,\ mT) \end{bmatrix} \tag{6.10.7}$$

Элементы справа от $h(iT,\ iT)$ равны нулю, так как предполагается, что система физически реализуемая, или без упреждения. Если вход $v(kT)$ представить в виде вектора столбца с составляющими $v(0)$, $v(T)$, $v(2T)$, ..., $v(mT)$, то выход системы можно записать как

$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{H}_T(kT,\ k_0T)\,\mathbf{v}(k_0T). \tag{6.10.8}$$

Понятно, что вектор $y(kT)$ представляется в виде вектора-столбца с составляющими $y(0)$, $y(T)$, $y(2T)$, ..., $y(mT)$. Тогда i-я

составляющая вектора $y(kT)$ равна

$$y(iT) = \sum_{k_0=0}^{i} h[(i, k_0)T]\, v(k_0T). \tag{6.10.9}$$

Для системы с постоянными параметрами элементы передаточной матрицы равны $h(iT - jT)$, причем аргументом служит разность между моментом наблюдения и моментом подачи воздействия. Следовательно,

$$\mathbf{H}_T(kT = \begin{bmatrix} h(0) & 0 & 0 & 0 \\ h(T) & h(0) & 0 & 0 \\ h(2T) & h(T) & h(0) & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h(mT) & h(mT-T) & h(mT-2T) & h(0) \end{bmatrix}. \tag{6.10.10}$$

Приведенные примеры неэффективны для систем с несколькими входами и выходами. Однако они находят некоторое применение в системах с одним входом и выходом или в системах, содержащих ряд таких систем, связанных между собой *).

Пример 6.10.3. Повторно решить пример 1.9.1, воспользовавшись для описания передаточной матрицей.

$y(k)$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ записывается как

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{D}_T(k)\,\mathbf{v}(k),$$

где

$$\mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

и из примера 1.9.1

$$\mathbf{D}_T(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 4 & 2 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ 8 & 4 & 2 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{v}(k) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}.$$

---

*) Подобные системы ничем особым не отличаются от систем с многими входами и выходами, образуя с ними класс многосвязных систем. В этом плане последние два предложения несколько противоречивы. *(Прим. ред.)*

Отметим, что, определения

$$\mathbf{V}_T(k)=\begin{bmatrix} v(0) & 0 & \cdot & \dots & \dots \\ v(1) & v(0) & 0 & \dots & \dots \\ v(2) & v(1) & v(0) & 0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

и

$$\mathbf{d}(k)=\begin{bmatrix} d(0) \\ d(1) \\ d(2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix},$$

$\mathbf{y}(k)$ можно также записать в виде $\mathbf{y}(k)=\mathbf{V}_T(k)\mathbf{d}(k)$.

Пример 6.10.4. Написать выражение $y(kT)$ $(k=0, 1, 2, \dots)$ для системы из примера 3.13.6.

Определив указанные передаточные матрицы и векторы согласно приведенному выше, имеем

$$\mathbf{q}(kT)=\mathbf{v}(kT)-\mathbf{G}\mathbf{H}_T(kT)\,\mathbf{q}(kT)$$

или

$$\mathbf{q}(kT)=[\mathbf{I}+\mathbf{G}\mathbf{H}_T(kT)]^{-1}\,\mathbf{v}(kT).$$

Тогда

$$\mathbf{y}(kT)=\mathbf{G}_T(kT)\,[\mathbf{I}+\mathbf{G}\mathbf{H}_T(kT)]^{-1}\,\mathbf{v}(kT).$$

§ 6.11. Метод наименьших квадратов

В предыдущей главе вывод выражения для среднеквадратической оценки выходов непрерывных систем основывался на понятии модифицированной сопряженной системы. Как указывалось в предыдущем параграфе, дискретная модифицированная сопряженная система имеет ограниченное значение, так как программа цифрового вычислительного устройства может быть построена таким образом, чтобы преодолеть аналогичные трудности в непрерывных системах. Поэтому дальнейшее изучение линейных дискретных систем отступает от параллелизма с предыдущей главной и посвящено в основном рассмотрению метода наименьших квадратов, который имеет существенное значение при решении задач из теории связи, управления, численного анализа, прогнозирования и других. Перед завершением проработки материала данного параграфа читателю полезно было бы ознакомиться с его непрерывным аналогом [16, 17].

Предположим, что выход $y(kT)$ линейной стационарной дискретной системы задается в виде взвешенной суммы имеющегося конечного числа «прошлых» значений входа $v[(k-m)T]$,

$m = 0, 1, 2, \ldots, M - 1$. Это можно записать с помощью весовых множителей $h(mT)$ так:

$$y(kT) = v(kT)\,h(0) + v[(k-1)T)]\,h(T) + \ldots + \\ + v\,[(k-M-1)T]\,h[(M-1)T] = \\ = \sum_{m=0}^{M-1} v\,[(k-m)T]\,h(mT).$$

Для определения весовых множителей системы следует произвести $J \geqslant M$ измерений $v\,[(k-m)T]$, $m = 0, 1, \ldots, M-1$ и соответствующие измерения $y(kT)$. Получим J уравнений вид

$$\begin{aligned} v_{11}h_1 + v_{12}h_2 + \ldots + v_{1M}h_M &= y_1, \\ v_{21}h_1 + v_{22}h_2 + \ldots + v_{2M}h_M &= y_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_{J1}h_1 + v_{J2}h_2 + \ldots + v_{JM}h_M &= y_J, \end{aligned} \tag{6.11.1}$$

где индекс при y и первый индекс при v означают номер измерения. Индекс при h и второй индекс при v означают значение аргумента $(m+1)T$. Если проведено лишь M измерений, т. е. $J = M$, то h_i имеет единственное решение; однако из-за помех и ошибок измерений уравнение (6.11.1) обычно дает неправильные значения h_i. Поэтому при эксперименте проводят много измерений, получая больше уравнений, чем число неизвестных, т. е. $J > M$. В этом случае уже нельзя найти значения h_i, которые бы удовлетворяли всем уравнениям. Например, подстановка в левую сторону уравнения (6.11.1) значений $h_1^0, h_2^0, \ldots, h_m^0$ неизвестных $h_1, h_2, \ldots, h_m$ позволяет получить $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_j^0$, отличающиеся от $y_1, y_2, \ldots, y_j$ на $e = y_i^0 - y_i$, $i = 1, 2, \ldots, J$. Столкнувшись с такой дилеммой, можно попытаться определить h_i таким образом, чтобы каждое из уравнений (6.11.1) было справедливо по крайней мере приближенно, так что некоторая оценка общей ошибки аппроксимации оказалась бы наименьшей. Так, h_i^0 можно определить, из условия того, чтобы e_i имели наименьшее среднеквадратическое отклонение, т. е.

$$I = \sum_{i=1}^{J} e_i^2 = \sum_{i=1}^{J} (y_i^0 - y_i)^2$$

принимал бы минимальное значение. Последнее известно, как *метод наименьших квадратов*. В сущности, это попытка найти «наилучшие» значения.

Данная задача допускает геометрическую трактовку. Пусть векторы $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_M$ означают столбцы

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \ldots v_{1M} \\ v_{21} & v_{22} \ldots v_{2M} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ v_{J1} & v_{J2} \ldots v_{JM} \end{bmatrix}.$$

Тогда вектор

$$\mathbf{y}^0 = \begin{bmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_J^0 \end{bmatrix}$$

записывается как $\mathbf{y}^0 = h_1^0\mathbf{v}_1 + h_2^0\mathbf{v}_2 + \ldots + h_M^0\mathbf{v}_M$. Задача сводится к определению таких $h_1^0, h_2^0, \ldots, h_M^0$, чтобы $\|\mathbf{e}\|^2 = \|\mathbf{y}^0 - \mathbf{y}\|^2$ принимала минимальное значение, где

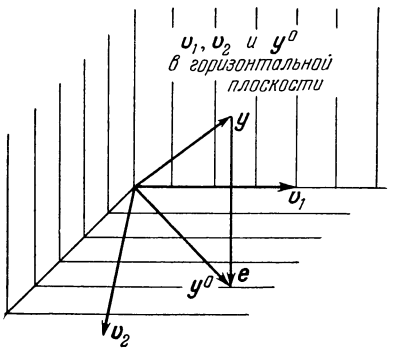


Рис. 6.11.1.

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_J \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_J \end{bmatrix}.$$

Таким образом, задача состоит в нахождении такого

$$\mathbf{h}^0 = \begin{bmatrix} h_1^0 \\ h_2^0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ h_M^0 \end{bmatrix},$$

чтобы норма отклонения $\mathbf{y}^0$ от $\mathbf{y}$ была бы наименьшей. Случай $M = 2$ представлен на рис. 6.11.1. В общем случае множество линейных комбинаций $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_M$ образует пространство R^0; *ортогональная проекция* $\mathbf{y}$ на R^0 дает вектор из R^0, наиболее близко отстоящий от $\mathbf{y}$. Это не что иное, как обобщение факта, очевидного из рис. 6.11.1 для $M = 2$. Следовательно, $\mathbf{h}^0$ следует выбирать так, чтобы линейная комбинация $\mathbf{y}^0 = h_1^0\mathbf{v}_1 + h_2^0\mathbf{v}_2 + \ldots$ $\ldots + h_M^0\mathbf{v}_M$ являлась ортогональной проекцией $\mathbf{y}$ на R^0.

При заданном пространстве R^0 и векторе $\mathbf{y}$, в общем случае не принадлежащем R^0, $\mathbf{y}$ всегда можно представить в виде

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}^0 - \mathbf{e},$$

где вектор $\mathbf{y}^0$ принадлежит R^0, а $\mathbf{e}$ ортогонален R^0. Эта геометрическая идея лежит в основе процедуры ортогонализации Грама — Шмидта в § 4.5. Выбрав в качестве базиса в R^0 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_M$, $\mathbf{y}^0 = h_1^0\mathbf{v}_1 + h_2\mathbf{v}_2 + \ldots + h_M\mathbf{v}_M$, следует определить $h_1^0, h_2^0, \ldots, h_M^0$. Вектор $\mathbf{e} = \mathbf{y}^0 - \mathbf{y}$ должен быть ортогонален R^0; для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$\langle \mathbf{e}, \mathbf{v}_i \rangle = \langle \mathbf{y}^0 - \mathbf{y}, \mathbf{v}_i \rangle = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, M.$$

Замена $\mathbf{y}^0$ линейной комбинацией приводит к

$$\langle h_1^0\mathbf{v}_1 + h_2^0\mathbf{v}_2 + \ldots + h_M^0\mathbf{v}_M - \mathbf{y}, \mathbf{v}_i \rangle = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, M$$

или

$$\begin{aligned}
&h_1^0\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1\rangle + h_2^0\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1\rangle + \ldots + h_M^0\langle \mathbf{v}_M, \mathbf{v}_1\rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{v}_1\rangle,\\
&h_1^0\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle + h_2^0\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2\rangle + \ldots + h_M^0\langle \mathbf{v}_M, \mathbf{v}_2\rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{v}_2\rangle,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&h_1^0\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_M\rangle + h_2^0\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_M\rangle + \ldots + h_M^0\langle \mathbf{v}_M, \mathbf{v}_M\rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{v}_M\rangle.
\end{aligned} \tag{6.11.2}$$

Определитель этой системы уравнений равен определителю Грама $\mathbf{G}$, определяемому уравнением (4.5.11); он отличен от нуля, если $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_M$ линейно независимы. В сущности, это условие наблюдаемости. В предположении линейной независимости векторов величина $\mathbf{h}^0$ из условия минимума квадратов принимает вид

$$h_i^0 = \frac{1}{G}\begin{bmatrix}
\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1\rangle & \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1\rangle & \ldots\langle \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_1\rangle & \langle \mathbf{y}, \mathbf{v}_1\rangle & \langle \mathbf{v}_{i+1}, \mathbf{v}_1\rangle & \ldots\langle \mathbf{v}_M, \mathbf{v}_1\rangle\\
\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle & \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2\rangle & \ldots\langle \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_2\rangle & \langle \mathbf{y}, \mathbf{v}_2\rangle & \langle \mathbf{v}_{i+1}, \mathbf{v}_2\rangle & \ldots\langle \mathbf{v}_M, \mathbf{v}_2\rangle\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_M\rangle & \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_M\rangle & \ldots\langle \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_M\rangle & \langle \mathbf{y}, \mathbf{v}_M\rangle & \langle \mathbf{v}_{i+1}, \mathbf{v}_M\rangle & \ldots\langle \mathbf{v}_M, \mathbf{v}_M\rangle
\end{bmatrix} \tag{6.11.3}$$

при $i = 1, 2, \ldots, M$.

Соответствующее минимальное значение среднеквадратического отклонения $I = \|\mathbf{e}\|^2$ можно также определить из геометрических соображений. При $M = 2$ это квадрат высоты параллелепипеда, построенного на $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ и $\mathbf{y}$. В общем случае это квадрат высоты гиперпараллелепипеда, построенного на $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots$

..., $\mathbf{v}_M$, $\mathbf{y}$. Если V_y означает объём гиперпараллелепипеда, то $V_y = V\|\mathbf{e}\|$ или

$$\|\mathbf{e}\|^2_{\min} = \frac{V_y^2}{V^2},$$

где V — объем, определяемый $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_M$. Но V_y^2 равен G_y — определителю Грама для $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_M, \mathbf{y}$, а V^2 равен определителю Грама G для $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_M$. Это совершенно очевидно в том случае, если векторы, определяющие гиперпараллелепипед, ортогональны. В случае неортогональных векторов к подобному выводу можно прийти, используя процедуру ортогонализации Грама — Шмидта. Таким образом,

$$I_{\min} = \|\mathbf{e}\|^2_{\min} = \frac{G_y}{G}$$

— минимальное значение среднеквадратического отклонения.

Уравнение (6.11.2) полезно переписать как $\mathbf{V}^T\mathbf{V}\mathbf{h}^0 = \mathbf{V}^T\mathbf{y}$. Тогда уравнение (6.11.3) примет вид

$$\mathbf{h}^0 = (\mathbf{V}^T\mathbf{V})^{-1}\mathbf{V}^T\mathbf{y}, \tag{6.11.4}$$

где условие наблюдаемости состоит в неособенности $\mathbf{V}^T\mathbf{V}$. Теперь интересно предположить, что сделано одно дополнительное измерение y_{J+1}, равное $v_{J+1,1}h_1^0 + v_{J+1,2}h_2^0 + \ldots + v_{J+1,M}h_M^0$, и определить новую минимальную квадратическую оценку $\mathbf{h}^0$ на основе $J+1$ измерений. Пусть

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_{J+1,1} \\ v_{J+1,2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_{J+1,M} \end{bmatrix}.$$

Тогда уравнение (6.11.4) принимает вид

$$\mathbf{h}^0_{J+1} = \left([\mathbf{V}^T \vdots \mathbf{v}]\begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \cdots\cdots \\ \mathbf{v}^T \end{bmatrix}\right)^{-1}[\mathbf{V}^T \vdots \mathbf{v}]\begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \cdots\cdots \\ y_{J+1} \end{bmatrix}, \tag{6.11.5}$$

где индекс при $\mathbf{h}^0_{J+1}$ указывает на то, что проведено $J+1$ измерений. Уравнение (6.11.5) позволяет получить новое значение минимальной квадратической оценки $\mathbf{h}^0$, соответствующее новому измерению. Однако это выражение неудовлетворительно с точки зрения вычислений при поступлении новых данных измерений, так как для каждой новой оценки требуется выполнение операции обращения матрицы.

Пытаясь избежать повторных обращений матриц, положим $P_J = (\mathbf{V}^T\mathbf{V})^{-1}$. Тогда определим

$$\mathbf{P}_{J+1} = \left([\mathbf{V}^T \vdots \mathbf{v}] \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \cdots\cdots \\ \mathbf{v}^T \end{bmatrix} \right)^{-1} = [\mathbf{V}^T\mathbf{V} + \mathbf{v}\mathbf{v}^T]^{-1},$$

так что

$$\mathbf{P}_{J+1} = \left[\mathbf{P}_J^{-1} + \mathbf{v}\mathbf{v}^T\right]^{-1}. \tag{6.11.6}$$

Справедливость выражения

$$\mathbf{P}_{J+1} = \mathbf{P}_J - \mathbf{P}_J\mathbf{v}\,(\mathbf{v}^T\mathbf{P}_J\mathbf{v} + 1)^{-1}\,\mathbf{v}^T\mathbf{P}_J \tag{6.11.7}$$

следует из непосредственной подстановки уравнения (6.11.7) в (6.11.6). Тогда, обозначив вектор $\mathbf{h}^0$, основанный на первых J измерениях, через $\mathbf{h}_J^0$ можно после упрощений записать уравнение (6.11.5) как

$$\mathbf{h}_{J+1}^0 = \mathbf{h}_J^0 + \mathbf{P}_J\mathbf{v}\left(\mathbf{v}^T\mathbf{T}_J\mathbf{v} + 1\right)^{-1}\left(\mathbf{y}_{J+1} - \mathbf{v}^T\mathbf{h}_J^0\right). \tag{6.11.8}$$

Так как $(\mathbf{v}^T\mathbf{P}_J\mathbf{v} + 1)$ — скалярная величина, то для новых оценок $\mathbf{h}$ не требуется выполнения повторных операций обращения матриц. Новый вектор $\mathbf{h}_{J+1}^0$ равен прежнему $\mathbf{h}_J^0$ плюс взвешенная разность между новым значением y и оценкой y на основе J измерений.

Задачи

6.1. Начертить схемы моделирования для следующих систем:

(*a*) $y(k+1) - 2y(k)\operatorname{ch}\alpha + y(k-1) = v(k)$;

(*b*) $\nabla^2 y(k) + k\nabla y(k) + y(k) = v(k)$;

(*c*) $\Delta^2 y(k) + k\Delta y(k) + y(k) = v(k)$;

(*d*) $y_1(k+2) + 2y_1(k+1) + y_2(k+1) + y_1(k) = v_1(k)$,

$y_2(k+2) + 3y_2(k+1) + y_2(k) + 3y_1(k) = v_2(k)$.

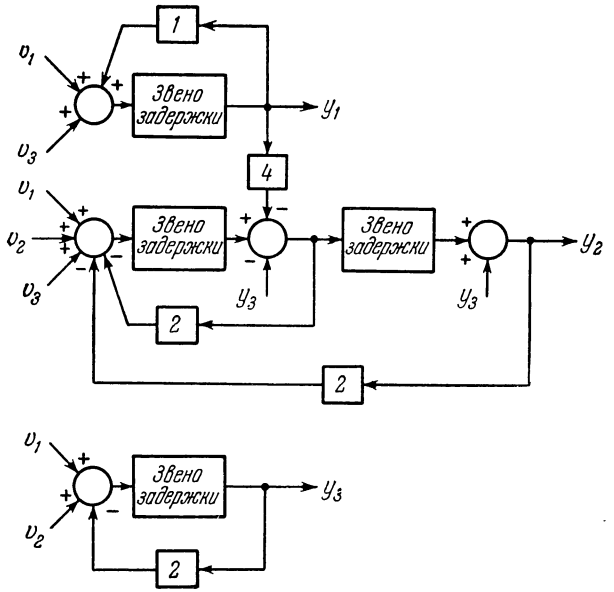
6.2. Найти передаточную матричную функцию системы, изображенной на рисунке.

6.3. Синхронная последовательностная машина принимает входной сигнал, представленный в двоично-десятичной системе. После каждого четвертого импульса выход машины выдает сигнал, показывающий, образуют ли последние четыре входных сигнала представленное надлежащим образом в двоичной системе десятичное число (от 0 до 9). Каково минимальное число состояний у этой машины?

6.4. Если имеется временна́я последовательность импульсов t_1, t_2, t_3, t_4, t_1, t_2, t_3, t_4, ..., то каков ответ задачи 6.3?

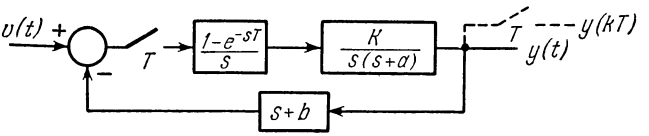
6.5. Электронный «замок» спроектирован таким образом, что после входной последовательности 101011 он будет в открытом состоянии. Сколько состояний требуется для построения такого устройства?

6.6. Какие величины импульсной системы на рисунке можно выбрать в качестве переменных состояния?



К задаче 6.2.

6.7. Матрица **A** размерности n, имеющая различные характеристические корни, преобразуется к диагональному виду. Подобным образом матрица коэффициентов последовательностной цепи по mod p может быть преобразована



К задаче 6.6.

к диагональной форме, если n корней различимы по mod p (называемых несравнимыми по mod p). Используя теорему Ферма́, имеем

$$\lambda^{p-1}=1 \mod p \qquad (0<\lambda<p-1).$$

Показать, что если матрица $\mathbf{A}^r$ приводится к диагональному виду, то периоды такой системы являются делителями $r(p-1)$.

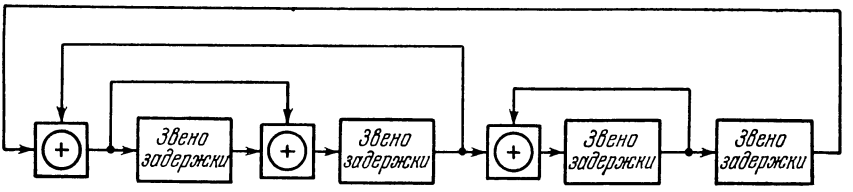
6.8. Уравнение состояния линейной последовательностной системы задается

$$\mathbf{x}(k+1)=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\mathbf{x}(k) \mod 5.$$

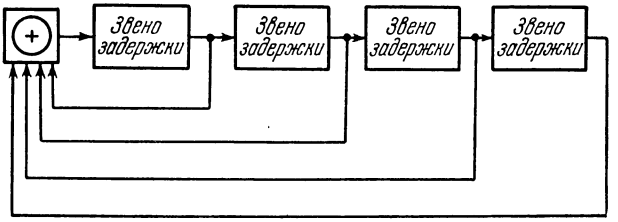
(*a*) Показать, что каждая последовательность состояний имеет период, являющийся делителем 4.

(*b*) Показать, что должно быть шесть последовательностей с периодом 4, обладающих 24 различными состояниями. Найти эти последовательности.

6.9. Найти длину минимального периода линейных двоичных цепей на рисунке.



а)



б)

К задаче 6.9.

6.10. Записать векторные уравнения для системы на рисунке в:

(*a*) стандартной **A, B, C, D** форме;

(*b*) нормальной форме.

6.11. На основе разложения на элементарные дроби найти векторные уравнения следующих систем:

(a) $H(z) = \dfrac{z+2}{z^3+7z^2+14z+8}$;

(b) $H(z) = \dfrac{z^2+2}{z^2+2z+2}$;

(c) $H(z) = \dfrac{z^3(z+3)}{z^4+5z^3+9z^2+7z+2}$.

6.12. Для дискретной системы, изображенной на рисунке, указать:

(*a*) Какие частоты управляемые?

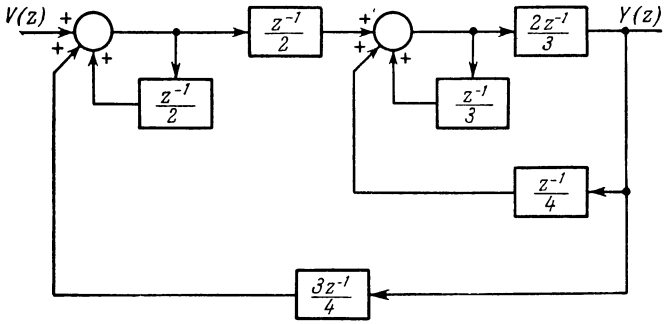
(*b*) Какие частоты наблюдаемые?

6.13. Данное разностное уравнение

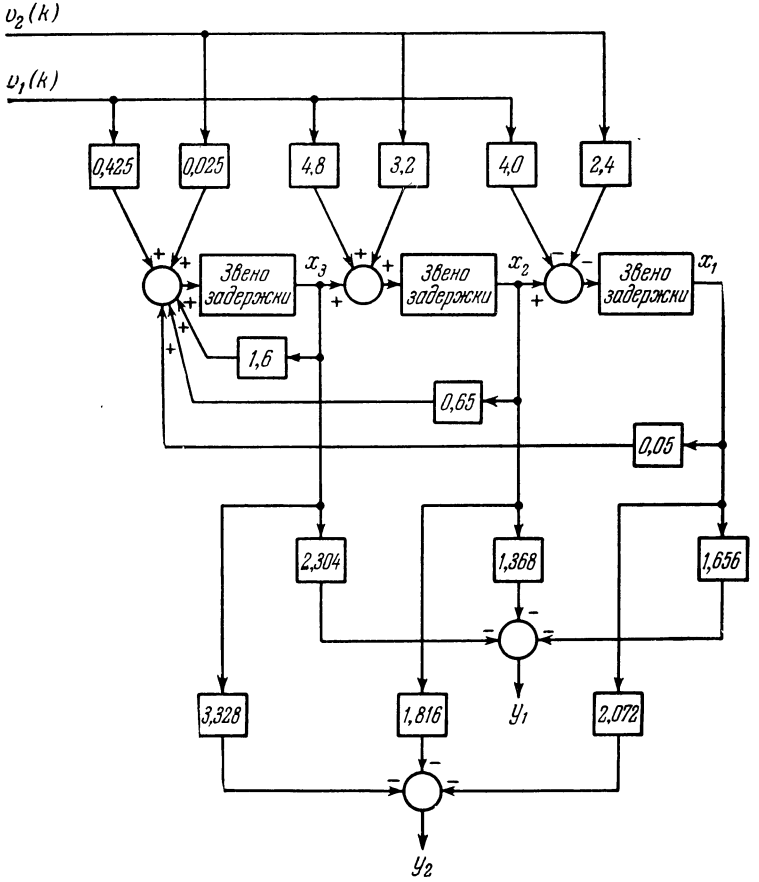
$$y(k+1) - 3y(k) + 2y(k-1) = 1 + a^k$$

(*a*) решить относительно $y(k)$ классическим методом;

(*b*) начертить схему моделирования для этого уравнения;



К задаче 6.10.



К задаче 6.12.

(*c*) найти $y(k)$ методом разложения на частоты;
(*d*) найти $y(k)$ при помощи переходной матрицы состояния;
(*e*) найти $y(k)$, используя метод z-преобразования.

6.14. Показать справедливость соотношений, приведенных в таблице 6.8.1.

6.15. Показать справедливость уравнений (6.8.12)—(6.8.16).

6.16. При свободном движении дискретной системы выходом служит последовательность чисел 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... — такая, что каждое ее число равно сумме двух предыдущих. (Эти числа называются числами Фибоначчи).
(*a*) Найти систему, воспроизводящую эти числа
(*b*) Найти ее переходную матрицу состояния $\varphi(k)$.
(*c*) Найти выражение для k-го числа.

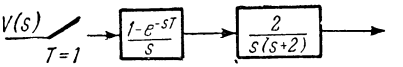
6.17. На входы системы $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{v}$ поступают кусочно-постоянные сигналы (в течение интервала $nT\leqslant t\leqslant(n+1)T$ входы постоянны). Эти сигналы формируются путем квантования по времени в моменты nT непрерывных входных сигналов и фиксации квантованных значений до следующего момента $(n+1)T$ квантования. Показать, что непрерывную систему с импульсным элементом и фиксатором можно заменить дискретной системой

$$\mathbf{x}\,[(n+1)\,T]=\mathbf{A}_1\mathbf{x}\,(nT)+\mathbf{B}_1\mathbf{v}\,(nT),$$

где

$$\mathbf{A}_1=e^{\mathbf{A}T} \quad \text{и} \quad \mathbf{B}_1=\int_0^T e^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\,d\tau.$$

6.18. Уравнения дискретной системы в задаче 6.17 использовать для нахождения выходного сигнала системы с одним входом и выходом, изображенной на рисунке. Проверить результат, воспользовавшись z-преобразованием.



К задаче 6.18.

6.19. Рассмотрим цепь, содержащую произвольное число синхронно работающих ключей. В течение первого полупериода $0^+\leqslant t\leqslant T^-$ одна часть ключей открыта, а другая закрыта. Во втором полупериоде положение ключей меняется на противоположное. В момент $t=T$ восстанавливаются исходные начальные условия, и цикл повторяется. Система характеризуется $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}_1\mathbf{x}+\mathbf{B}_1\mathbf{v}$ $(nT<t<nT+T_1)$ и $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}_2\mathbf{x}+\mathbf{B}_2\mathbf{v}$ $(nT+T_1<t<(n+1)T)$.
(*a*) Найти решение $\mathbf{x}\left(nT+T_1^-\right)$ и $\mathbf{x}\,[(n+1)\,T^-]$.
(*b*) Предполагая $\mathbf{x}\left(nT+T_1^-\right)=\mathbf{x}\left(nT+T_1^+\right)$, $\mathbf{x}\left(nT^-\right)=\mathbf{x}\,(nT^+)$ и $\mathbf{v}$ равным постоянной величине, найти разностное уравнение системы

$$\mathbf{x}\,[(n+1)\,T]=\mathbf{A}\mathbf{x}\,(nT)+\mathbf{B}\mathbf{v}\,(nT).$$

6.20. Для системы, описываемой разностным уравнением

$$\nabla^2 y+2\nabla y+2y=1$$

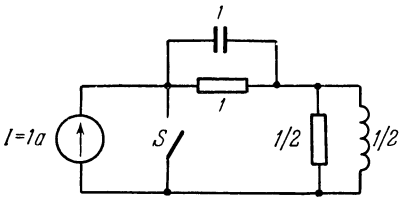
(*a*) найти стандартную форму записи матриц **A**, **B**, **C**, **D**; решить относительно $y(k)$;
(*b*) повторить п. (*a*), используя *нормальную форму* записи.

6.21. Ключ в цепи на рисунке замкнут в $t=0, 2, 4, \ldots$ и открыт в $t=1, 3, 5, \ldots$

(*a*) Найти разностное уравнение относительно тока индуктивности в конце k-го периода.

(*b*) Решить это разностное уравнение, воспользовавшись переходной матрицей состояния, и начертить зависимость тока в катушке индуктивности от $k/2$.

(*c*) Найти импульсную матричную характеристику и передаточную матрицу этой цепи.



К задаче 6.21.

6.22. Для системы, изображенной на рисунке: (*a*) найти уравнения состояния; (*b*) определить $\varphi(k)$; (*c*) найти импульсную характеристику $\mathbf{H}(k)$.

6.23. Система определяется следующими разностными уравнениями:

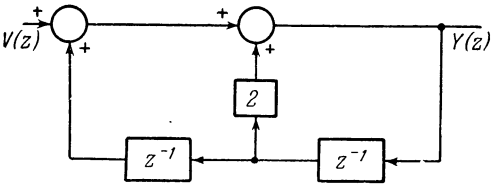
$$\begin{aligned} x_1(k) - x_2(k-1) + y(k-1) &= 0, \\ x_1(k) - x_2(k+1) &= 0, \\ x_1(k) - 2x_2(k+1) + v(k) &= 0. \end{aligned}$$

Найти импульсную характеристику $\mathbf{H}(k)$.

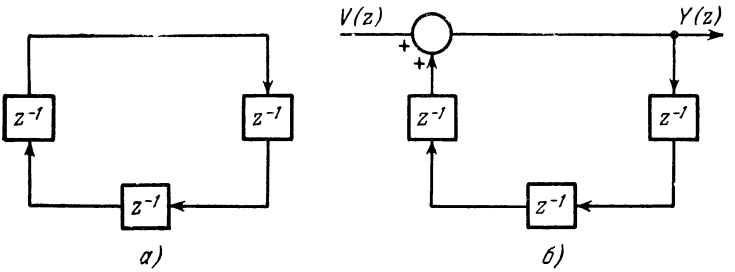
6.24. Для системы, изображенной на рисунке 6.24, *a*,

(*a*) найти матрицу $\mathbf{A}$;

(*b*) найти $\varphi(k)$; ответ интерпретировать в терминах сигналов блок-схемы системы;



К задаче 6.22.



К задаче 6.24.

(*c*) найти передаточную функцию $Y(z)/V(z)$ системы, показанной на рисунке 6.24, *б*;

(*d*) найти импульсную характеристику путем разложения передаточной функции; сравнить результаты с полученным в п. (*b*).

6.25. (*a*) Для системы из задачи 6.10 найти матрицу φ, воспользовавшись временными методами.

(*b*) Проделать п. (*a*), используя методы z-преобразования.

6.26. Вывести дискретный аналог уравнения (5.10 14) и на основе его — уравнение модифицированной сопряженной дискретной системы.

6.27. (*a*) Дать дискретную аппроксимацию дифференциального уравнения

$$\dot{y} + \frac{1}{t} y = 0.$$

(*b*) При $T=0{,}05$ найти $y(kT)$ для $k=0 \div 5$, $k_0=0, 1, 2, 3, 4, 5$.

(*c*) Проверить результаты п. (*b*), вычислив $h(0{,}25; 0)$ исходной системы.

(*d*) Найти модифицированную сопряженную дискретную систему, соответствующую приведенной в п. (*a*).

(*e*) Проверить результаты п. (*b*), вычислив $h^*_{k'}(k', 0)$.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. J. E. Bertram, The Concept of State in the Analysis of Discrete Time Control Systems, 1962 Joint Automatic Control Conference, New York University, June 27—29, 1962, Paper No. 11—1.
2. D. A. Huffman, The Synthesis of Sequential Switching Circuits, J. Franklin Inst., March — April 1954, стр. 161—190, 275—303.
3. E. F. Moore, Gedanken-Experiments on Sequential Machines, Automata Studies, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1956, стр. 129—153.
4. J. Millman and H. Taub, Pulse and Digital Circuits, McGRaw-Hill Book Co., New York, 1956, стр. 346—353.
5. M. Phister, Logical Design of Digital Computers, John Wiley and Sons, New York, 1958, Chapters 5 and 6.
6. B. Elpas, The Theory of Autonomous Linear Sequential Networks Sequential Transducer Issue, IRE Trans. Circuit Theory, Vol. CT-6, No. 1, March 1959.
7. B. Friedland, Linear Modular Sequential Circuits, Sequential Transducer Issue, IRE Trans. Circuit Theory, Vol. CT-6, No. 1, March 1959.
8. J. Harmanis, Linear Multivalued Sequential Coding Networks, Sequential Transducer Issue, IRE Trans. Circuit Theory, Vol. CT-6, No. 1, March 1959.
9. D. A. Huffman, A. Linear Circuit Viewpoint on Error-Correcting Codes, IRE Trans. Infor. Theory, Vol. IT-2, September 1956, стр. 20—28.
10. R. H. Barker, The Pulse Transfer Function and Its Application to Sampling Servo Systems, Proc. IRE, Vol. 99, IV (1952), стр. 302—317.
11. J. R. Gagazzini and G. F. Franklin, Sampled Data Control Systems, McGraw-Hill Book Co., New York, 1958, стр. 93—94, 136, 199, 217—218.
12. R. E. Kalman, Y. C. Ho and K. S Narendra, Controllability of Linear Dynamical Systems, in Contributions to Differential Equations, Vol. 1, No. 2, John Wiley and Sons, New York, 1963.
13. F. B. Hildebrand, Methods of Applied Mathematics, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1952, Chapter 3.
14. T. Fort, Finite Differences, Oxford University Press, 1948, стр. 244—245.
15. M. Salvador and M. Baron, Numerical Methods in Engineering, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1952.
16. R. E. Kalman and R. S. Bucy, New Results in Linear Filtering and Prediction Theory, J. Bas. Eng., March 1961.
17. Y. C. Ho, On the Stochastic Approximation Method and Optimal Filtering Theory, J. Math. Anal. Appl., Vol. 6, No. 1, February 1963.

ГЛАВА 7

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ УСТОЙЧИВОСТИ И ВТОРОЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА

§ 7.1. Введение

Точное определение устойчивости в случае нелинейной системы неэлементарно. Попытка распространить на нелинейные системы «интуитивное» понятие устойчивости, большей частью соответствующее линейным стационарным системам, терпит неудачу. Устойчивость или неустойчивость линейной стационарной системы определяется расположением на s-плоскости нулей ее характеристического уравнения. Устойчивость системы не зависит от начальных условий или ее входных сигналов. Для нелинейных систем это перестает быть справедливым.

Ограниченность или неограниченность реакции нелинейной системы может зависеть от начальных условий или вынуждающей функции. Более того, в нелинейной системе могут существовать колебания с постоянной амплитудой. Следует ли рассматривать такую систему как устойчивую или неустойчивую? Интуитивно можно считать ее неустойчивой, если это система управления и колебания достаточно большие, так что свойства системы неудовлетворительные. Однако такого рода утверждение является очень неопределенным и приводит к ошибочным заключениям. При исследовании нелинейных систем необходимо четко разграничить различные «интуитивные» понятия неустойчивости.

Цель настоящей главы познакомить читателя с более строгими определениями устойчивости, а также с методами Ляпунова и ролью, которую играет метод переменных состояния. Слово «познакомить» выбрано с осторожностью, так как теории устойчивости и методам Ляпунова уже посвящен ряд книг, приведенных в списке литературы в конце данной главы.

§ 7.2. Понятия фазовой плоскости

Реакцию физической системы можно изобразить графически как функцию времени. Можно также использовать время как параметр, изобразив на чертеже во взаимосвязи поведение пере-

менных состояния системы в фазовом пространстве. Последнее служит геометрическим представлением поведения системы. Подобное трудно представить наглядно для систем третьего и выше

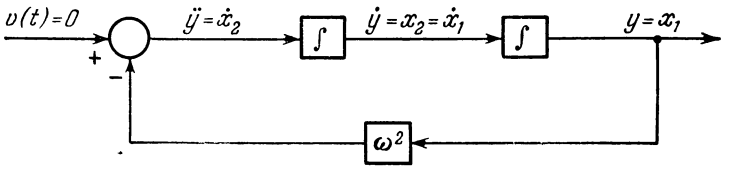


Рис. 7.2.1.

порядка, однако оно особенно полезно для систем второго порядка.

Рассмотрим, например, линейный осциллятор на рис. 7.2.1, описываемый дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\omega^2 y=0, \tag{7.2.1}$$

где $\omega>0$ — частота колебаний. Введение переменных состояния $x_1(t)=y(t)$, $x_2(t)=\dot{x}_1(t)=\dot{y}(t)$ позволяет записать уравнение (7.2.1) системы в виде

$$\dot{x}_2+\omega^2 x_1=0. \tag{7.2.2}$$

Умножение уравнения (7.2.2) на x_2 дает

$$0=x_2\dot{x}_2+\omega^2 x_1 x_2=x_2\dot{x}_2+ +\omega^2 x_1\dot{x}_1=\frac{d}{dt}\left[\frac{x_2^2}{2}+\omega^2\frac{x_1^2}{2}\right]. \tag{7.2.3}$$

Интегрируя уравнение (7.2.3), получим

$$x_2^2+\omega^2 x_1^2=c^2, \tag{7.2.4}$$

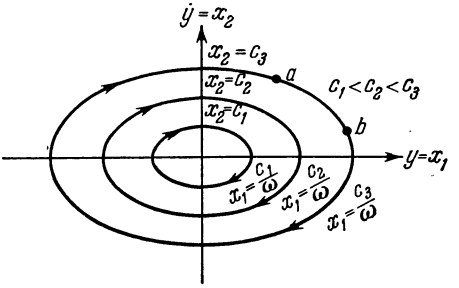


Рис. 7.2.2.

где c — постоянная величина. Следовательно, $y(t)=x_1(t)$, $\dot{y}(t)=x_2(t)$ — произвольное решение уравнения (7.2.1), связаны уравнением эллипса (7.2.4). Ряд решений при различных значениях c, соответствующих различным начальным значениям x_1 и x_2, изображен на рис. 7.2.2. Решение в плоскости x_1x_2 называется *траекторией*, а сама плоскость x_1x_2 называется *фазовой плоскостью*.

Время служит параметром при движении вдоль одной из траекторий; в частности, в данном примере, т. е. при выборе переменных состояния $x_2(t)=\dot{x}_1(t)$, рост времени соответствует

движению в плоскости x_1x_2 по часовой стрелке, если оси выбраны как на рис. 7.2.2. Однако, как показывается далее, это не всегда необходимо. Движение по часовой стрелке в этом примере очевидно из того факта, что при положительной величине x_2, т. е. $\dot{x}_1 > 0$, $x_1(t)$ должно возрастать, а при отрицательной x_2, т. е. $\dot{x}_1 < 0$, $x_1(t)$ должна уменьшаться.

Время, необходимое для перехода по траектории решения из точки a в точку b, вычисляется из

$$t_b - t_a = \int_{x_{1_a}}^{x_{1_b}} dx_1 \Big/ \frac{dx_1}{dt} = \int_{x_{1_a}}^{x_{1_b}} \frac{dx_1}{x_2}. \tag{7.2.5}$$

Например, пусть на траектории $c = c_3$ точка a определяется $(0, c_3)$, а точка b $(c_3/\omega, 0)$. Таким образом, a и b отстоят на четверть периода. Исключив x_2 из уравнения (7.25) путем подстановки (7.24), при $c = c_3$, получим

$$t_b - t_a = \frac{T}{4} = \int_0^{c_3/\omega} \frac{dx_1}{\sqrt{c_3^2 - \omega^2 x_1^2}} = \frac{\pi}{2\omega}, \tag{7.2.6}$$

где T — период колебаний. Уравнение (7.2.6) представляет собой хорошо известное выражение периода колебаний линейного осциллятора $T = 2\pi/\omega$.

Траектория, соответствующая $c = 0$, является тривиальным решением, отвечающим $x_1 = x_2 = 0$. Данное решение называют *особым решением*, а точку (0, 0) называют *особой точкой* или *точкой равновесия*. Это — точка равновесия или покоя линейного осциллятора. В рассматриваемом случае она называется центром, так как все траектории замыкаются вокруг нее.

Траектории в фазовой плоскости рис. 7.2.2, соответствующие поведению системы, описываемой уравнением (7.2.1), были получены, не прибегая к непосредственному решению уравнения (7.2.1) относительно $y(t)$. Из замкнутости траекторий рис. 7.2.2 видно, что решения уравнения (7.2.1) являются периодическими функциями с постоянной амплитудой. Если бы траектории непрерывно приближались к началу координат, можно было бы интуитивно утверждать, что система «устойчивая». Если бы траектории непрерывно удалялись от начала координат, то можно было бы интуитивно утверждать, что система «неустойчивая». Подобное представление поведения системы второго порядка и суждение об «устойчивости системы» без непосредственного решения дифференциального уравнения системы яв-

ляется одним из важнейших полезных свойств метода фазовой плоскости применительно к нелинейным системам. При этом необходимы, однако, более точные определения устойчивости, что делается в § 7.7.

§ 7.3. Особые точки линейных систем второго порядка

Рассмотренная особая точка линейного осциллятора — центр — лишь одна из четырех возможных особых точек. Остальные особые точки можно иллюстрировать на системе рис. 7.3.1.

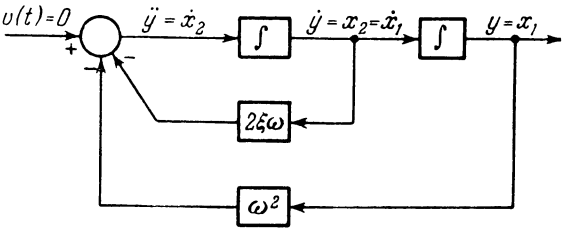


Рис. 7.3.1.

Отметим, что в случае нулевого демпфирования ($\xi = 0$) эта система совпадает с линейным осциллятором. Таким образом, при $\xi = 0$ начало координат плоскости x_1x_2 является центром, а траектории — эллипсами. Однако при $\xi \neq 0$ траектории значительно изменяются.

Дифференциальное уравнение системы на рис. 7.3.1 имеет вид

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\xi\omega\frac{dy}{dt} + \omega^2 y = 0. \tag{7.3.1}$$

Используя указанные на рис. 7.3.1 (но определяемые неединственным образом) переменные состояния, перепишем это уравнение как

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\omega^2 x_1 - 2\xi\omega x_2. \end{aligned} \tag{7.3.2}$$

Его векторная форма $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\xi\omega \end{bmatrix}.$$

Характеристические числа определяются как корни

$$s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2 = 0 \tag{7.3.3}$$

или из $|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$. В любом случае имеем

$$\begin{aligned} s_1 &= -\xi\omega - \omega\sqrt{\xi^2 - 1}, \\ s_2 &= -\xi\omega + \omega\sqrt{\xi^2 - 1}. \end{aligned} \tag{7.3.4}$$

Следовательно, теперь можно начертить реакцию $y(t)$ для различных значений ξ и ω, так как общее решение уравнения (7.3.1) равно

$$y(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t},$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные. Здесь же преследуется цель — иллюстрация свойств фазовой плоскости, полезных для нелинейных задач, а потому сейчас рассмотрим характер возможных особых точек.

Особые точки являются точками динамического равновесия. В сущности, они соответствуют положениям равновесия системы. Они могут быть устойчивыми. Например, подвешенный вертикально маятник, не обладающий кинетической энергией, находится в устойчивом положении равновесия. Точки равновесия могут быть и неустойчивыми. Маятник, имеющий массу покоя непосредственно над точкой закрепления, находится в состоянии равновесия. Однако в этом случае малейшее возмущение приведет к колебаниям маятника. Тем не менее, при отсутствии возмущения в любом случае маятник находится в состоянии покоя. Таким образом, характерной чертой особой точки, или точки равновесия, является то, что все производные, характеризующие поведение системы, равны нулю. Другими словами, производные от переменных состояния равны нулю. Для линейной системы второго порядка на рис. 7.3.1 особая точка характеризуется $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$. Из уравнения (7.3.2) тогда следует, что начало координат плоскости x_1x_2 является единственной особой точкой (в предположении, что $\omega \neq 0$).

Наклон траектории в произвольной точке плоскости задается

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = -\omega\frac{[\omega x_1 + 2\xi x_2]}{x_2}. \tag{7.3.5}$$

Таким образом, в особой точке наклон траектории не определен. Это справедливо для всех особых точек и не является просто результатом особого выбора переменных состояния в этом примере. Вдоль оси x_1, где x_2 равна нулю, наклон конечен. Это, однако, вызвано особым выбором переменных состояния — все траектории в данном примере пересекают ось x_1 вертикально.

Из уравнения (7.3.5) следует, что во всех *обычных точках* (точках, не являющихся особыми) наклон определяется единственным образом. Тогда теорема Коши — Липшица гаранти-

рует прохождение через данную точку фазовой плоскости лишь одной кривой решения *). Траектории друг с другом не пересекаются.

В заключение предварительного исследования природы особых точек системы на рис. 7.3.1 рассмотрим траектории, являющиеся прямыми линиями, проходящими через начало координат. Прямые, проходящие через начало координат, должны описываться выражением $x_2 = mx_1$. Следовательно, $\dot{x}_2 = m\dot{x}_1$, так что наклон такой траектории равен

$$m = \frac{x_2}{x_1} = \frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1}. \tag{7.3.6}$$

Приравнивая $\dot{x}_2/\dot{x}_1$, задаваемые уравнениями (7.3.5) и (7.3.6), получим

$$m = -\omega\frac{[\omega x_1 + 2\xi x_2]}{x_2} = -\omega\frac{[\omega + 2\xi m]}{m}.$$

Таким образом, уравнение наклона траекторий, являющихся прямыми линиями, имеет вид

$$m^2 + 2\xi\omega m + \omega^2 = 0. \tag{7.3.7}$$

Так как корни уравнений (7.3.7) и (7.3.3) одинаковые, то наклоны произвольной траектории в виде прямой линии определяются характеристическими корнями уравнения (7.3.4). Этот результат, конечно, зависит от выбора переменных состояния, хотя сами характеристические числа от выбора переменных состояния не зависят. Траектории в виде прямых линий соответствуют частотам реакции системы и могли бы быть получены из уравнения (5.6.10).

На этом предварительные соображения заканчиваются; рассмотрим теперь природу особых точек линейных систем второго порядка.

Центр: $\xi=0$, $\omega^2 > 0$. Этот случай исследовался в предыдущем пункте. Нашли, что начало координат является центром, а траекториями служат эллипсы. Не существует траекторий в виде прямых линий, так как уравнение (7.3.7) при $\xi=0$ не содержит действительных корней, т. е. не существует частот или характеристических векторов, соответствующих действительным характеристическим числам.

Фокус: $|\xi| < 1$, $\omega^2 > 0$. В этом случае не представляется возможным распространить процедуру предыдущего параграфа для

*) Для этого достаточно, чтобы $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ была функцией Липшица в области R, содержащей данную точку, т. е. для каждой пары точек x и y из R $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})\| \leqslant K\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, где K — положительная постоянная величина [1]. Отметим, что это не выполняется, если $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ — многозначная функция $\mathbf{x}$. В этом случае $\mathbf{x}$ не является переменной состояния данной системы.

нахождения уравнения траекторий. Однако опять можно утверждать, что здесь не существует траекторий в виде прямой линии, так как при $|\xi| < 1$ уравнение (7.3.7) не имеет действительных корней.

Подстановка $x_2 = zx_1$ и $dx_2 = z\,dx_1 + x_1\,dz$ позволяет записать уравнение (7.3.5) как

$$-\frac{dx_1}{x_1} = \frac{z\,dz}{z^2 + 2\xi\omega z + \omega^2}. \tag{7.3.8}$$

Для получения выражения для траекторий в плоскости x_1z можно проинтегрировать уравнение (7.3.8). Соответствующий результат в плоскости x_1x_2 равен

$$(x_2 + \xi\omega x_1)^2 + \omega^2(1-\xi^2)x_1^2 = c^2 \exp\left[\frac{2\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\,\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{x_2 + \xi\omega x_1}{x_1\omega\sqrt{1-\xi^2}}\right)\right],$$

где c — постоянная величина. Это довольно громоздкое выражение приводится к

$$z_2^2 + z_1^2 = c^2 \exp\left[\frac{2\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\,\mathrm{tg}^{-1}\frac{z_2}{z_1}\right] \tag{7.3.9}$$

путем введения координат

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega\sqrt{1-\xi^2} & 0 \\ \xi\omega & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Введем полярную систему координат

$$z_1 = r\cos\varphi,$$
$$z_2 = r\sin\varphi.$$

В полярных координатах уравнение (7.3.9) сводится к

$$r = c\exp\left[\frac{\xi\varphi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right].$$

Таким образом, в плоскости z_1z_2 траектории являются логарифмическими спиралями. Если $1 > \xi > 0$, то радиус уменьшается в направлении отрицательных φ (это отвечает росту t) в соответствии с рис. 7.3.2, *а*. Это случай устойчивого фокуса. Неустойчивый фокус, соответствующий $0 > \xi > -1$, показан на рис. 7.3.2, *б*. При увеличении $|\xi|$ от нуля до единицы отношение радиуса к φ возрастает. Это соответствует перемещению в s-плоскости полюсов системы, задаваемых уравнением (7.3.4), от оси $j\omega$, что согласуется с интуитивно ожидаемым результатом. Траектории относительно фокальной точки в плоскости x_1x_2 представляют собой «деформированный» рис. 7.3.2 и показаны

на рис. 7.3.8. Частным случаем устойчивого фокуса служит пример 5.6.2.

Узел: $|\xi| > 1$, $\omega^2 > 0$. В том случае, когда начало координат является узловой точкой, существуют две траектории в виде

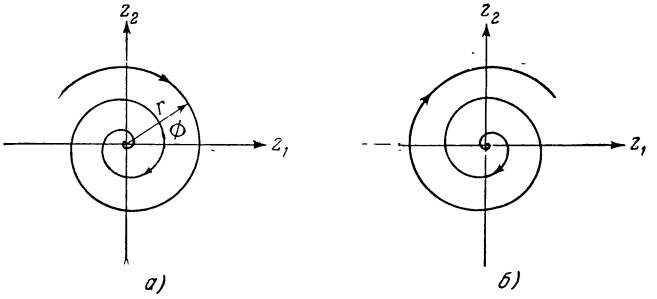


Рис. 7.3.2.

прямых линий. Наклоны этих траекторий определяются корнями уравнения (7.3.7) и служат характеристическими числами уравнения (7.3.4). Траектории показаны на рис. 7.3.3 ($\xi > 1$). Охарактеризовать остальные траектории относительно узловой точки в плоскости x_1x_2 труднее.

С целью определения остальных траекторий полезно ввести преобразование $\mathbf{z} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{x}$ или, точнее,

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_1 & 1 \\ -s_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \quad (7.3.10)$$

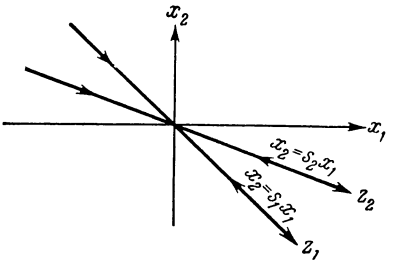


Рис. 7.3.3.

Осями z_1 и z_2 служат траектории, являющиеся прямыми линиями (см. рис. 7.3.3). Таким образом, плоскость z_1z_2 — это «деформированная» плоскость x_1x_2. На основе преобразований (7.3.10) и (7.3.4) уравнение (7.3.2) приводится в случае узловой точки к нормальной форме

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= s_2 z_1, \\ \dot{z}_2 &= s_1 z_2. \end{aligned} \quad (7.3.11)$$

Исключив время, получим

$$\frac{dz_2}{z_2} = \frac{s_1}{s_2}\frac{dz_1}{z_1}.$$

Таким образом, в плоскости z_1z_2 траектории описываются посредством

$$z_2 = c\,(z_1)^{s_1/s_2}. \tag{7.3.12}$$

При $\xi > 1$, $s_1 < s_2 < 0$, так что $s_1/s_2 > 1$. Это соответствует случаю устойчивого узла. Траектории в плоскости z_1z_2 имеют вид

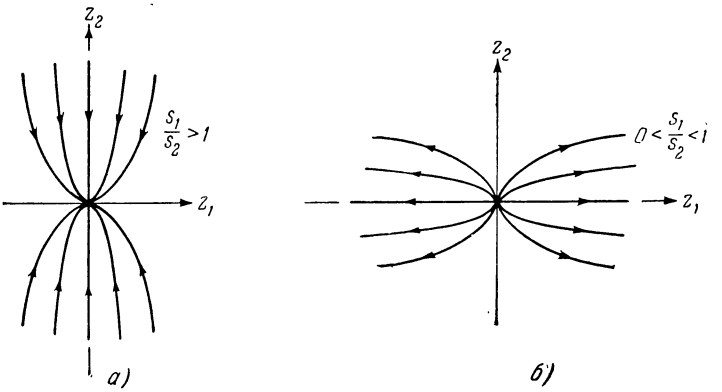


Рис. 7.3.4.

такой же, как на рис. 7.3.4, *а*. В случае неустойчивого узла $\xi < -1$, $s_2 > s_1 > 0$, так что $1 > s_1/s_2 > 0$. Соответствующие траектории в плоскости z_1z_2 показаны на рис. 7.3.4, *б*. Приведенные кривые служат иллюстрацией того факта, что все кривые решения (за исключением кривой вдоль оси z_2) в узловой точке имеют одинаковый ограниченный наклон. При переходе к плоскости x_1x_2 траектории, являющиеся прямыми линиями, искривляются, как показано на рис. 7.3.8. Частным случаем устойчивого узла служит пример 5.6.1.

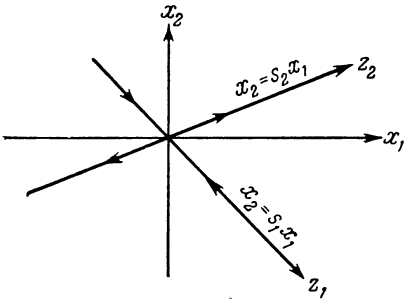


Рис. 7.3.5.

Седловая точка: $\omega^2 < 0$. Если изменить знак коэффициента усиления в цепи внешней обратной связи системы на рис. 7.3.1, то особая точка превратится в точку, известную под названием *седло*. В этом случае характеристическое уравнение имеет вид

$$s^2 + 2\xi|\omega|s - |\omega^2| = 0.$$

Соответствующие характеристические числа равны

$$s_1 = -\xi|\omega| - |\omega|\sqrt{\xi^2+1},$$
$$s_2 = -\xi|\omega| + |\omega|\sqrt{\xi^2+1}.$$

Они соответствуют одному отрицательному действительному корню и одному положительному действительному корню. Поэтому существуют две траектории в виде прямых линий, как это показано на рис. 7.3.5.

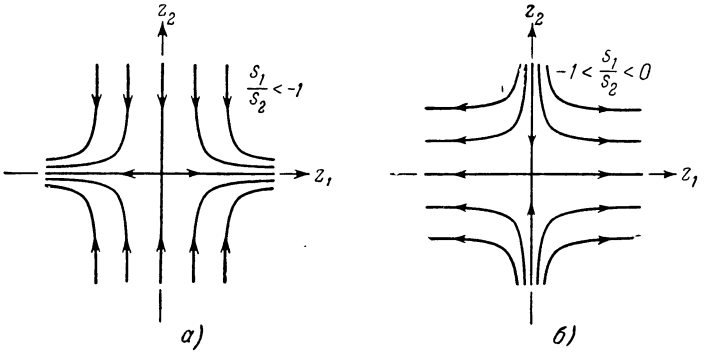


Рис. 7.3.6.

Для определения остальных траекторий снова полезно ввести преобразования (7.3.10). Результирующая нормальная форма

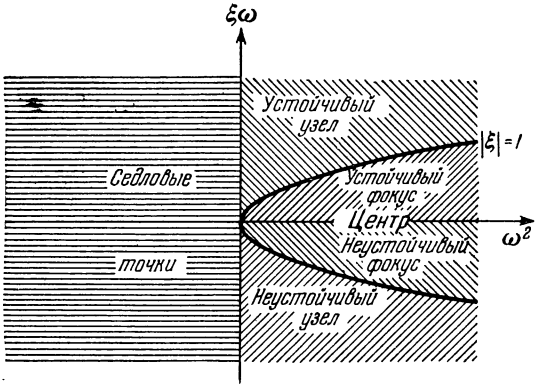


Рис. 7.3.7.

уравнений имеет такой же вид, как и уравнение (7.3.11), так что уравнение (7.3.12) также характеризует траектории в плоскости z_1z_2 при седловой точке. Однако в этом случае, если $\xi|\omega| > 0$, то $s_1/s_2 < -1$, а если $\xi|\omega| < 0$, то $-1 < s_1/s_2 < 0$. Соответствующие

траектории в плоскости z_1z_2 изображены на рис. 7.3.6, *а* и 7.3.6, *б*. В плоскости x_1x_2 траектории показаны на рис. 7.3.8.

$$\ddot{y}+2\xi\omega\dot{y}+\omega^2y=0$$

Особая точка	Собственные значения	Фазовая плоскость
Центр $\xi=0,\ \omega^2>0$	s_1, s_2	x_2, x_1
Устойчивый фокус $0<\xi<1,\ \omega^2>0$	s_2, s_2	x_2, x_1
Неустойчивый фокус $-1<\xi<0,\ \omega^2>0$	s_2, s_1	x_2, x_1
Устойчивый узел $1<\xi,\ \omega^2>0$	s_1 s_2	x_2, x_1, $x_2=s_2x_1$, $x_2=s_1x_1$
Неустойчивый узел $\xi<-1,\ \omega^2>0$	s_1 s_2	$x_2=s_2x_1$, x_2, $x_2=s_1x_1$, x_1

Рис. 7.3.8.

Выводы. Условия, накладываемые на уравнения (7.3.1) при различных особых точках, собраны воедино на рис. 7.3.7. Не рассмотрены случаи $|\xi|=1$ и $\omega^2=0$. Траектории для этих случаев

содержатся на рис. 7.3.8. Соответствующие выражения для траекторий предлагаются в качестве задач.

$$\ddot{y}+2\xi\omega\dot{y}+\omega^2 y=0$$

Особая точка	Собственные значения	Фазовая плоскость
Седловая точка $\omega^2<0$ (рис. для $\xi=0$)	s_1, s_2	$x_2=s_2x_1$; $x_2=s_1x_1$
$\xi=1$ устойчивая	s_1, s_2	$x_2=-\omega x_1$
$\xi=-1$ неустойчивая	s_1, s_2	$x_2=\omega x_1$
$\omega^2=0$ $\xi\omega>0$	$-2\xi\omega$	$x_2=-2\xi\omega x_1+C$
$\omega^2=0$ $\xi\omega<0$	$2\xi\omega$	$x_2=2\xi\omega x_1+C$

Рис. 7.3.8. (продолжение)

Время реакции линейной системы второго порядка определяется просто, так что можно вычислять траектории фазовой плоскости в функции времени. Так, например, можно было бы

воспользоваться уравнениями (5.6.8) и (5.6.14). В данном параграфе это не делается, так как в общем случае их невозможно использовать для нелинейных систем, а интерес к изучению траекторий линейных систем в фазовой плоскости обусловлен их связью с нелинейными задачами. В нелинейном случае раньше часто прибегали к графическим методам определения траекторий, таким, как метод изоклин, метод Льенарда и дельта-метод фазовой плоскости [2—6]. Однако в свете возможностей современной вычислительной техники моделирования эти графические методы утратили свою значимость. В дальнейшем в настоящей книге графические методы не затрагиваются, за исключением краткого изложения в следующем параграфе метода изоклин. Это связано с ознакомительным характером этой главы, а также с убеждением, что в случае невозможности аналитического определения траекторий надлежащее использование метода фазовой плоскости связано с моделированием. Траектории могут быть найдены посредством моделирования, а сам по себе метод фазовой плоскости позволяет определить надлежащее изменение параметров системы для улучшения ее свойств. В связи с этим здесь не рассматриваются более сложные методы нахождения времени движения вдоль траектории [7].

§ 7.4. Вариационные уравнения *)

Как указывалось в предыдущем параграфе, интерес к фазовым траекториям линейной системы второго порядка обусловлен их связью с фазовыми траекториями нелинейной системы второго порядка. В окрестности особых точек нелинейная система ведет себя подобно линейной. Можно воспользоваться этим свойством для определения устойчивости особых точек нелинейной системы. Устойчивость в большей области служит предметом обсуждения последующих параграфов.

Рассмотрим динамическую систему n-го порядка, уравнения состояния которой имеют вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \tag{7.4.1}$$

Это *автономный* случай, т. е. независимая переменная t не присутствует в явном виде. Это соответствует системе, не подверженной извне возмущением и с неизменяющимися во времени параметрами. Уравнение (7.4.1) — сокращенная запись

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

*) Обычно распространены термины уравнения в вариациях, уравнения первого приближения. (*Прим перев.*)

$\dot{\mathbf{x}}$ и $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ — n-мерные векторы. Особые точки уравнения (7.4.1) задаются $\dot{\mathbf{x}}=0$. Следовательно, они являются решениями

$$\mathbf{f}(\mathbf{x})=\mathbf{0}. \tag{7.4.2}$$

В случае линейной системы $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ — линейная функция $\mathbf{x}$. Поэтому уравнение (7.4.2) имеет лишь решение $\mathbf{x}=\mathbf{0}$, если определитель матрицы коэффициентов линейной системы отличен от нуля. Это выполняется, если отсутствуют не охваченные связями («свободные») интеграторы. Тогда соответствующая линейная система содержит только одну особую точку, лежащую в начале координат пространства состояний. Однако в нелинейном случае может существовать более одной особой точки; это следует из возможности существования более одного решения уравнения (7.4.2). Обозначим i-е решение через $\mathbf{x}_{ie}$. Тогда уравнение (7.4.2) принимает вид $\mathbf{f}(\mathbf{x}_{ie})=\mathbf{0}$, $i=1, 2, \ldots$ Если каждая из составляющих $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ раскладывается в окрестности i-й особой точки в ряд Тэйлора, то, ограничиваясь лишь линейными членами разложения, получим

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_{ie})=\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{J}(\mathbf{x}_{ie})(\mathbf{x}-\mathbf{x}_{ie}), \tag{7.4.3}$$

где $\mathbf{J}(\mathbf{x}_{ie})$ — якобиан, вычисленный при $\mathbf{x}=\mathbf{x}_{ie}$, т. е.

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}_{ie})=\left[\begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{array}\right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_{ie}} \tag{7.4.4}$$

В терминах $\mathbf{u}=\mathbf{x}-\mathbf{x}_{ie}$ — переменной, отсчитываемой от особой точки, уравнение (7.4.3) является *вариационным уравнением*:

$$\dot{\mathbf{u}}=\mathbf{J}(\mathbf{x}_{ie})\,\mathbf{u}. \tag{7.4.5}$$

Вариационные уравнения представляют собой однородные дифференциальные уравнения, имеющие в рассматриваемом однородном случае постоянные коэффициенты. Поэтому устойчивость уравнения (7.4.5) определяется корнями

$$|s\mathbf{I}-\mathbf{J}(\mathbf{x}_{ie})|=0. \tag{7.4.6}$$

Тогда возникает вопрос, как связана устойчивость системы (7.4.5) с устойчивостью уравнения (7.4.1).

Можно утверждать, что если какие-либо из корней уравнения (7.4.6) имеют положительные действительные части, то

i-я особая точка неустойчива. Если все корни уравнения (7.4.6) имеют отрицательные действительные части, то i-я особая точка устойчивая [8]. (В этом случае особая точка является, по сути, так называемой асимптотически устойчивой точкой. Однако асимптотическая устойчивость определяется лишь в § 7.7.) Приведенные утверждения об устойчивых и неустойчивых состояниях особых точек даны без доказательства. Наиболее просто они доказываются на основе методов Ляпунова, знакомство с которыми дается в § 7.8.

В случае, когда вариационные уравнения имеют корни с нулевой действительной частью, на основе линейной аппроксимации невозможно сделать вывод об устойчивости или неустойчивости особой точки [9]. Интуитивно данную ситуацию можно рассматривать как граничный случай, когда эффект, оказываемый пренебрегаемыми нелинейными членами, может привести к устойчивости или неустойчивости системы.

Хотя предшествующие утверждения относительно устойчивости особых точек нелинейной системы, как следует из вариационных уравнений, справедливы вне зависимости от порядка

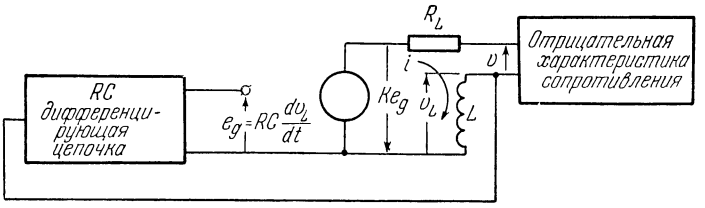


Рис. 7.4.1.

системы, выберем пример второго порядка с тем, чтобы результаты можно было проиллюстрировать на фазовой плоскости.

Пример 7.4.1. На рис. 7.4.1 в упрощенном виде представлена релаксационная цепь [10]. Ее дифференциальное уравнение имеет вид

$$-Ke_g = -KRC\frac{dv_L}{dt} = -KRLC\frac{d^2i}{dt^2} = L\frac{di}{dt} + R_L i + v. \qquad (7.4.7)$$

Характеристика отрицательного сопротивления изображена на рис. 7.4.2 и представляется как

$$v = -r_1 i + r_3 i^3. \qquad (7.4.8)$$

Исследуем поведение данной цепи.

Подстановка уравнения (7.4.8) в (7.4.7) приводит к уравнению

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 2a\frac{di}{dt} - \frac{b^2}{2}i + c^2i^3 = 0, \qquad (7.4.9)$$

где $a={}^1/_2KRC$, $b^2=2(r_1-R_L)/KRCL$ и $c^2=r_3/KRCL$. Определение переменных состояния $x_1=i$ и $x_2=\dot{x}_1$ позволяет записать уравнение (7.4.9) в виде

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=x_2,\\ \dot{x}_2&=\frac{b^2}{2}x_1-c^2x_1^3-2ax_2.\end{aligned}\tag{7.4.10}$$

Приравнивая правую сторону уравнения (7.4.10) к нулю, определим три особые точки с координатами

(1) $x_1=0$, $x_2=0$; (2) $x_1=b/c\sqrt{2}$, $x_2=0$; (3) $x_1=-b/c\sqrt{2}$, $x_2=0$.

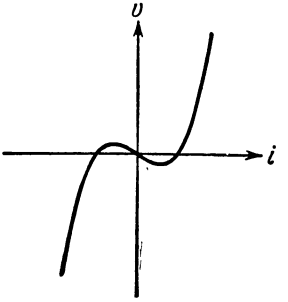


Рис. 7.4.2.

Якобиан (7.4.4), вычисленный в первой особой точке, равен

$$\mathbf{J}_1=\begin{bmatrix}0 & 1\\ b^2/2 & -2a\end{bmatrix}.$$

В этой особой точке уравнение (7.4.6) принимает вид

$$\begin{vmatrix}s & -1\\ -b^2/2 & s+2a\end{vmatrix}=s^2+2as-\frac{b^2}{2}=0.$$

Это соответствует случаю седловой точки (см. рис. 7.3.8; предполагается $r_1>R_L$). Для второй особой точки якобиан равен

$$\mathbf{J}_2=\begin{bmatrix}0 & 0\\ -b^2 & -2a\end{bmatrix}.$$

В этой особой точке уравнение (7.4.6) принимает вид

$$\begin{vmatrix}s & -1\\ b^2 & s+2a\end{vmatrix}=s^2+2as+b^2=0.$$

Поэтому характер этой особой точки зависит от соотношения a и b, так как $\xi=a/b$. В предположении, что $0<\xi<1$, особая точка является устойчивым фокусом. Подобный результат легко получить и для третьей особой точки. Таким образом, поведение цепи (см. рис. 7.4.1) на фазовой плоскости в окрестности особых точек имеет вид, изображенный на рис. 7.4.3. Отметим, что это не указывает на устойчивость системы и не характеризует ее реакцию при произвольных начальных условиях, а просто характеризует ее поведение в малой окрестности особых точек. Действительно, изображенные на рисунке траектории не совсем правильные, так как траектории около данной особой точки будут отличаться от кривых, определенных для линейного случая, ввиду искажений, вносимых соседними особыми точками.

Определение траекторий в больших областях фазовой плоскости представляет собой непростую задачу. Один из подходов состоит в использовании метода изоклин, сводящегося к определению кривых (для линейных систем это прямые линии), соединяющих точки фазовой плоскости, в которых траектории имеют одинаковый наклон. Тогда можно соединить точки с соответствующим наклоном и приблизительно прочертить траектории.

Эта процедура иллюстрируется на рассматриваемом примере. На основе уравнения (7.4.10) запишем

$$\frac{dx_2}{dx_1}=\frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1}=\frac{(b^2/2)\,x_1-c^2x_1^3-2ax_2}{x_2}. \tag{7.4.11}$$

Уравнение (7.4.11) дает наклон в произвольной точке фазовой плоскости. В предположении, что наклон равен постоянной k, уравнение (7.4.11) приводится к виду

$$k=\frac{(b^2/2)\,x_1-c^2x_1^3-2ax_2}{x_2}.$$

Это можно переписать в форме

$$x_2=\frac{x_1\left(b^2/2-c^2x_1^2\right)}{k+2a}.$$

Если бы c равнялось нулю (что соответствует линейной системе), то уравнение (7.4.12) описывало бы прямую линию и можно было бы легко найти изоклины. В этом случае следует задаться значением k и затем вычислить x_2

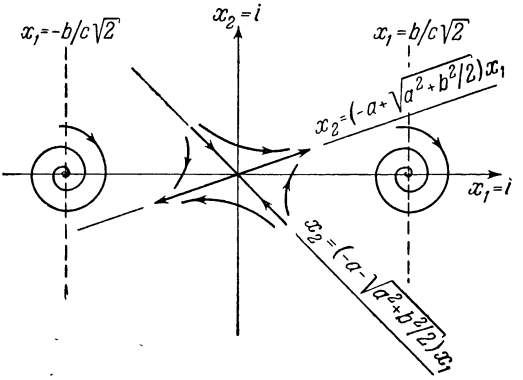


Рис. 7.4.3.

при различных значениях x_1. В результате получим изоклины, изображенные на рис. 7.4.4, для произвольно выбранных $a=c=1$, $b=2$. Соединяя точки изоклин с соответствующим наклоном, можно определить траектории, показанные на рис. 7.4.5.

Траектории рис. 7.4.5 полезны в том смысле, что они характеризуют поведение системы при произвольных начальных условиях. На рис. 7.4.5 изображены два устойчивых состояния. Следовательно, система может использоваться как триггерная. Однако при выбранных параметрах проектирование нецелесообразно в том смысле, что для перевода системы из одного устойчивого состояния в другое требуется чрезвычайно большой сигнал переключения. Это следует из того, что переключающий сигнал должен переводить состояние системы через кривую, называемую сепаратрисой. *Сепаратрисой* называется траектория, проходящая через особые точки и делящая фазовую плоскость на области с различным видом траекторий. Сепаратриса на

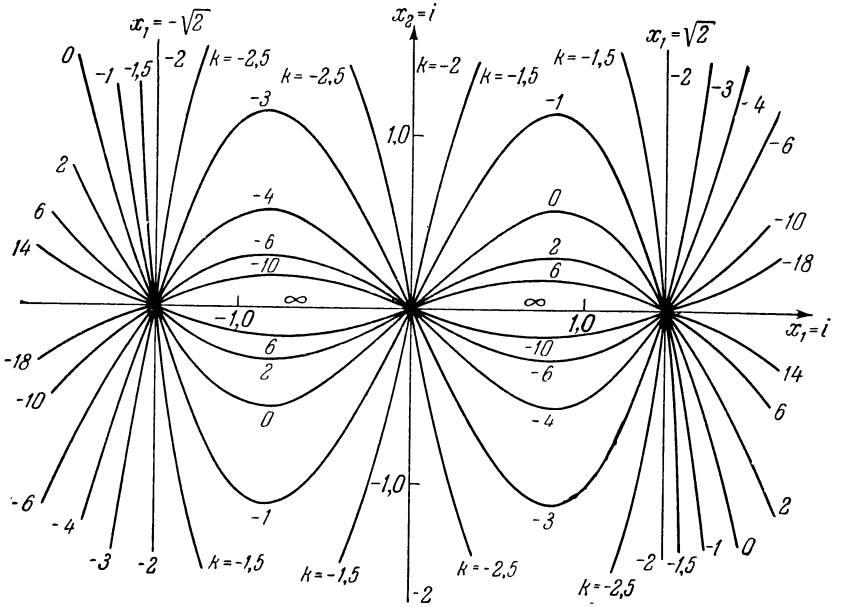


Рис. 7.4.4.

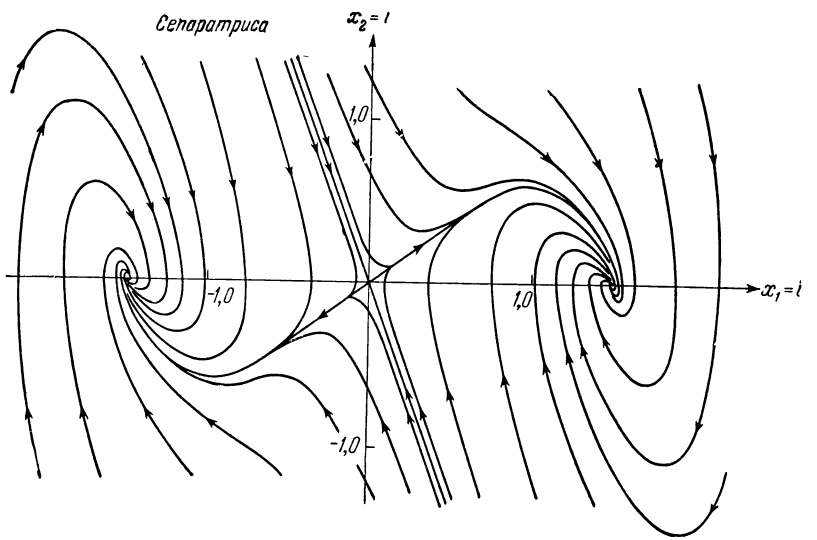


Рис. 7.4.5.

рис. 7.4.5 разделяет траектории, принадлежащие левой и правой фокальным точкам. Так как наклон сепаратрисы приблизительно равен отрицательному характеристическому значению седловой точки, то из анализа фазовой плоскости следует, что величину сигнала переключения можно изменять, изменяя a. Воздействуя на b, также можно было бы изменить требования, предъявляемые к сигналу переключения, но при этом одновременно изменяется и расположение особых точек.

В заключение этого параграфа заслуживает особого внимания надлежащее применение метода фазовой плоскости. Траектории на рис. 7.4.5 можно получить гораздо проще путем моделирования уравнения 7.4.9, чем путем используемого здесь метода изоклин. Метод фазовой плоскости совместно с моделированием следует использовать для указания надлежащего изменения параметров с целью улучшения поведения системы с точки зрения размеров областей устойчивости, величины требуемого сигнала переключения, переходной характеристики и т. д. Вся необходимая для этого информация содержится в уравнениях и рисунках, приведенных в рассмотренном примере.

§ 7.5. Предельные циклы

Нелинейные системы могут обладать особыми траекториями, называемыми предельными циклами, представляющими изолированные замкнутые кривые фазовой плоскости, соответствующие периодическим движениям. Замкнутые траектории имел линейный осциллятор, рассмотрений в § 7.2; однако они не были изолированными, а потому не являлись предельными циклами. Амплитуда периодического движения линейного осциллятора зависит от начальных условий, и существует бесконечное число замкнутых кривых. Нелинейная система обладает фиксированным числом (возможно, и бесконечным) предельных циклов, каждый из которых делит фазовую плоскость на две области с разным характером движения.

Предельные циклы могут быть устойчивыми, неустойчивыми и полуустойчивыми. На рис. 7.5.1, *а* показан устойчивый предельный цикл. Все близлежащие траектории стремятся к предельному циклу при неограниченном возрастании времени. Устойчивый предельный цикл соответствует устойчивому периодическому движению физической системы. На рис. 7.5.1, *б* изображен неустойчивый предельный цикл. Близлежащие траектории удаляются от замкнутой кривой. Другими словами, все близлежащие траектории стремятся к предельному циклу при стремлении времени к *минус* бесконечности. В случае полуустойчивого предельного цикла с ростом времени все траектории, лежащие вблизи по одну сторону от предельного цикла, стремятся к нему, а лежащие по другую сторону — удаляются от него. Такой случай изображен на рис. 7.5.1, *в*.

Существование или отсутствие предельных циклов в поведении системы представляет существенную важность для инжене-

ров. Например, специалист по системам управления в основном стремится к системам без предельных циклов, хотя колебания малой амплитуды иногда и приемлемы. С другой стороны, проектировщика колебательных систем определенно интересует система с устойчивым предельным циклом. С целью ознакомления инженеров с вопросами существования предельных циклов приведем несколько теорем.

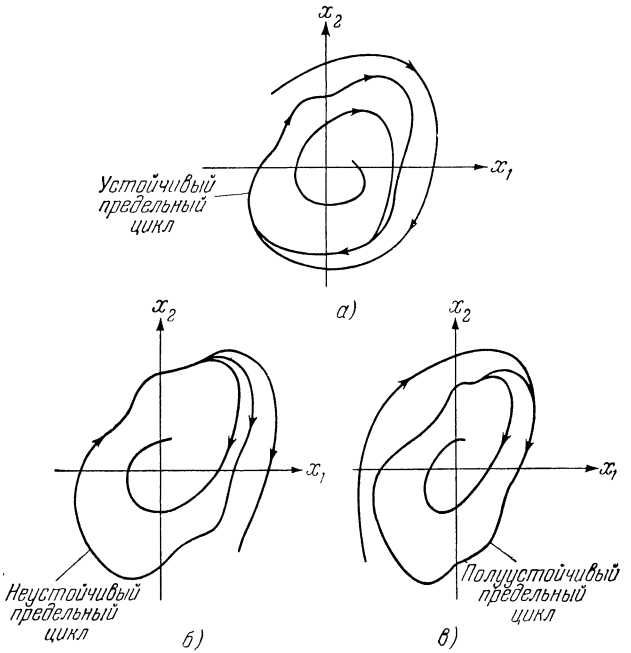


Рис. 7.5.1.

Индекс Пуанкаре [12, 13]. Индекс n замкнутой кривой на фазовой плоскости равен N (общему числу заключенных внутри нее центров, фокусов и узлов) минус S (число заключенных седловых точек), т. е. $n=N-S$. *Необходимое* условие того, чтобы замкнутая кривая была предельным циклом, состоит в равенстве ее индекса $+1$. Этот критерий, однако, не является достаточным условием. В качестве иллюстрации рассмотрим пример 7.4.1. Большая замкнутая кривая на рис. 7.4.5, охватывающая два фокуса и одну седловую точку, имеет индекс $+1$. Поэтому можно предположить существование предельного цикла, охватывающего все особые точки. Однако, как можно показать из критерия Бендиксона, это несправедливо.

Критерий отсутствия замкнутых траекторий Бендиксона. Этот критерий иногда полезен для доказательства отсутствия предельного цикла в какой-либо области фазовой плоскости. Рассмотрим уравнения $\dot{x}_1=f_1(x_1, x_2)$, $\dot{x}_2=f_2(x_1, x_2)$. Наклон произвольной траектории задается посредством

$$\frac{dx_2}{dx_1}=\frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1}=\frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}.$$

Это можно переписать как $f_1(x_1, x_2)dx_2-f_2(x_1, x_2)dx_1=0$. Поэтому вокруг предельного цикла

$$\oint[f_1(x_1, x_2)dx_2-f(x_1, x_2)dx_1]=0. \tag{7.5.1}$$

Согласно теореме Гаусса*) уравнение (7.5.1) приводится к виду

$$\iint\left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right]dx_1\,dx_2=0. \tag{7.5.2}$$

Если подынтегральное выражение уравнения (7.5.2), т. е.

$$I=\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}, \tag{7.5.3}$$

не изменяет знака или не равно тождественно нулю внутри какой-либо области фазовой плоскости, то интеграл (7.5.2) отличен от нуля. Так как интегрирование уравнения (7.5.2) производится вдоль предельного цикла, то в случае отличия от нуля или отсутствия перемены знака I внутри какой-либо области там невозможно существование предельного цикла.

Пример 7.5.1. С целью иллюстрации применения этой теоремы определим I для примера 7.4.1.

Согласно уравнениям (7.4.10) и (7.5.3) имеем $T=-2a$. Так как оно не изменяет знака и отлично от нуля во всей плоскости x_1x_2, то в триггерной схеме на рис. 7.4.1 не может существовать предельного цикла. Таким образом, в электрической цепи на рис. 7.4.1 колебания невозможны. Это важное свойство триггера.

Пример 7.5.2. Система на рис. 7.5.2 характеризуется

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=x_2,\\ \dot{x}_2&=-x_1+2\xi x_2\left(1-\frac{x_2^2}{3a}\right).\end{aligned} \tag{7.5.4}$$

В предположении $0<\xi<1$ эта система обладает только одной особой точкой — неустойчивым фокусом в $x_1=x_2=0$. Поэтому ее индекс равен $+1$, и возможно существование предельного цикла. Применим критерий Бендиксона.

---

*) См. любую из общеизвестных книг по математическому анализу или теории электромагнитного поля.

Вычисление I, заданного уравнением (7.5.3), дает

$$I = 2\xi\left[1 - \frac{x_2^2}{a}\right].$$

Так как I не меняет знака и тождественно не равно нулю при $|x_2| < \sqrt{a}$, то внутри области, характеризуемой $|x_2| < \sqrt{2}$ (в предположении $a>0$),

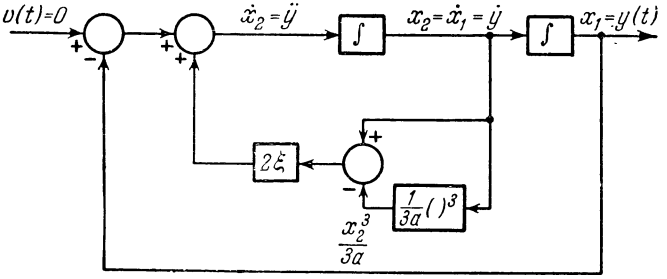


Рис. 7.5.2.

предельный цикл невозможен. Однако, не принадлежа полностью этой области, предельный цикл действительно существует, так как (7.5.4) соответствует уравнению Рэйли [14] $\ddot{y} - 2\xi\dot{y}\left(1 - \frac{\dot{y}^2}{3a}\right) + y = 0$. Отметим, что из выражения для I вытекает невозможность существования предельного цикла при отрицательных значениях a.

Теорема Пуанкаре — Бендиксона [15]. В теореме Пуанкаре — Бендиксона утверждается, что если траектория остается внутри ограниченной области, не приближаясь к какой-либо особой точке, то она либо замкнутая, либо стремится к замкнутой траектории. Такая замкнутая траектория может и не быть предельной (например, замкнутые траектории вокруг центра).

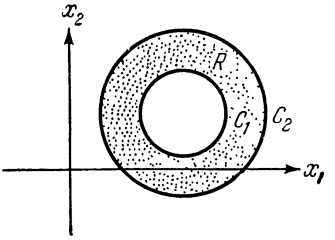


Рис. 7.5.3.

Если можно определить область, относительно которой формулируется теорема, то тогда результаты теоремы весьма полезны. Однако, к сожалению, определить такую область зачастую очень трудно. Один из порой полезных методов состоит в выборе двух концентрических окружностей C_1 и C_2, выделяющих область R, как показано на рис. 7.5.3. Если особые точки не содержатся ни в R, ни на C_1 и C_2 и если траектории входят в R через каждую из точек C_1 и C_2, то существует по крайней мере одна замкнутая траектория, лежащая внутри области R.

Подобное справедливо и для случая, если траектории выходят из R.

Пример 7.5.3. Используем идею теоремы Пуанкаре — Бендиксона, чтобы расширить известную область, в которой уравнение Рэйли не может обладать предельным циклом.

Согласно уравнению (7.5.4) наклон произвольной траектории равен

$$\frac{dx_2}{dx_1}=\frac{-x_1+2\xi x_2\left(1-x_2^2/3a\right)}{x_2}.$$

Пусть C_1 — окружность радиуса r с центром в начале координат, так что $x_1^2+x_2^2=r^2$. Тогда наклон окружности выражается как

$$\frac{dx_2}{dx_1}=-\frac{x_1}{\sqrt{r^2-x_1^2}}=-\frac{x_1}{x_2}.$$

Разность между наклоном траектории и наклоном окружности в общей точке равна

$$\delta=2\xi\left(1-\frac{x_2^2}{3a}\right).$$

Для всех $|x_2|<\sqrt{3a}$, $\delta>0$, так что наклон траектории «более положительный», чем наклон окружности. Это указывает на то, что все траектории выходят из C_1 при любых $r<\sqrt{3a}$. Поэтому система на рис. 7.5.2 не имеет предельных циклов в области, определяемой $r\leqslant\sqrt{3a}$. Эта область больше, чем определяемая критерием Бендиксона.

В данном примере нельзя использовать подобный прием для определения круга C_2, в который входят все траектории, чтобы попытаться определить расположение предельного цикла. Требуемая для этого кривая имеет более сложный вид [16].

Функция последования Пуанкаре *). Функция последования, введенная Пуанкаре, полезна для доказательства определенных теорем о предельных циклах. Для инженеров более важна, однако, возможность ее использования для вывода условий, накладываемых на параметры системы, при которых могут существовать предельные циклы. Это в особенности верно для кусочно-линейных систем, где можно определить траектории в различных районах фазовой плоскости.

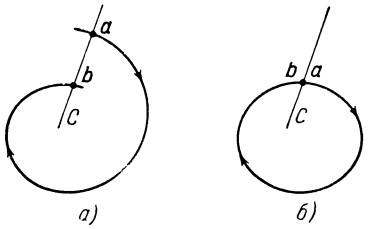


Рис. 7.5.4.

Смысл функции последования иллюстрируется рис. 7.5.4. На рис. 7.5.4, a показана кривая C, которая пересекается траекторией в начале в точке a, а затем в точке b. Поэтому точка b является преемником точки a. Если u — параметр (типа длины

*) См. также функцию соответствия [2]. (*Прим. перев.*)

дуги C), то точки a и b можно записать как функции параметра u в виде $a=\alpha(u_a)$, $b=\alpha(u_b)$. Более того, так как точки a и b принадлежат кривой решения, то они связаны уравнением кривой. Поэтому можно записать u_b как функцию u_a, $u_b=g(u_a)$. Функция $g(u)$ является функцией последования. В случае предельного цикла точки a и b совпадают, как показано на рис. 7.5.4, *б*. Такие точки удовлетворяют решению $u=g(u)$. Эффективность функции последования для определения параметров системы из условий возможности или невозможности существования предельного цикла демонстрируется на примере.

Пример 7.5.4. Рассматриваемая система (рис. 7.5.5, *а*) представляет релейную систему управления с местной обратной связью. Предполагается,

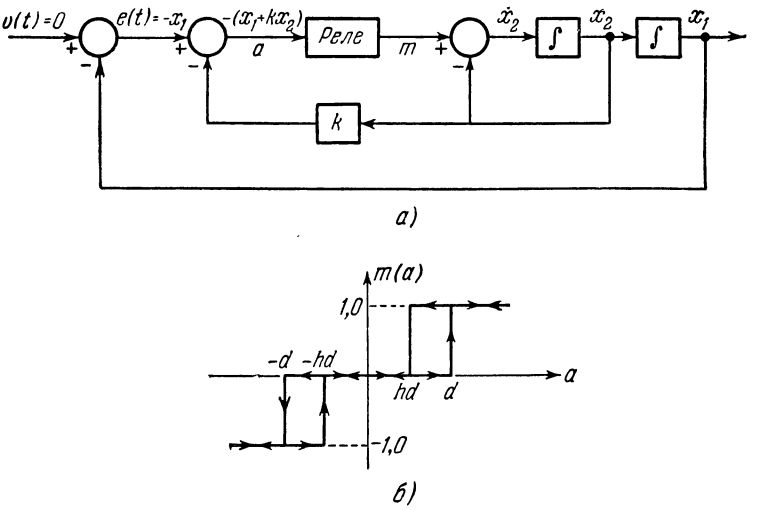


Рис. 7.5.5.

что релейная характеристика обладает зоной нечувствительности и гистерезисом (рис. 7.5.5, *б*). Релейная характеристика нечетная, так что $m(a)=-m(-a)$, где $a=-(x_1+kx_2)$. Выход реле $m(a)$ может принимать значения 0, +1 или —1, в зависимости от величины a и ее предыстории. Для каждого из этих значений уравнения динамики системы линейные, так что система является кусочно-линейной, т. е. фазовую плоскость можно разделить на три области:

$$m(a)=0, \quad \text{область I},$$
$$m(a)=-1, \quad \text{область II},$$
$$m(a)=+1, \quad \text{область III}.$$

Траектории в каждой из областей отвечают соответствующей линейной системе. Воспользуемся функцией последования для определения условий существования предельного цикла.

Траектории для каждой из трех областей определяются из уравнений состояния $\dot{x}_1=x_2$ и $\dot{x}_2=-x_2+m(a)$. Наклоны траекторий задаются

$$\frac{dx_2}{dx_1}=\frac{-x_2+m(a)}{x_2}. \tag{7.5.5}$$

В области I $m(a)$ равна нулю, так что уравнение (7.5.5) принимает вид

$$\frac{dx_2}{dx_1}=-1.$$

В результате непосредственного интегрирования получим выражение для траекторий в области I. Это прямые линии

$$x_2=-x_1+c_1, \quad c_1=\text{const}, \tag{7.5.6}$$

изображенные на рис. 7.5.6. Следует заметить, что в области I задаваемой $|x_1|<d$, $x_2=0$, существует бесконечное множество особых точек.

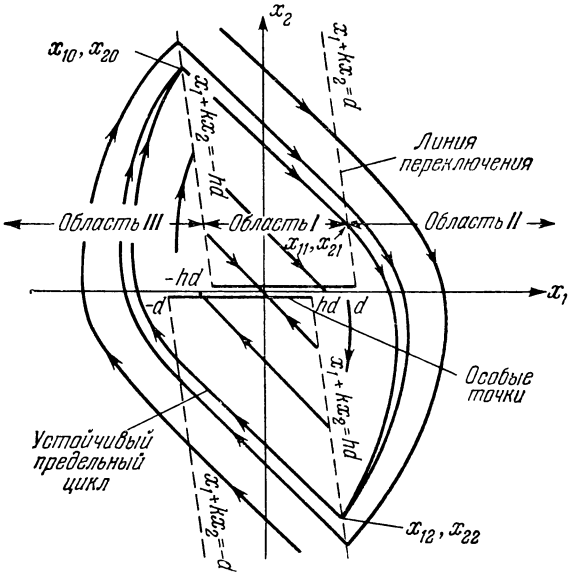


Рис. 7.5.6.

В области II уравнение (7.5.5) имеет вид

$$\frac{dx_2}{dx_1}=-\frac{1+x_2}{x_2}. \tag{7.5.7}$$

Интегрирование уравнения (7.5.7) дает

$$x_1+x_2=\ln(1+x_2)+c_2, \quad c_2=\text{const}. \tag{7.5.8}$$

Траектории в области II показаны на рис. 7.5.6. Они изображены только при $x_2>-1$, так как только для этой области справедливо уравнение (7.5.8). Так как согласно уравнению (7.5.7) наклон траекторий равен нулю при $x_2=-1$, то ни одна из траекторий не может пересечь $x_2=-1$. Поэтому вне

области $|x_2|<1$ невозможно существование предельного цикла. Траектории в области *III* имеют тот же вид, что и в области *II*, только повернуты на 180°.

Три области на рис. 7.5.6 разделены, как указано, четырьмя линиями переключения (предполагается $k>0$). Эти линии являются геометрическим местом точек, соответствующих значениям, при которых происходит переключение реле. Читателю следует сопоставить эти линии переключения с характеристикой реле на рис. 7.5.5, *б* и убедиться в справедливости сказанного.

Возможный устойчивый предельный цикл показан на рис. 7.5.6. Следует еще определить, существует ли предельный цикл в действительности. Для этого определим функцию последования. В связи с «симметрией» примера функцию последования следует рассматривать только в течение полупериода возможного предельного цикла. Именно, определим функцию последования, ставящую в соответствие точке $[x_{10}=-(hd+kx_{20}),\ x_{20}]$ точку $[x_{12}=hd-kx_{22},\ x_{22}]$. Предельный цикл существует, если $x_{12}=-x_{10}$ и $x_{22}=-x_{20}$.

Из уравнения (7.5.6) очевидно, что точки (x_{10}, x_{20}) и (x_{11}, x_{21}) связаны соотношением

$$x_{21}-x_{20}=-(x_{11}-x_{10}). \tag{7.5.9}$$

Ввиду того, что обе точки лежат на линиях переключения, для исключения x_{10} и x_{11} из уравнения (7.5.9) можно использовать выражения для этих линий. Именно, так как $x_{10}+kx_{20}=-hd$ и $x_{11}+kx_{21}=d$, уравнение (7.5.9) переписывается как

$$x_{21}=x_{20}-\frac{d(1+h)}{1-k}. \tag{7.5.10}$$

Подобным образом можно связать x_{21} и x_{22}, воспользовавшись уравнением (7.5.8) и соответствующими выражениями для линий переключения:

$$(1-k)(x_{22}-x_{21})-d(1-h)=\ln\left(\frac{1+x_{22}}{1+x_{21}}\right). \tag{7.5.11}$$

Из уравнений (7.5.10) и (7.5.11) можно исключить x_{21} и тем самым установить взаимосвязь x_{20} и x_{22}. После ряда операций можно записать

$$(1+x_{22})\exp[-x_{22}(1-k)]=\left[1+x_{20}-\frac{d(1+h)}{1-k}\right]\exp[-x_{20}(1-k)+2dh]. \tag{7.5.12}$$

Хотя это выражение и не разрешается относительно x_{22}, оно представляет, в сущности, функцию последования, связывающую эти две координаты. Если $x_{22}=-x_{20}$ удовлетворяет уравнению (7.5.12), то существует предельный цикл. Это действительно так, потому что из этого равенства необходимо следует $x_{12}=-x_{10}$, как для точек, имеющих одинаковый наклон и расположенных симметрично относительно начала координат.

Для того чтобы определить, удовлетворяет ли уравнению (7.5.12) решение $x_{22}=-x_{20}$, положим

$$p_0(x)=\left[1+x-\frac{d(1+h)}{1-k}\right]\exp[-x(1-k)+2dh]$$

и $p_2(x)=(1-x)\exp[x(1-k)]$. Если существует значение x, при котором $p_0(x)=p_2(x)$, то это не что иное, как $x_{20}=-x_{22}$, удовлетворяющее уравнению (7.5.12), так как $p_0(x)$ и $p_2(-x)$ соответственно равны левой и правой частям этого уравнения. Типичный вид пересекающихся кривых $p_0(x)$ и $p_2(x)$ (что соответствует предельному циклу) изображен на рис. 7.5.7 для x в диапазоне $d(1+h)(1-k)\leqslant x\leqslant 1$. Верхний предел определялся ранее в связи

с уравнением (7.5.8). Выбор нижнего предела обусловлен тем, что отрезок траектории предельного цикла, принадлежащий области I, не может пересекать область особых точек, так как в противном случае система пришла бы

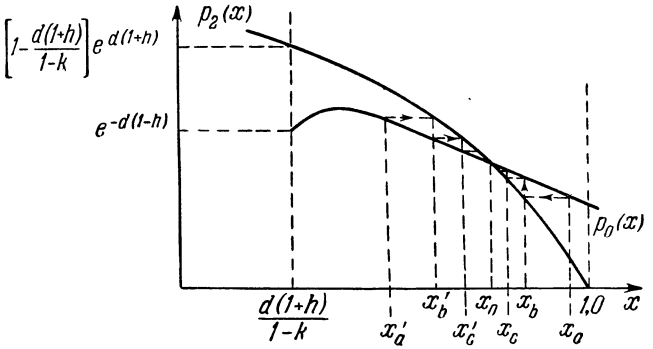


Рис. 7.5.7.

в равновесное состояние. Участок I рис. 7.5.9 выделяет область начальных условий, при которых не существует ни одного периодического движения.

Из значений $p_0(x)$ и $p_2(x)$ при $x = d(1+h)/(1-k)$ очевидно, что кривые пересекаются, если

$$e^{-2d} \leqslant \left[1 - \frac{d(1+h)}{1-k}\right]. \qquad (7.5.13)$$

Поэтому уравнение (7.5.13) является необходимым условием существования

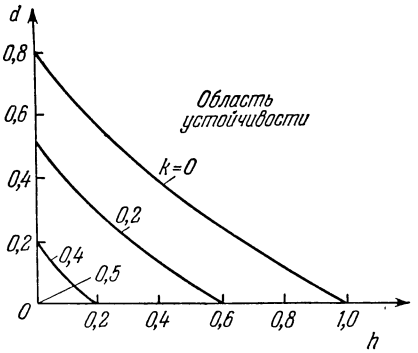


Рис. 7.5.8.

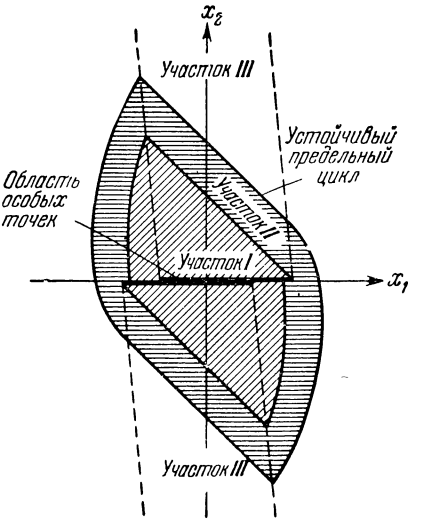


Рис. 7.5.9.

предельного цикла. Величины d и h, удовлетворяющие уравнению (7.5.13) при различных k, лежат ниже соответствующих кривых на рис. 7.5.8. При $k>0{,}5$ предельного цикла не существует.

Чтобы показать существование предельного цикла, если удовлетворяется уравнение (7.5.13), предположим, что $x_{20}=x=x_a$ (см. рис. 7.5.7). Тогда

$p_0(x_a) = p_2(x_b)$ соответствует решению уравнения (7.5.12), так что в результате $x_{22} = -x_b$. Это равно x_{20} для следующего полуцикла, так что новое значение $x_{22}=x_c$. Процедура продолжается до тех пор, пока $x_{20}=x_{22}=x_0$. Предельный цикл устойчивый, так как такой же результат получается, если за исходное значение взять x_a'.

С целью иллюстрации разделим фазовую плоскость на три участка, как показано на рис. 7.5.9. Если начальные условия таковы, что исходная точка находится на участке *I*, то система устойчивая и траектории стремятся к области особых точек. Если начальная точка лежит на участке *II*, то траектории стремятся извне к устойчивому предельному циклу. Если начальная точка принадлежит участку *III*, то все траектории стремятся к устойчивому предельному циклу.

На данном примере продемонстрирована эффективность функции последования для определения условий существования или отсутствия предельных циклов. Из рис. 7.5.8 можно выбрать величину местной обратной связи в зависимости от зоны нечувствительности и гистерезиса реле для обеспечения невозможности существования предельного цикла. На рис. 7.5.7 показывается, каким образом определять размер предельного цикла.

§ 7.6. Понятие скорости изменения энергии. Введение ко второму методу Ляпунова

В противоположность методам, уже рассмотренным в этой главе, второй (или прямой) метод Ляпунова может использоваться для исследования устойчивости систем высокого порядка. Он применим к системам, подверженным и неподверженным действию возмущений, линейным и нелинейным, стационарным и нестационарным, детерминированным и стохастическим. Однако много остается сделать, чтобы этот метод стал эффективным для множества практических задач. По этой причине, а также учитывая ознакомительный характер этой главы, приводимое рассмотрение не является всеобъемлющим.

«Философия» второго метода Ляпунова такая же, как и большинства методов устойчивости, используемых специалистами по системам управления, а именно: ответить, устойчива ли система, не решая характеризующего ее дифференциального уравнения. Основная трудность метода состоит в определении требуемой для суждения об устойчивости подходящей функции Ляпунова. Если можно найти такую функцию, то это свидетельствует об устойчивости. Однако если такая функция не может быть найдена, то это не указывает обязательно на неустойчивость. Ее выбор — скорее отражение опыта и искусства использующего этот метод. Указанные трудности постепенно устранялись по мере развития методов построения различных функций Ляпунова. Несмотря на первую публикацию на русском языке в 1892 г. и перевод на французском языке в 1907 г., нет никакого свидетельства того, что второй метод Ляпунова применялся для исследования устойчивости нелинейных систем раньше 1944 г. В США метод получил распространение в 1949 г.,

однако стал широко использоваться в инженерной практике лишь после 1960 г. [22], [23]. Поэтому в этом направлении предстоит еще много работы.

В качестве введения ко второму методу Ляпунова рассмотрим механическую схему на рис. 7.6.1 (единичая масса может двигаться лишь в направлении y). Характеристики пружины и трения являются нелинейными, как следует из функциональных зависимостей $F_{\text{пружины}}=-k(y)$ и $F_{\text{трения}}=-b(\dot{y})$. Поэтому суммарный эффект от сил, действующих на массу, приводит к нелинейному дифференциальному уравнению, описывающему данную систему, $\ddot{y}+b(\dot{y})+k(y)=0$. Для консервативного или диссипативного случая $b(\dot{y})=0$, и общая энергия системы постоянна.

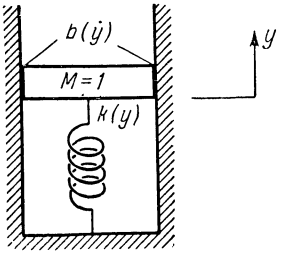


Рис. 7.6.1.

Вначале исследуем на фазовой плоскости случай консервативной системы; положим $x_1=y$ и $x_2=\dot{x}_1$. Тогда система описывается так:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=x_2,\\ \dot{x}_2&=-k(x_1).\end{aligned}\qquad(7.6.1)$$

В предположении $k(0)=0$ и $k(x_1)\neq 0$ при $x_1\neq 0$ существует лишь одна точка равновесия (центр) в начале координат плоскости x_1x_2. Траекториями вокруг центра служат решения уравнения

$$\frac{dx_2}{dx_1}=-\frac{k(x_1)}{x_2}.\qquad(7.6.2)$$

Разделяя переменные и интегрируя уравнение (7.6.2), получим

$$\frac{x_2^2}{2}+\int k(x_1)\,dx_1=c,\quad c=\text{const}.\qquad(7.6.3)$$

Таким образом, траектории имеют вид, изображенный на рис. 7.2.2 Их точная форма зависит от $k(y)$.

Полная энергия этой консервативной системы равна кинетической $x_2^2/2$ плюс потенциальная,

$$\int k(x_1)\,dx_1,$$

т. е. полная энергия

$$E(x_1,x_2)=\frac{x_2^2}{2}+\int k(x_1)\,dx_1.\qquad(7.6.4)$$

Из уравнений (7.6.3) и (7.6.4) следует, что $E(x_1,x_2)=c$. Другими словами, траектории данной консервативной системы на плоскости x_1x_2 являются контурами постоянной полной энергии,

или же изменение во времени энергии системы равно нулю, как это следует также из

$$\frac{dE}{dt} = x_2\dot{x}_2 + k(x_1)\dot{x}_1 = x_2[\dot{x}_2 + k(x_1)] = 0, \tag{7.6.5}$$

где согласно уравнению (7.6.1) $\dot{x}_2 = -k(x_1)$.

В случае диссипативной системы $[x_2 b(x_2) > 0$ при $x_2 \neq 0]$, система описывается так:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -[k(x_1) + b(x_2)]. \end{aligned} \tag{7.6.6}$$

Ее траектории находятся из решения

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{[k(x_1) + b(x_2)]}{x_2}.$$

Для определения решения это выражение можно было бы проинтегрировать графически, используя метод изоклин.

Однако, если требуется лишь информация об устойчивости системы, то проще оценить изменение энергии во времени. Изменение энергии, как следует из уравнения (7.6.5), равно $dE/dt = x_2[\dot{x}_2 + k(x_1)]$. Из уравнения (7.6.6) изменение энергии неконсервативной системы равно $dE/dt = -x_2 b(x_2)$. Если $x_2 b(x_2)$ положительно для произвольной отличной от нуля x_2, то это означает, что вдоль произвольного решения уравнения (7.6.6) энергия всегда убывает (за исключением линии $x_2 = 0$). Значит, если совместить траекторию для этого случая с траекториями на рис. 7.2.2, то в результате мы получили бы картину типа рис. 7.6.2. Движение системы происходит от контура постоянной энергии к контуру меньшей постоянной энергии, за исключением линии $x_2 = 0$. На этой линии dx_2/dx_1 равна бесконечности, если $x_1 \neq 0$. Поэтому на ней (кроме $x_1 = 0$) не может заканчиваться ни одна траектория и, следовательно, система стремится к положению равновесия в начале координат.

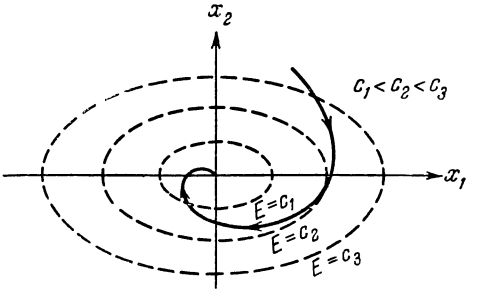


Рис. 7.6.2.

Предыдущее рассмотрение служит «интуитивным» объяснением того, что если изменение энергии изолированной физической системы отрицательно при любом ее возможном состоянии

(кроме единственной точки равновесия), то уменьшение энергии будет продолжаться до тех пор, пока она не достигнет своего минимального значения в состоянии равновесия [23]. Это согласуется с интуитивным понятием устойчивости. Однако при попытке превратить эту интуитивную идею в строгий математический метод исследования устойчивости возникает ряд проблем. Одна из трудностей состоит в том, что не существует естественного пути определения энергии, когда уравнения системы заданы в «чисто» математической форме. Чтобы обойти эту трудность, ознакомимся с понятием функции Ляпунова.

Функция Ляпунова является скалярной функцией состояния системы. Как следует из приведенного выше, иногда (хотя это и не обязательно) она может характеризовать полную энергию системы. Посредством теорем Ляпунова и ряда других ученых можно точно определить различные виды устойчивости, соответствующие различным условиям, накладываемым на функцию Ляпунова.

Различные виды устойчивости рассматриваются в следующем параграфе.

§ 7.7. Устойчивость и асимптотическая устойчивость

В предыдущих параграфах настоящей главы рассматривалась «устойчивость» автономных нелинейных систем. В свете изложенного читателю, знакомому только с устойчивостью линейных систем, следует обратить внимание на ряд важных обстоятельств.

Прежде всего устойчивость линейной системы — это свойство самой системы; она не зависит от состояний системы или от приложенных к ней входных сигналов. Линейная система устойчива или неустойчива во всем пространстве состояний. Понятие же устойчивого поведения нелинейной системы, как следует из вариационных уравнений системы, применимо лишь для бесконечно малой области вокруг особых точек системы. Более того, нелинейная система может обладать как устойчивыми, так и неустойчивыми особыми точками и, следовательно, для одних областей пространства состояний система может быть устойчивой, а для других — неустойчивой. Поэтому рассмотрение устойчивости нелинейной системы следует связывать с понятием области пространства состояний. Как будет видно из дальнейшего, эта область в отдельных случаях может охватывать все пространство состояний.

Во-вторых, если «устойчивая» линейная система (за исключением случаев недемпфированного линейного осциллятора и интегратора) выводится из точки равновесия, то она возвра-

щается в эту точку спустя бесконечный интервал времени. Возмущенная же нелинейная система может вернуться в ту же точку устойчивого равновесия, перейти в некоторую другую устойчивую точку, совершать колебания, соответствующие предельному циклу, или обладать одним или более состояниями неограниченного возрастания переменных системы. Для характеристики этих свойств «интуитивного» понятия устойчивости недостаточно.

Наконец, как объяснить, исходя из «интуитивного» понятия устойчивости, существование устойчивого, неустойчивого и полуустойчивого предельных циклов? Отметим, что в данном случае рассматривается устойчивость замкнутой траектории, а не устойчивость системы. В случае линейной системы часто говорят об «устойчивости системы» как таковой (в связи с тем, что устойчивость является ее свойством). В нелинейном же случае устойчивость не является свойством самой системы. Поэтому правильнее рассматривать не устойчивость системы, а устойчивость движений или траекторий, т. е. точные понятия устойчивости относятся к отклонениям или «возмущениям» состояний системы относительно некоторых движений.

С целью определения этих понятий предположим, что $\mathbf{u}_s(t)$ — решение уравнения

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{g}(\mathbf{u}, t), \tag{7.7.1}$$

так что

$$\dot{\mathbf{u}}_s = \mathbf{g}(\mathbf{u}_s, t). \tag{7.7.2}$$

Правомерен вопрос: как будет вести себя результирующее решение $\mathbf{u}(t)$ относительно $\mathbf{u}_s(t)$, если $\mathbf{u}(t)$ внезапно отклонится от $\mathbf{u}_s(t)$? Остается ли $\mathbf{u}(t)$ с течением времени в окрестности $\mathbf{u}_s(t)$ или оно расходится от $\mathbf{u}_s(t)$? Математически это эквивалентно введению переменной $\mathbf{x} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_s$, измеряющей отклонение $\mathbf{u}(t)$ от решения $\mathbf{u}_s(t)$. Тогда вместо уравнения (7.7.1) имеем

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{u}}_s = \mathbf{g}[\mathbf{x} + \mathbf{u}_s, t]. \tag{7.7.3}$$

Подстановка уравнения (7.7.2) в (7.7.3) приводит к дифференциальному уравнению для возмущенного движения $\mathbf{x}(t)$ в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}[\mathbf{x} + \mathbf{u}_s, t] - \mathbf{g}[\mathbf{u}_s, t]. \tag{7.7.4}$$

Уравнение (7.7.4) имеет устойчивую точку в начале координат, так как оно обладает тривиальным решением $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Поэтому теперь можно рассматривать устойчивость начала координат эквивалентной системы

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{f}(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0}, \tag{7.7.5}$$

где $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{g}[\mathbf{x} + \mathbf{u}_s, t] - \mathbf{g}[\mathbf{u}_s, t]$. К сожалению, уравнение (7.7.5) часто оказывается более сложным, чем исходное уравнение (7.7.1). Более того, для определения (7.7.5) необходимо знать решение $\mathbf{u}_s(t)$ уравнения (7.7.1). Тем не менее уравнение (7.7.5) позволяет сформулировать определения устойчивости как устойчивость положения равновесия в начале координат; так в последних работах формулируется большинство теорем об устойчивости. Подобным образом даются определения ниже.

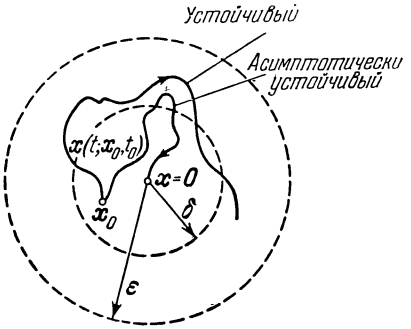


Рис. 7.7.1.

Состояние равновесия уравнения (7.7.5) *устойчивое*, если все движения системы, вызванные малыми возмущениями относительно точки равновесия, остаются в соответственно малой ее окрестности. Согласно рис. 7.7.1 указанное можно записать в строгой математической форме [24, 25].

Состояние равновесия уравнения (7.7.5) устойчивое, если для данного $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$, что из $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$ следует $\|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, t_0)\| < \varepsilon$ для всех $t \geqslant t_0$. $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, t_0)$ — реакция на внезапное возмущение $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$ в момент t_0, а $\|\mathbf{x}\|$ — длина вектора $\mathbf{x}$ в евклидовом пространстве, т. е. $\|\mathbf{x}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$.

Другими словами, прежде всего точно задана граница возмущенного движения. Если теперь можно найти такое граничное значение δ величины возмущения $\mathbf{x}_0$, чтобы возмущенное движение $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, t_0)$, обусловленное любыми $\mathbf{x}_0$ внутри области δ, всегда оставалось внутри области ε, то говорят, что равновесие является устойчивым. Если устойчивые состояния отсутствуют, то равновесие называется *неустойчивым*.

Как указывалось ранее, это понятие устойчивости имеет локальный смысл. Иногда его рассматривают как устойчивость в малом, так как *априорно* неизвестно, какой малой придется выбирать область δ. Например, вокруг устойчивой точки равновесия на фазовой плоскости может существовать неустойчивый предельный цикл. Если бы выбрать δ слишком большой величины, то возмущенное движение не возвратилось бы в окрестность точки равновесия.

Особая точка центр, свойственная линейному осциллятору, в соответствии с приведенным выше определением является устойчивой, так как, уменьшая величину начальных условий, амплитуду колебаний можно сделать как угодно малой. Для

большинства систем управления (за исключением, возможно, систем стабилизации) желательно «более сильное» понятие устойчивости. Обычно стремятся, чтобы возмущенная система возвращалась в точку равновесия, что соответствует асимптотической устойчивости. Это свойственно устойчивым фокусам и узлам. Данное понятие снова имеет локальный смысл и определяется согласно Ляпунову следующим образом [24, 25].

Состояние равновесия уравнения (7.7.5) (по определению, находящееся в начале координат) *асимптотически устойчивое*, если оно устойчивое и, кроме того, существует такое $\delta_c(\varepsilon, t_0) > 0$, что при $\|\mathbf{x}_0\| < \delta_0$ решение $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, t_0)$ стремится к 0 при стремлении t к бесконечности.

Существуют обобщения указанных определений устойчивости; в математической литературе бытует и много других определений. Обобщения, а также дополнительные определения, полезные для инженерной практики, представлены в последних параграфах. В следующем параграфе рассматривается применение второго метода Ляпунова для исследования поведения автономных непрерывных систем.

§ 7.8. Второй метод Ляпунова для автономных непрерывных систем. Локальное рассмотрение

Как указывалось выше, устойчивость или асимптотическая устойчивость положения равновесия в начале координат для автономной системы

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{f}(0) = 0 \tag{7.8.1}$$

часто определяется на основе второго метода Ляпунова. Если положение равновесия находится не в начале координат, то на основе метода сведения к уравнению (7.7.5) рассмотрение можно проводить уже относительно начала координат. Предполагается, что $\mathbf{f}(x)$ такая непрерывная функция, что обеспечивается существование, единственность и непрерывная зависимость решений от начальных условий.

Второй метод Ляпунова предполагает использование непрерывной скалярной функции переменных состояния $V(\mathbf{x})$ совместно с уравнениями состояния (7.8.1). В зависимости от свойств $V(\mathbf{x})$ и ее производной по времени можно судить о неустойчивости или различных формах устойчивости положения равновесия. Два наиболее важных типа $V(\mathbf{x})$ — это полуопределенная и определенная формы *).

*) См. также § 4.9.

Функция $V(\mathbf{x})$ является полуопределенной в окрестности начала координат, если она непрерывная, обладает непрерывными первыми частными производными и имеет в этой окрестности одинаковый знак, за исключением точек, в которых она обращается в нуль. $V(\mathbf{x}) \geqslant 0$ — *положительно полуопределенная*, а $V(\mathbf{x}) \leqslant 0$ — *отрицательно полуопределенная функции.*

Функция $V(\mathbf{x})$ является определенной в окрестности начала координат, если она непрерывная, обладает непрерывными первыми частными производными и имеет в этой окрестности одинаковый знак, нигде не обращаясь в нуль, за исключением, возможно, начала координат. $V(\mathbf{x}) > 0$ при $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ — *положительно определенная*, а $V(\mathbf{x}) < 0$ при $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ — *отрицательно определенная функции.*

Данные определения иллюстрируются рассмотрением примеров в n-мерном пространстве состояний, где $V(\mathbf{x}) = V(x_1, x_1, \ldots, x_n)$.

Пример 7.8.1. $V(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2)^2 + x_3^2$, $n = 3$.

Здесь $V(\mathbf{x})$ — положительно полуопределенная функция, так как она положительна всюду, кроме $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ и $x_1 = -x_2$, $x_3 = 0$.

Пример 7.8.2. $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$, $n = 2$.

Здесь $V(\mathbf{x})$ — положительно определенная функция, так как она положительна всюду, кроме начала координат, где обращается в нуль.

Пример 7.8.3. $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$, $n = 3$.

Здесь $V(\mathbf{x})$ — положительно полуопределенная функция, так как при $x_1 = x_2 = 0$ и любых x_3 она обращается в нуль.

Пример 7.8.4. $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$.

Здесь $V(\mathbf{x})$ — положительно определенная функция при любых n.

Пример 7.8.5. $V(\mathbf{x}) = -\left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right)$.

Здесь $V(\mathbf{x})$ — отрицательно определенная функция при любых n. Взятая со знаком минус произвольная положительно определенная функция будет отрицательно определенной.

Пример 7.8.6.

$$V(\mathbf{x}) = \sum_{i,\, j=1}^{n} q_{ij} x_i x_j = \langle \mathbf{x}, \mathbf{Q}\mathbf{x} \rangle, \quad q_{ij} = q_{ji}.$$

Согласно теореме Сильвестра необходимым и достаточным условием положительной определенности $V(\mathbf{x})$ является положительность всех главных миноров Q, т. е.

$$q_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{vmatrix} > 0 \quad \ldots, \quad \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & \ldots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \ldots & q_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{n1} & q_{n2} & \ldots & q_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

Доказательство этой теоремы дано в § 4.9.

В соответствии со вторым методом Ляпунова помимо определенной функции $V(\mathbf{x})$ следует рассматривать и производную от

$V(\mathbf{x})$ по времени на траекториях данной системы. Производная от $V(\mathbf{x})$ по времени, обозначаемая через W, равна

$$W = \dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}\dot{x}_2 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_n}\dot{x}_n. \qquad (7.8.2)$$

Вдоль произвольной траектории, соответствующей уравнению (7.8.1), имеем

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Поэтому на произвольной траектории системы уравнение (7.8.2) имеет вид

$$W = \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1(\mathbf{x}) + \frac{\partial V}{\partial x_2} f_2(\mathbf{x}) + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_n} f_n(\mathbf{x}).$$

Обозначив градиент $V(\mathbf{x})$ через $\mathbf{grad}\, V(\mathbf{x})$, запишем производную по времени от $V(\mathbf{x})$ как

$$W = \langle \mathbf{grad}\, V, \mathbf{f} \rangle. \qquad (7.8.3)$$

Функция W равна производной по времени от $V(\mathbf{x})$ на решениях дифференциального уравнения (7.8.1). Отметим, однако, что для оценки W знания решений уравнения (7.8.1) не требуется.

Теорема устойчивости Ляпунова может записываться относительно функции $V(\mathbf{x})$ и W.

Теорема устойчивости Ляпунова [26—28]. Положение равновесия данной системы дифференциальных уравнений (7.8.1) является устойчивым, если можно найти такую определенную функцию $V(\mathbf{x})$, что $V(\mathbf{0}) = 0$, а W — функция полуопределенная и противоположная ей по знаку или тождественно равная нулю. $V(\mathbf{x})$, удовлетворяющая требованиям теоремы устойчивости Ляпунова, называется *функцией Ляпунова.*

К требованиям, накладываемым на функцию Ляпунова, можно прийти интуитивно, рассматривая нелинейную механическую систему § 7.6. Предположим, что $V(\mathbf{x})$ — полная энергия для случая консервативной системы, описываемая уравнением (7.6.4). Это уравнение приводится ниже как (7.8.4)

$$E(x_1, x_2) = V(x_1, x_2) = \frac{x_2^2}{2} + \int_0^{x_1} k(u)\, du. \qquad (7.8.4)$$

Отметим, что $V(\mathbf{0}) = 0$ и $V(\mathbf{x})$ положительно определенная, так как любая реальная пружина такова, что знак $k(u)$ совпадает

со знаком u. Из уравнения (7.6.5) производная по времени от $V(\mathbf{x})$ равна

$$\frac{dE}{dt} = W = x_2[\dot{x}_2 + k(x_1)]. \tag{7.8.5}$$

Для случая консервативной системы $\dot{x}_2 = -k(x_1)$ и W тождественно равна нулю. Это соответствует расположению особой точки центр в начале координат; система движется по траектории, являющейся контуром постоянной энергии. Поэтому при заданном возмущении относительно начала координат система останется в его окрестности и потому устойчива.

В случае неконсервативной системы уравнения (7.6.5) и (7.6.6) дают $W = -x_2 b(x_2)$. Если $x_2 b(x_2) \geqslant 0$, то в силу отрицательной полуопределенности W энергия никогда не может увеличиваться. Возмущенная система остается в окрестности начала координат и является устойчивой. Если $x_2 b(x_2) > 0$, $x_2 \neq 0$, то энергия дожна уменьшаться. Возмущенная система вернется в начало координат, т. е. является асимптотически устойчивой. Условие, накладываемое на W согласно требованию асимптотической устойчивости, содержится в теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости.

Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости [29—31]. Положение равновесия данной системы дифференциальных уравнений (7.8.1) является асимптотически устойчивым, если можно найти такую определенную функцию $V(\mathbf{x})$, что $V(\mathbf{0}) = 0$, а W — функция определенная и противоположная ей по знаку.

Пример 7.8.7. На рис. 7.8.1 представлена система второго порядка с нелинейной обратной связью. Следует определить условия, накладываемые

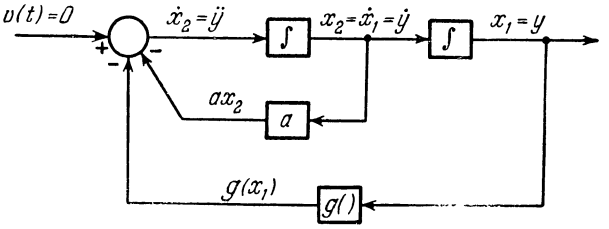


Рис. 7.8.1.

на a и $g(\ )$, при которых положение равновесия будет асимптотически устойчивым.

Уравнения состояния суть $\dot{x}_1 = x_2$ и $\dot{x}_2 = -g(x_1) - ax_2$ (предполагается, что $g(x_1) = 0$ только при $x_1 = 0$, так что единственное положение равновесия в точке $x_1 = x_2 = 0$). Так как эти уравнения подобны (7.6.6), то функция

$$V(x) = \frac{x_2^2}{2} + \int_0^{x_1} g(u)\,du$$

может быть выбрана в качестве функции Ляпунова. Отметим, что $V(0)=0$ и $V(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x}\neq 0$ положительна, если зависимость $g(u)$ от u занимает первый и третий квадранты (сплошная кривая на рис. 7.8.2). Последнее условие выражется как

$$\frac{g(u)}{u} > 0, \quad u\neq 0. \tag{7.8.6}$$

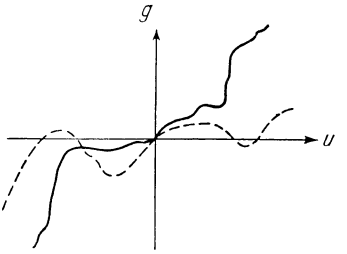


Рис. 7.8.2.

Если удовлетворяется уравнение (7.8.6), то $V(\mathbf{x})$ — положительно определенная функция.

Теперь, рассматривая производную от $V(\mathbf{x})$ по времени, имеем $W = g(x_1)x_2 - x_2[g(x_1)+ax_2] = -ax_2^2$. Она отрицательно полуопределена при $a\geqslant 0$, что указывает на устойчивость положения равновесия.

Положение равновесия является асимптотически устойчивым, если удовлетворяется уравнение (7.8.6) и $a>0$. Это непосредственно не вытекает из теоремы Ляпунова, так как W не является отрицательно определенной функцией. Однако всюду, где W не удовлетворяет определению отрицательной определенности, т. е. $x_2=0$, $x_1\neq 0$, $\frac{dx_2}{dx_1}$ равна бесконечности. Следовательно, ни одна траектория не может заканчиваться на оси x_1, за исключением начала координат.

Отметим, что положение равновесия остается асимптотически устойчивым и при нелинейной характеристике, показанной на рис. 7.8.2 пунктиром. В этом случае $V(\mathbf{x})$ будет также положительно определенной, так как площадь, ограниченная этой характеристикой, будет по-прежнему положительной при любом u, отсчитанном от начала координат. Однако данная характеристика образует другие положения равновесия, которые могут не быть асимптотически устойчивыми.

Пример 7.8.8 [32, 33]. Барбашин исследовал устойчивость нелинейного дифференциального уравнения

$$\frac{d^3y}{dt^3} + a\frac{d^2y}{dt^2} + g\left(\frac{dy}{dt}\right) + h(y) = 0. \tag{7.8.7}$$

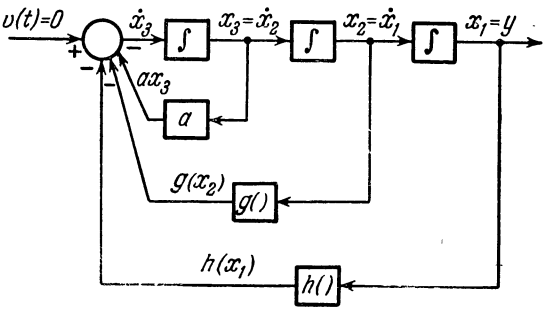


Рис. 7.8.3.

Предполагается, что $g(r)$ непрерывная, а $h(u)$ — непрерывно дифференцируемая функции. Предполагается также, что $g(r)=0$ и $h(u)=0$ только соответственно при $r=0$ и $u=0$. Уравнения состояния относительно переменных, показанных на рис. 7.8.3,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= -h(x_1) - g(x_2) - ax_3, \end{aligned} \tag{7.8.8}$$

имеют единственное положение равновесия при $x_1=x_2=x_3=0$. Определить условия асимптотической устойчивости на основе второго метода Ляпунова.

Надлежащая функция Ляпунова для данной системы имеет вид *)

$$V(\mathbf{x}) = a\int_0^{x_1} h(r)\,dr + \int_0^{x_2} g(r)\,dr + \frac{1}{2}(ax_2+x_3)^2 + x_2 h(x_1).$$

Отметим, что $V(\mathbf{0})$ равна нулю. Производная от $V(\mathbf{x})$ по времени равна

$$W = ah(x_1)\dot{x}_1 + g(x_2)\dot{x}_2 + (ax_2+x_3)(a\dot{x}_2+\dot{x}_3) + x_2\frac{dh(x_1)}{dx_1}\dot{x}_1 + h(x_1)\dot{x}_2.$$

Подстановка $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$ и $\dot{x}_3$ из уравнения (7.8.8) дает

$$W = -\left[a\frac{g(x_2)}{x_2} - \frac{dh(x_1)}{dx_1}\right]x_2^2.$$

W удовлетворяет условиям отрицательной определенности (за исключением линии $x_3=0$), если

$$a\frac{g(x^2)}{x_2} - \frac{dh(x_1)}{dx_1} > 0, \quad x_2 \neq 0. \tag{7.8.9}$$

Тогда согласно аргументации, приведенной в примере 7.8.7, положение равновесия системы на рис. 7.8.3 асимптотически устойчиво, если $V(\mathbf{x})$ — положительно определенная функция. Теперь исследуем условия, которым должна удовлетворять $V(\mathbf{x})$.

Если a и $h(u)$ таковы, что

$$\begin{gathered} a > 0, \\ \frac{h(u)}{u} > 0, \quad u \neq 0, \end{gathered} \tag{7.8.10}$$

то соблюдаются условия положительной определенности первого члена функции V. Более того, из уравнений (7.8.10) и (7.8.9) следует $g(x_2)/x_2>0$ при $x_2\neq 0$. Это означает, что второй член функции V положительно определенный, если удовлетворяются уравнения (7.8.9) и (7.8.10). Условиям положительной определенности удовлетворяет и третий член функции V, кроме значений $ax_2=-x_3$, где он равен нулю. Однако и в этом случае $V(\mathbf{x})$ отлична от нуля, так как второй член положителен.

Остается рассмотреть последний член функции V при $x_2\neq 0$. В этом случае можно записать функцию V в виде

$$V(x) = \frac{1}{2}(ax_2+x_3)^2 + \frac{[2G(x_2)+x_2h(x_1)]^2 + 4\int_0^{x_1} h(u)\int_0^{x_2}\left[a\frac{g(r)}{r} - \frac{dh(u)}{du}\right]r\,dr\,du}{4G(x_2)},$$

где

$$G(x_2) = \int_0^{x_2} g(r)\,dr.$$

*) Эта функция Ляпунова выводится в примере 7.14.2.

Сумма первого слагаемого $V(\mathbf{x})$ и первого слагаемого дробного члена $V(\mathbf{x})$ всегда положительна при отличном от нуля x_2 Интегрирование по r согласно уравнению (7.8.9) дает положительную величину. Следовательно, и интеграл по u положителен. Таким образом, теперь можно сказать, что $V(\mathbf{x})$ — положительно определенная функция и положение равновесия является асимптотически устойчивым, если удовлетворяются уравнения (7.8.9) и (7.8.10).

Интересно отметить, что данный критерий асимптотической устойчивости положения равновесия содержит члены, соответствующие двум типам линеаризации [23, 24]. Это — $dh(u)/du$ и $h(u)/u$, представленные на рис. 7.8.4 для точки $u = u_0$. Первый характеризуется наклоном рассматриваемой функции, тогда как второй характеризуется наклоном прямой, пересекающей функцию в данной точке. Если $h(u)$ было бы напряжением, а u — током нелинейного сопротивления, то dh/du являлось бы сопротивлением переменному току или динамическим сопротивлением, а $h(u)/u$ — сопротивлением постоянному току или статическим сопротивлением, причем оба определяются в точке u_0.

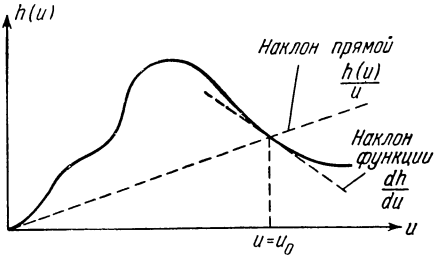


Рис. 7.8.4.

Если динамическое и статическое сопротивления таковые, как в случае линейной функции $h(y)$, а также если $g(\dot{y})$ — линейная функция, то в уравнении (7.8.7) можно $h(y)$ заменить $a_0 y$, а $g(\dot{y})$ — заменить $a\dot{y}$. Тогда получим

$$\frac{d^3y}{dt^3} + a\frac{d^2y}{dt^2} + a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y = 0, \tag{7.8.11}$$

и условия устойчивости, задаваемые уравнениями (7.8.9) и (7.8.10), принимают вид

$$\begin{aligned} a &> 0, \\ a_0 &> 0, \\ aa_1 - a_0 &> 0. \end{aligned} \tag{7.8.12}$$

Они в точности совпадают с условиями устойчивости Рауса — Гурвица для линейной системы, описываемой уравнением (7.8.11). Однако, к сожалению, при попытке исследовать нелинейную систему методом линеаризации обычно не очевидно, какой из типов линеаризации следует применять. Иллюстрацией служит рассмотренный пример, включающий в себя оба вида линеаризации.

В заключение данного параграфа следует подчеркнуть, что рассмотрена устойчивость или асимптотическая устойчивость положения равновесия в начале координат для автономных систем. Выводы имеют локальный смысл, — они справедливы лишь в малой окрестности положения равновесия. Однако чувствуется, что асимптотическая устойчивость системы на рис. 7.8.3 при условиях (7.8.9) и (7.8.10) носит более чем локальный характер, так как «эквивалентная» линейная система, описываемая уравнением (7.8.11), устойчива всюду, если выполняется (7.8.12). Это действительно так, что подтверждается в следующем параграфе.

§ 7.9. Асимптотическая устойчивость в большом

При рассмотрении в предыдущем параграфе указывалось на возможность того, что положение равновесия может быть асимптотически устойчивым вне зависимости от начальной точки движения $\mathbf{x}_0$. В этом случае говорят, что положение равновесия *асимптотически устойчиво в большом.* Данный вид устойчивости чрезвычайно важен для инженера, так как он гарантирует, что все возмущенные движения вернутся к точке равновесия. Более того, этот тип устойчивости связан с действием

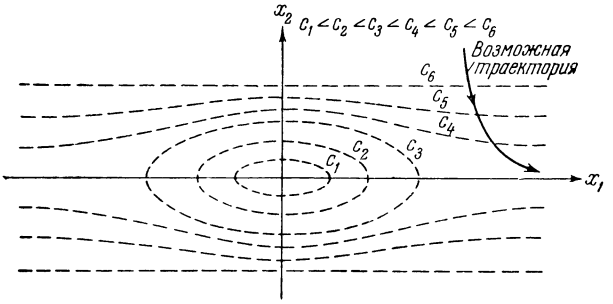


Рис. 7.9.1.

возмущений на движения системы, что рассматривается в следующем параграфе.

Теорема 7.9.1 [35, 36]. Если система дифференциальных уравнений (7.8.1) асимптотически устойчива, т. е. если $V(\mathbf{x}) > 0$ и $\dot{V} < 0$ для всех $\mathbf{x} \neq 0$ и если $V(\mathbf{x})$ стремится к бесконечности при неограниченном возрастании $\|\mathbf{x}\|$, то точка в начале координат асимптотически устойчива в большом.

Требование асимптотической устойчивости в большом включает в себя помимо асимптотической устойчивости необходимость стремления $V(\mathbf{x})$ к бесконечности при неограниченном увеличении $\mathbf{x}$ в *любом направлении.* Данное требование можно интуитивно понять, возвращаясь к нелинейной механической системе, рассмотренной в § 7.6 и снова в § 7.8. Кривые постоянной энергии задаются уравнением (7.8.4) в виде

$$E(x_1, x_2) = V(x_1, x_2) = \frac{x_2^2}{2} + \int_0^{x_1} k(u)\,du = c, \quad c = \text{const}. \tag{7.9.1}$$

Предположим, что $k(u)$ таково, что член, характеризующий потенциальную энергию, при стремлении x_1 к бесконечности не возрастает неограниченно, а стремится к конечному пределу c_0.

Если $c_0 < c$, то кривые, соответствующие постоянной V, могут не быть все замкнутыми, как на рис. 7.6.2, а могут иметь вид, как на рис. 7.9.1. В этом случае начало координат может быть асимптотически устойчивым, но не асимптотически устойчивым в большом. Отсутствие асимптотической устойчивости в большом объясняется тем, что при достаточно большом $\mathbf{x}_0$ система может двигаться от состояния с большей энергией к состоянию с меньшей энергией, минуя положение равновесия в начале координат. Требование асимпотической устойчивости в большом устраняет эту возможность [37].

Пример 7.9.1. Определить условия, при которых система на рис. 7.8.1 асимптотически устойчива в большом.

В этом случае вместо уравнения (7.8.6) следует записать $g(u)/u \geqslant \alpha > 0$, $u \neq 0$. α — постоянная величина. Это обеспечивает стремление $V(\mathbf{x})$ к бесконечности при неограниченном увеличении $\|\mathbf{x}\|$.

Пример 7.9.2. Определить условия, при которых система на рис. 7.8.3 асимптотически устойчива в большом.

Условия, выражаемые уравнениями (7.8.9) и (7.8.10), заменяются следующими:

$$a > 0,$$

$$\frac{h(u)}{u} \geqslant \alpha_1 > 0, \quad u \neq 0,$$

$$a\frac{g(x_2)}{x_2} - \frac{dh(x_1)}{dx_1} \geqslant a\alpha_2 - \alpha_1 > 0, \quad x_2 \neq 0,$$

где α_1 и α_2 — постоянные величины.

Пример 7.9.3 [38]. Уравнения Эйлера

$$I_x\dot{\omega}_x - (I_y - I_z)\,\omega_y\omega_z = M_z,$$
$$I_y\dot{\omega}_y - (I_z - I_x)\,\omega_x\omega_z = M_y,$$
$$I_z\dot{\omega}_z - (I_x - I_y)\,\omega_x\omega_y = M_z$$

описывают движение твердого тела относительно главных осей инерции. I_x, I_y и I_z означают моменты инерции относительно этих осей; ω_x, ω_y и ω_z — угловые скорости; M_x, M_y и M_z — моменты внешних сил.

Предположим, что твердым телом служит космический аппарат, кувыркающийся на орбите; желательно устранить качания путем приложения управляющих моментов, пропорциональных угловым скоростям. Управляющие моменты равны $M_x = -k_x\omega_x$, $M_y = -k_y\omega_y$, $M_z = -k_z\omega_z$. Для определения устойчивости можно воспользоваться методом Ляпунова.

Выбор переменных состояния $x_1 = \omega_x$, $x_2 = \omega_y$ и $x_3 = \omega_z$ позволяет описать систему в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})\,\mathbf{x}, \tag{7.9.2}$$

где

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -\dfrac{k_x}{I_x} & \dfrac{I_y}{I_x}x_3 & -\dfrac{I_z}{I_x}x_2 \\ -\dfrac{I_x}{I_y}x_3 & -\dfrac{k_y}{I_y} & \dfrac{I_z}{I_y}x_1 \\ \dfrac{I_x}{I_z}x_2 & -\dfrac{I_y}{I_z}x_1 & -\dfrac{k_z}{I_z} \end{bmatrix}. \tag{7.9.3}$$

Отметим, что система обладает точкой равновесия $\mathbf{x}=0$. Пусть $V(\mathbf{x})$ — положительно определенная квадратичная форма, как в примере 7.8.6, т. е. $V(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{Q}\mathbf{x}\rangle$ и выберем

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} I_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & I_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & I_z^2 \end{bmatrix}, \tag{7.9.4}$$

так что $V(\mathbf{x}) = I_x^2 x_1^2 + I_y^2 x_2^2 + I_z^2 x_3^2$ — квадрат нормы полного углового момента. Соответствующая производная от $V(\mathbf{x})$ по времени равна $\dot{W} = \langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{Q}\mathbf{x}\rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{Q}\dot{\mathbf{x}}\rangle$. Используя уравнение (7.9.2), получим $\dot{W} = \langle \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x}, \mathbf{Q}\mathbf{x}\rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{Q}\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x}\rangle$. Это можно переписать как

$$\dot{W} = \langle \mathbf{x}, [\mathbf{A}^T(\mathbf{x})\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\mathbf{A}(\mathbf{x})]\mathbf{x}\rangle. \tag{7.9.5}$$

Уравнение (7.9.5) имеет вид $\dot{W} = -\langle \mathbf{x}, \mathbf{P}\mathbf{x}\rangle$, где

$$-\mathbf{P} = \mathbf{A}^T(\mathbf{x})\,\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\mathbf{A}(\mathbf{x}). \tag{7.9.6}$$

Поэтому $\dot{W}$ — отрицательно определенная функция, если $\mathbf{P}$ — положительно определенная функция. Тогда ввиду положительной определенности $V(\mathbf{x})$ и стремления ее к бесконечности при неограниченном увеличении $\mathbf{x}$, положение равновесия будет асимптотически устойчивым в большом, если $\mathbf{P}$ — положительно определенная функция. Подстановка уравнений (7.9.3) и (7.9.4) в уравнение (7.9.6) дает

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2k_x I_x & 0 & 0 \\ 0 & 2k_y I_y & 0 \\ 0 & 0 & 2k_z I_z \end{bmatrix}.$$

При положительных k_x, k_y, k_z $\mathbf{P}$ является положительно определенной и положение равновесия асимптотически устойчиво в большом.

§ 7.10. Первая каноническая форма Лурье. Абсолютная устойчивость

Применительно к определенным классам систем можно вывести общий критерий устойчивости. Рассмотрен ряд стандартных форм. Наиболее эффективной из них оказывается первая каноническая форма Лурье, исследуемая Лурье, Летовым, Ла-Саалем, Лефшецем и другими [40—43]. Здесь рассматривается только эта форма.

Первая каноническая форма Лурье может оказаться полезной для исследования устойчивости систем, которые можно привести к виду, изображенному на рис. 7.10.1, *а*. Эквивалентная схема, полученная объединением $G_1(s)$, $G_2(s)$ и $H(s)$, так что $G(s) = -G_1(s)\,G_2(s)\,H(s)$, дана на рис. 7.10.1, *б*. В результате разложения $G(s)$ на простейшие дроби, как в § 5.5, система принимает вид, показанный на рис. 7.10.1, *б*. Предполагается,

что λ, являющиеся характеристическими числами, или собственными значениями, различные и отрицательные*). Величины b

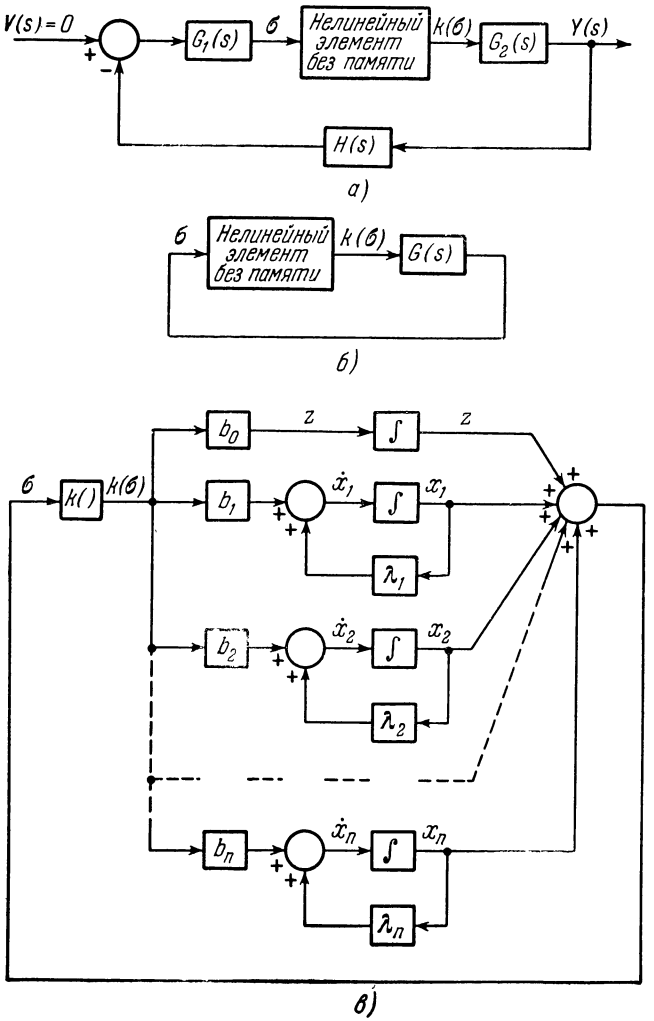


Рис. 7.10.1.

равны вычетам G в полюсах. Формулировка включает наличие в линейной динамической части одного интегрирующего звена.

*) Подобным образом рассматривается случай нескольких комплексно сопряженных λ с отрицательными действительными частями.

Из рис. 7.10.1, *в* следует, что рассматриваемая система характеризуется уравнением

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{\Lambda x} + k(\sigma)\,\mathbf{b}, \\ \dot{z} &= b_0 k(\sigma), \\ \sigma &= \langle \mathbf{1},\ \mathbf{x}\rangle + z. \end{aligned} \tag{7.10.1}$$

$\mathbf{\Lambda}$ — диагональная матрица с элементами, равными характеристическим числам $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, а $\mathbf{b}$ и $\mathbf{1}$ — векторы с составляющими соответственно $b_1, b_2, \ldots, b_n$ и $1, 1, \ldots, 1$. Так как $\dot{\sigma} = \langle \mathbf{1}, \dot{\mathbf{x}}\rangle + \dot{z}$, то можно записать $\dot{\sigma}$ как

$$\dot{\sigma} = \langle \boldsymbol{\lambda},\ \mathbf{x}\rangle - rk(\sigma), \tag{7.10.2}$$

где $r = -(b_0 + b_1 + \ldots + b_n)$ — скалярная величина, а вектор $\boldsymbol{\lambda}$ имеет составляющие $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Функция Ляпунова для этой системы имеет вид

$$V(\mathbf{x},\ z,\ \sigma) = \langle \mathbf{x},\ \mathbf{Qx}\rangle + \int_0^{\sigma} k(\alpha)\,d\alpha,$$

где $\mathbf{Q}$ — положительно определенная функция, а $k(\sigma)$ ограничивается классом функций, для которых

$$\begin{aligned} &\frac{k(\sigma)}{\sigma} \geqslant e > 0,\ \ \sigma \neq 0,\ \ e = \text{const}, \\ &k(0) = 0. \end{aligned} \tag{7.10.3}$$

Отметим, что из $\sigma = 0$ и $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ следует $z = 0$, так что $V(\mathbf{x}, z, \sigma)$ является положительно определенной для всех $\mathbf{x}$, z и σ. Более того, $V(\mathbf{x}, z, \sigma)$ стремится к бесконечности при неограниченном возрастании $\|\mathbf{x}\|$, σ или z. Последнее условие, т. е. стремление $V(\mathbf{x}, z, \sigma)$ к бесконечности при неограниченном возрастании z, вытекает из того факта, что если z стремится к бесконечности (рис. 7.10.1, *в*) то или σ стремится к бесконечности или один из x_i стремится к минус бесконечности.

Производная по времени от $V(\mathbf{x}, z, \sigma)$ равна $W = \langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{Qx}\rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{Q}\dot{\mathbf{x}}\rangle + k(\sigma)\dot{\sigma}$. Подстановка уравнений (7.10.1) и (7.10.2) дает

$$W = \langle \mathbf{x},\ [\mathbf{\Lambda}^T\mathbf{Q} + \mathbf{Q\Lambda}]\,\mathbf{x}\rangle + k(\sigma)[\langle \mathbf{b},\ \mathbf{Qx}\rangle + \langle \mathbf{x},\ \mathbf{Qb}\rangle] + \\ + k(\sigma)[\langle \boldsymbol{\lambda},\ \mathbf{x}\rangle - rk(\sigma)].$$

Подобно уравнению (7.9.6) желательно выбрать такую положительно определенную $\mathbf{P}$, чтобы $-\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}^T\mathbf{Q} + \mathbf{Q\Lambda}$. В этом случае $\mathbf{\Lambda}$ — диагональная матрица, так что $\mathbf{\Lambda}^T = \mathbf{\Lambda}$. Более того, так как

матрица $\mathbf{Q}$ симметрическая, $\langle \mathbf{b}, \mathbf{Qx} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{Qb} \rangle$. Тогда

$$W = -\langle \mathbf{x}, \mathbf{Px} \rangle + k(\sigma)[2\mathbf{b}^T\mathbf{Q} + \boldsymbol{\lambda}^T]\mathbf{x} - rk^2(\sigma).$$

W — квадратичная форма относительно $\mathbf{x}$ и $k(\sigma)$; она отрицательно определенная в том и только в том случае, если [44]

$$r > \left[\mathbf{Qb} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda}\right]^T \mathbf{P}^{-1}\left[\mathbf{Qb} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda}\right]. \tag{7.10.4}$$

Предположим, что $\mathbf{Q}$ задается как

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} q_{11} & & \dots & 0 \\ & q_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & q_{nn} \end{bmatrix}, \quad q_{ii} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где все недиагональные элементы равны нулю. Тогда уравнение (7.10.4) становится равным

$$r > -S, \tag{7.10.5}$$

где S задается выражением

$$S = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} \frac{[b_i + \lambda_i/q_{ii}]^2}{\lambda_i/q_{ii}}.$$

Это условие совместно с уравнением (7.10.3) является достаточным для асимптотической устойчивости в большом. Однако в нем может содержаться больше ограничений, чем это необходимо. Поэтому желательно определить q_{ii}, накладывающие наименее жесткие ограничения на r.

Величина S отрицательна, так как $\lambda_i < 0$. Поэтому наименьшее ограничение на r состоит в том, чтобы $|S|$ был минимальным. Если $b_i > 0$, то выбор q_{ii} из условия $\lambda_i/q_{ii} = -b$ делает i-й член S равным нулю. Если $b_i < 0$, то i-й член $|S|$ принимает минимальное значение при $\lambda_i/q_{ii} = b_i$. Соответствующее значение i-го члена равно b_i. Поэтому если первые m b_i положительные, а оставшиеся $n - m$ — отрицательные, то уравнение (7.10.5) приводится к виду

$$-b_0 > b_1 + b_2 + \dots + b_m. \tag{7.10.6}$$

Вполне очевидно, что уравнение (7.10.6) применимо, если только величина $(-b_0)$ «более положительна», чем сумма положительных вычетов $G(s)$. Так как уравнение (7.10.3) совместно с уравнением (7.10.6) образуют достаточные, а не необходимые условия для асимптотической устойчивости в большом, то неудовлетворение этим условиям не означает обязательно, что

система неустойчивая. Это может означать, что данный критерий неприменим к рассматриваемому частному случаю.

Если удовлетворяется уравнение (7.10.6), то положение равновесия является асимптотически устойчивым при нелинейной характеристике, отвечающей уравнению (7.10.3). Устойчивость этого вида, т. е. асимптотическая устойчивость в большом, для отчасти произвольных $k(\sigma)$ называется *абсолютной устойчивостью*. Путем видоизменения предыдущей процедуры (например, выбором различных **Q**) или функций Ляпунова можно вывести различные другие критерии абсолютной устойчивости [45, 46].

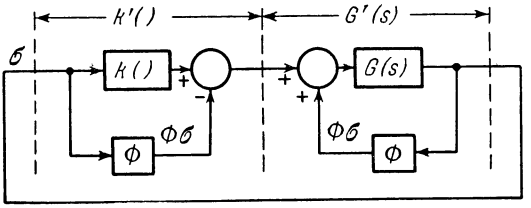


Рис. 7.10.2.

Пример 7.10.1. Исследовать абсолютную устойчивость положения равновесия системы с $G(s) = -(s+3)/(s+2)(s-1)$.

Так как $G(s)$ не содержит полюсы в начале координат, уравнение (7.10.6) нельзя непосредственно использовать. Однако оно применимо при использовании метода, известного как метод *смещения полюсов* [47]. Метод смещения полюсов можно проиллюстрировать на рис. 7.10.2. Каналы φ прямой и обратной связи взаимно исключают друг друга, так что основная система и условия ее устойчивости остаются неизменными. Однако обратную связь вокруг $G(s)$ можно использовать для смещения полюсов $G'(s)$, так как

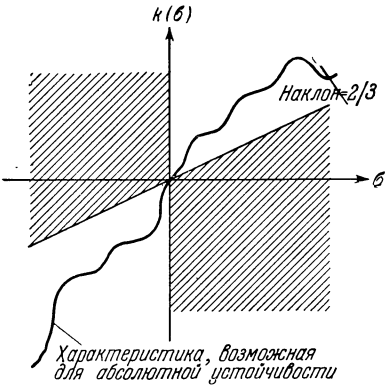


Рис. 7.10.3.

$$G'(s) = \frac{G(s)}{1 - \varphi G(s)}.$$

В рассматриваемом примере

$$G'(s) = \frac{-(s+3)}{s^2 + (1+\varphi)s + (3\varphi - 2)},$$

так что выбрав $\varphi = \frac{2}{3}$, получим полюс $G'(s)$ в начале координат. Теперь применимо уравнение (7.10.6).

Для $\varphi = \frac{2}{3}$

$$G'(s) = \frac{-(s+3)}{s\left(s + \frac{5}{3}\right)} = \frac{-\frac{9}{5}}{s} + \frac{\frac{4}{5}}{s + \frac{5}{3}}.$$

Поэтому $b_0 = -\frac{9}{5}$ и $b_1 = \frac{4}{5}$, так что согласно уравнению (7.10.6) при абсолютной устойчивости

$$\frac{k'(\sigma)}{\sigma} = \left[\frac{k(\sigma) - \frac{2}{3}\sigma}{\sigma}\right] \geqslant e > 0.$$

Ввиду того, что в соответствии с уравнением (7.10.3) $k'(\sigma)$ ограничена первым и третьим квадрантами, $k(\sigma)$ должна ограничиваться незаштрихованной областью на рис. 7.10.3. Если заменить $k(\sigma)$ линейным коэффициентом усиления k, то условие, накладываемое на k согласно критерию Рауса — Гурвица, в точности совпадает с изображенным на рис. 7.10 3. М. А. Айзерман показал, что это в общем случае справедливо для систем второго порядка [48].

§ 7.11. Устойчивость при возмущениях. Практическая устойчивость

В предыдущих главах движения системы рассматривались относительно возмущающей силы, «внезапно» выводящей систему из состояния равновесия, а затем мгновенно исчезающей. Устойчивость является свойством движения, указывающим на то, что действие малого возмущения на движение невелико. Асимптотическая устойчивость указывает также, что реакция от малого возмущения исчезает со временем. Асимптотическая устойчивость в большом свидетельствует о том, что вне зависимости от величины возмущения вызываемая им реакция со временем исчезает. Однако в мире реальных физических систем приходится сталкиваться с множеством возмущений не «импульсного» типа. Так, часто они бывают стохастическими. Предшествующее же рассмотрение касалось лишь возмущений в виде мгновенных импульсов.

Полная устойчивость — вид устойчивости, относящийся к постоянно действующим возмущениям. В сущности, полная устойчивость означает, что движение системы будет оставаться вблизи равновесного состояния, если система не находится от него «слишком далеко» и если не «очень велики» действующие на нее возмущения. Рассматривая невозмущенную систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{f}(0) = 0 \tag{7.11.1}$$

и обозначая возмущения через $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, получим возмущенную систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t). \tag{7.11.2}$$

Теорема 7.11.1. Состояние равновесия уравнения (7.11.1) является полностью устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие $\delta(\varepsilon) > 0$ и $\delta_1(\varepsilon) > 0$, что при $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$ и $\|\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\| < \delta_1$ для всех $\mathbf{x}$ и $t \geqslant t_0$ выполняется условие

$$\|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, t)\| < \varepsilon, \quad t > t_0 \quad [49—53].$$

Полная устойчивость аналогична устойчивости и асимптотической устойчивости в том смысле, что неизвестно как велики могут быть в действительности $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Полезно иметь вид полной устойчивости, аналогичный асимптотической устойчивости в большом. Такая форма предусмотрена Ла-Саалем и Лефшецем [53]. По отношению к полной устойчивости это *практическая устойчивость* и, следовательно, по отношению к требуемой форме устойчивости — это *сильная практическая устойчивость*. Данный тип устойчивости связан с условием, при котором состояние равновесия является полностью устойчивым, и дополнительно любое решение $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, t_0)$ уравнения (7.11.2) при возмущении $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, принадлежащем области U, в конечном счете лежит в ограниченной области R, содержащей положение равновесия. Предполагается, что движения системы начинаются при t_0 из области R_0, содержащейся в R.

Теорема 7.11.2 [53]. Пусть скалярная функция $V(\mathbf{x})$ имеет непрерывные первые частные производные и стремится к бесконечности при неограниченном возрастании $\|\mathbf{x}\|$. Если производная от $V(\boldsymbol{x})$ по времени, определенная на уравнении (7.11.2), такова, что $W \leqslant -\varepsilon < 0$ для всех $\boldsymbol{x}$ вне R_0 и $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, принадлежащих U, $t \geqslant t_0$, и если $V(\boldsymbol{x}) \leqslant V(\mathbf{q})$ для всех $\mathbf{x}$, принадлежащих R_0 и $\mathbf{q}$ вне R, то уравнение (7.11.1) обладает сильной практической устойчивостью.

Эта теорема предусматривает указание величин $\mathbf{x}_0$ и возмущений, при которых возможна полная устойчивость.

Пример 7.11.1. Возвращаясь к примеру 7.9.3, учтем действие моментов возмущающих сил, обусловленных солнечной радиацией. В связи с этим внешние моменты равны

$$M_x = -k_x\omega_x + u_x,$$
$$M_y = -k_y\omega_y + u_y,$$
$$M_z = -k_z\omega_z + u_z,$$

где управляющие моменты определены ранее, а моменты от возмущающих сил относительно осей x, y и z равны соответственно u_x, u_y и u_z.

Используя ту же функцию $V(\mathbf{x})$, что и в примере 7.9.3, получим W для возмущенной системы в виде

$$W = -2[I_x x_1(k_x x_1 - u_1) + I_y x_2(k_y x_2 - u_2) + I_z x_3(k_z x_3 - u_3)],$$

где вместо u_x, u_y и u_z записаны соответственно u_1, u_2 и u_3. Пусть u_{1m}, u_{2m} и u_{3m} — наибольшие абсолютные значения возмущений в области U. Если в качестве R_0 выбрать внутреннюю область эллипсоида, три точки поверхности которого $(u_{1m}/k_x, 0, 0)$, $(0, u_{2m}/k_y, 0)$ и $(0, 0, u_{3m}/k_z)$, то $W \leqslant -\varepsilon < 0$ для всех $\mathbf{x}$ вне R_0 и всех $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, принадлежащих U, $t \geqslant t_0$. Если выбрать в качестве R некоторую область, бо́льшую, чем R_0, то $V(\mathbf{x}) \leqslant V(\mathbf{q})$ для всех $\mathbf{x}$, принадлежащих R_0 и $\mathbf{q}$ вне R. Поэтому данная система обладает сильной практической устойчивостью. Отметим, что если максимальные значения возмущений увеличиваются, то аналогичные области R_0 и R соответствуют бо́льшим значениям коэффициентов усиления k_x, k_y и k_z.

§ 7.12. Оценка переходного процесса

Функция Ляпунова для автономных систем с асимптотически устойчивым положением равновесия может использоваться для оценки границ переходного процесса [22]. С этой стороной метода Ляпунова лучше всего познакомиться на примере простой линейной системы на рис. 7.12.1. Скорость изменения реакции системы определяется T, постоянной времени замкнутой цепи, которая обратна коэффициенту усиления разомкнутой цепи.

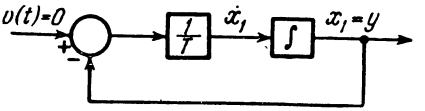


Рис. 7.12.1.

Система характеризуется $\dot{x}_1 = -x_1/T$. Надлежащая для исследования устойчивости функция $V(x)$ равна $V(x_1) = \frac{x_1^2}{2}$. Скорость изменения $V(x_1)$ равна $W = dV/dt = x_1\dot{x}_1 = -x_1^2/T$. Как и следовало ожидать, $V(x_1)$ и W свидетельствуют об асимптотической устойчивости системы в большом, если T — положительная величина.

Однако цель проводимого здесь рассмотрения состоит не в устойчивости. Предметом исследования служит скорость переходного процесса системы. Мерой этого служит нормированная скорость изменения функции Ляпунова. Так, в этом случае

$$-\frac{dV/dt}{V} = -\frac{W}{V} = \frac{2}{T}. \tag{7.12.1}$$

Интегрирование уравнения (7.12.1) приводит к выражению для изменения $V = V(x_{10})e^{-2t/T}$ вдоль движения данной системы. Так как функция Ляпунова равна или пропорциональна, в зависимости от ее выбора, энергии системы, то она в общем случае зависит от квадратов переменных состояния. По этой причине постоянная времени изменения данной функции Ляпунова равна половине постоянной времени системы. Таким образом, $-W/V$ служит в данном примере мерой скорости изменения реакции системы.

Для более сложных систем положение не столь очевидное, как в рассмотренном примере линейной системы первого порядка. Обычно величина $-W/V$ изменяется при изменении состояний системы. Это иллюстрируется на следующем примере.

Пример 7.12.1. Для системы из примера 7.8.7

$$-\frac{W}{V} = \frac{2a}{1 + \left(2/x_2^2\right)\int\limits_0^{x_1} g(u)\,du}, \quad x_2 \neq 0.$$

Исследуем влияние параметров системы, на скорость ее переходного процесса.

С точки зрения скорости процесса проектировщику следует выбирать величину a как можно большей. Однако нужно быть осторожным с выводами относительно функции $g(\ )$, так как ее влияние на $-W/V$ зависит от величин x_1 и x_2.

§ 7.13. Релейные регуляторы для линейных динамических объектов

Идеи предыдущего параграфа можно использовать для проектирования релейных регуляторов к объектам, описываемым

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{m}, \tag{7.13.1}$$

где $\mathbf{m}$, вход объекта управления, ограничен $|m_i(t)| \leqslant M_i$. Определив функцию Ляпунова для данной системы при $\mathbf{m}=\mathbf{0}$, а затем выбрав $\mathbf{m}$ таким образом, чтобы W была по возможности отрицательной, в результате получим, что система быстро устраняет начальные ошибки [23, 39].

Функции Ляпунова для асимптотической устойчивости линейных систем в большом определяются путем выбора в качестве $V(\mathbf{x})$ положительно определенной квадратичной формы $V(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{Q}\mathbf{x}\rangle$, где $\mathbf{Q}$ — положительно определенная симметрическая матрица, удовлетворяющая равенству

$$\mathbf{A}^T\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\mathbf{A} = -\mathbf{P}, \tag{7.13.2}$$

а $\mathbf{P}$ — положительно определенная симметрическая матрица. Тогда

$$W = \langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{Q}\mathbf{x}\rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{Q}\dot{\mathbf{x}}\rangle = -\langle \mathbf{x}, \mathbf{P}\mathbf{x}\rangle \tag{7.13.3}$$

— отрицательно определенная функция.

Для данной системы с управляющими воздействиями подстановка уравнения (7.13.1) в уравнение (7.13.3) дает $W = -\langle \mathbf{x}, \mathbf{P}\mathbf{x}\rangle + \langle \mathbf{B}\mathbf{m}, \mathbf{Q}\mathbf{x}\rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{Q}\mathbf{B}\mathbf{m}\rangle$. Так как матрица $\mathbf{Q}$ симметрическая, W может быть записана как $W = -\langle \mathbf{x}, \mathbf{P}\mathbf{x}\rangle + 2\langle \mathbf{m}, \mathbf{B}^T\mathbf{Q}\mathbf{x}\rangle$. Первый член W отрицательно определенная функция, что обусловлено выбором $\mathbf{P}$. Надлежащий выбор $\mathbf{m}$ должен сделать W по возможности отрицательной. Поэтому каждая из составляющих $\mathbf{m}$ должна принимать максимальное значение и иметь знак, противоположный соответствующей составляющей $\mathbf{B}^T\mathbf{Q}\mathbf{x}$. Таким образом, каждую из составляющих $\mathbf{m}$ следует выбирать равной

$$m_i(t) = -M_i \operatorname{sgn} [\mathbf{B}^T\mathbf{Q}\mathbf{x}]_i.$$

Это приводит к релейному регулятору, оперирующему с линейной комбинацией переменных состояния.

Пример 7.13.1. Определить параметры релейного регулятора для линейной системы, у которой

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad a>0,\ b>0.$$

Выберем в качестве $\mathbf{P}$ единичную матрицу. Тогда матрица $\mathbf{Q}$ определяется как

$$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix} \dfrac{a^2+b(1+b)}{2ab} & \dfrac{1}{2b} \\ \dfrac{1}{2b} & \dfrac{1+b}{2ab} \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{B}^T\mathbf{Qx}$ определяется в виде

$$\mathbf{B}^T\mathbf{Qx}=\begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{x_1}{2b}+\dfrac{(1+b)\,x_2}{2ab} \end{bmatrix}.$$

Поэтому $m_1=0$ и

$$m_2(t)=-M_2\,\mathrm{sgn}\left[x_1(t)+\frac{(1+b)\,x_2(t)}{a}\right],$$

где положительная постоянная $1/2b$ устранена из каждого слагаемого в скобках, так как она не влияет на знак $m_2(t)$.

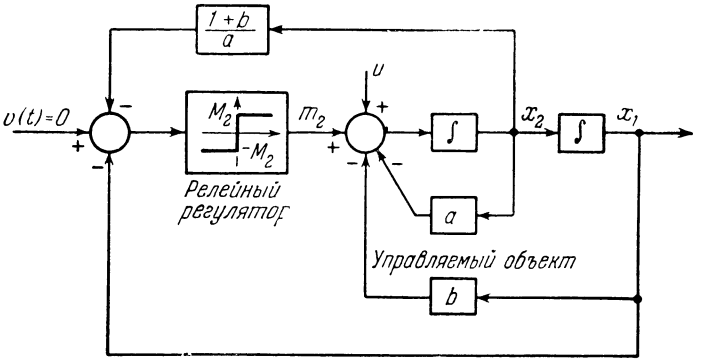


Рис. 7.13.1.

В результате система управления асимптотически устойчива в большом. Более того, если u — максимальная величина возмущения в точке, указанной на рис. 7.13.1, то система обладает сильной практической устойчивостью, так как при $\dot{x}_1=x_2$ и $\dot{x}_2=-bx_1-ax_2+m_2+u$ W задается выражением

$$W=-\left(x_1^2+x_2^2\right)-\left[\frac{x_1}{b}+\left(\frac{1+b}{ab}\right)x_2\right]\left\{M_2\,\mathrm{sgn}\left[\frac{x_1}{b}+\left(\frac{1+b}{ab}\right)x_2\right]-u\right\}.$$

Вообще системам этого типа свойственна сильная практическая устойчивость [39].

Важно отметить, что в представленном виде данный метод применим только к объектам управления, не содержащих инте-

грирующих звеньев, не охваченных обратными связями. Если объект управления обладает «чистыми» интегрирующими звеньями, то матрица **A** особенная и не может удовлетворять уравнению (7.13.2). Это становится очевидным, если в этом примере положить b стремящимся к нулю.

Если объект управления содержит одно «чисто» интегрирующее звено, то можно воспользоваться приведенной выше процедурой, внеся в нее небольшие изменения. Несмотря на то, что излагается случай одного входного воздействия ($\mathbf{m}$ — скалярная величина), метод легко распространяется и на многомерный случай.

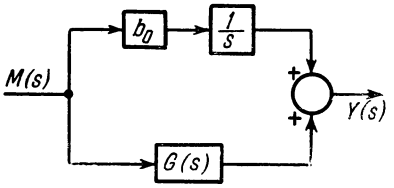


Рис. 7.13.2.

Если уравнения состояния, описывающие линейный динамический объект, определены посредством метода разложения на простейшие дроби, как в § 5.5, то результат можно представить в форме, изображенной на рис. 7.13.2. Элементы $G(s)$ можно получить на основе уравнения (7.13.1). В рассматриваемом случае m — скаляр, а $\mathbf{B} = \mathbf{b}$ — вектор. Поэтому $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}m$, где **A** в зависимости от характера разложения на простейшие дроби может быть диагональной или недиагональной матрицей. Интегрирующее звено описывается $\dot{z} = b_0 m$. Пусть теперь $V(\mathbf{x}, z) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{Q}\mathbf{x}\rangle + z^2$ является положительно определенной функцией при выборе **Q** согласно уравнению (7.13.2). Тогда

$$W = -\langle \mathbf{x}, \mathbf{P}\mathbf{x}\rangle + 2m\,[\langle \mathbf{b}, \mathbf{Q}\mathbf{x}\rangle + b_0 z].$$

Таким образом, m следует выбирать равной

$$m(t) = -M \operatorname{sgn}[\langle \mathbf{b}, \mathbf{Q}\mathbf{x}\rangle + b_0 z], \tag{7.13.4}$$

где M — максимально допустимая для $m(t)$ величина.

Пример 7.13.2. Спроектировать релейный регулятор для объекта на рис. 7.13.3, *а*,

$$\frac{Y(s)}{M(s)} = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}.$$

Уравнения состояния системы на рис. 7.13.3, *б* имеют вид $\dot{x} = -x + m$ и $\dot{z} = m$. Отметим, что первое из уравнений также применимо к рис. 7.13.3, *а*. Величина z на рис. 7.13.3, *б* равна $x+y$ на рис. 7.13.3, *а*. Если $\mathbf{P}=2$, то $\mathbf{Q}=1$. Так как $b_0=1$ и $\mathbf{b}$ — скалярная величина, равная единице, то $m(t) = -M \operatorname{sgn}(x+z)$. Ни z, ни $x+z$ не являются непосредственно измеряемыми величинами, так как исходной является система на рис. 7.13.3, *а*, а не на рис. 7.13.3, *б*. Поэтому $x+z$ необходимо получить из $x+z=y+2x$. Результирующая система изображена на рис. 7.13.3, *а*.

Если u — максимальное значение действующего на входе объекта возмущения, как это показано на рис. 7.13.3, *а*, то ввиду

$$W = -2\,[x^2 + M\,(x+z)\,\mathrm{sgn}\,(x+z) - u\,(x+z)]$$

система обладает сильной практической устойчивостью, причем степень

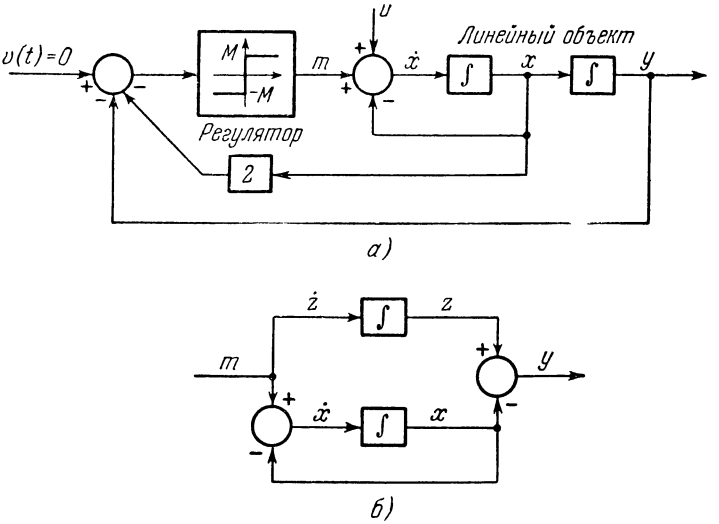


Рис. 7.13.3.

устойчивости возрастает с ростом M. Конечно, возможность увеличения M ограничивается стремлением характеристик линейного динамического объекта к насыщению.

§ 7.14. Определение функций Ляпунова. Метод неопределенного градиента

В предыдущих параграфах второй метод Ляпунова использовался для исследования устойчивости и проектирования релейных систем. В задаче 7.21 изложен оригинальный метод использования функций Ляпунова для линейных систем и нелинейного случая. Так как различные теоремы гарантируют существование функций Ляпунова для устойчивых и асимптотически устойчивых (локально или в большом) случаев, если $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ удовлетворяет условию Липшица *) (локально или в большом), то существенно рассмотреть различные методы определения таких функций [54]. В литературе представлены по крайней мере три метода [55—60]. Здесь рассмотрим метод неопределенного градиента.

*) Условие Липшица предполагает непрерывность $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ по $\mathbf{x}$.

В предположении существования функции Ляпунова должен существовать и ее градиент. На основании $\mathbf{grad}\, V$ можно определить $V(\mathbf{x})$ и W, так как из $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ на основе уравнения (7.8.3) имеем

$$W = \frac{dV}{dt} = \langle \mathbf{grad}\, V, \mathbf{f} \rangle = \langle \mathbf{grad}\, V, \dot{\mathbf{x}} \rangle \tag{7.14.1}$$

и, следовательно,

$$V(\mathbf{x}) = \int_0^{\mathbf{x}} \langle \mathbf{grad}\, V, d\mathbf{x} \rangle. \tag{7.14.2}$$

Верхний предел интегрирования не означает, что $V(\mathbf{x})$ является вектором. Он указывает, что данный интеграл является криволинейным *). Чтобы скалярная функция $V(\mathbf{x})$ определялась из криволинейного интеграла от вектора $\mathbf{grad}\, V$ единственным образом, $V(\mathbf{x})$ не должна зависеть от пути интегрирования. Для этого необходимо и достаточно, чтобы **)

$$\frac{\partial (\mathbf{grad}\, V)_i}{\partial x_j} = \frac{\partial (\mathbf{grad}\, V)_j}{\partial x_i}, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n, \tag{7.14.3}$$

где $(\mathbf{grad}\, V)_i$ — i-я составляющая градиента, т. е.

$$\mathbf{grad}\, V = \begin{bmatrix} (\mathbf{grad}\, V)_1 \\ (\mathbf{grad}\, V)_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (\mathbf{grad}\, V)_n \end{bmatrix}.$$

Так как при выполнении (7.14.3) $V(\mathbf{x})$ не зависит от пути интегрирования, то путь можно выбрать произвольный. Наиболее простым является путь, описываемый

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) = \int_0^{x_1} [\mathbf{grad}\, V(u_1, 0, 0, \ldots, 0)]_1\, du_1 + \\ + \int_0^{x_2} [\mathbf{grad}\, V(x_1, u_2, 0, \ldots, 0)]_2\, du_2 + \ldots + \\ + \int_0^{x_n} [\mathbf{grad}\, V(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, u_n)]_n\, du_n. \end{aligned} \tag{7.14.4}$$

Этот путь интегрирования используется в дальнейшем.

*) Вряд ли данное элементарное выражение нуждается в таком пояснении (*Прим. перев.*)

**) См. любую книгу по векторному анализу.

Предположим, что $(\mathbf{grad}\ V) = [\alpha]\mathbf{x}$, где

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} \alpha_{11}(\mathbf{x}) & \alpha_{12}(\mathbf{x}) & \ldots & \alpha_{1n}(\mathbf{x}) \\ \alpha_{21}(\mathbf{x}) & \alpha_{22}(\mathbf{x}) & \ldots & \alpha_{2n}(\mathbf{x}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1}(\mathbf{x}) & \alpha_{n2}(\mathbf{x}) & \ldots & \alpha_{nn}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}.$$

Термин «неопределенный градиент» предполагает, что $\mathbf{grad}\ V$ имеет n неопределенных составляющих. Элементы α содержат постоянную и переменную часть, являющуюся функцией переменных состояния, т. е. $\alpha_{ij} = \alpha_{ijc} + \alpha_{ijv}(\mathbf{x})$, где индексы c и v обозначают соответственно постоянную и переменную части. Без потери общности будем считать коэффициенты α_{iiv} функциями только x_i. Более того, чтобы облегчить проверку, что $V(\mathbf{x}) = \mathrm{const}$ являются, как это требуется (см. § 7.9), замкнутыми поверхностями, выберем $[\alpha]$ не зависящими от x_n, а α_{nn} положим равным единице. Это несколько уменьшает общность рассмотрения. При этих ограничениях $[\alpha]$ равна

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11c} + \alpha_{11v}(x_1) & \alpha_{12c} + \alpha_{12v}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) & \ldots & \alpha_{1nc} + \alpha_{1nv}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \\ \alpha_{21c} + \alpha_{21v}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) & \alpha_{22c} + \alpha_{22v}(x_2) & \ldots & \alpha_{2nc} + \alpha_{2nv}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1c} + \alpha_{n1v}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) & \alpha_{n2c} + \alpha_{n2v}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) & \ldots & 1 \end{bmatrix}.$$

При определенной выше $[\alpha]$ метод неопределенного градиента построения функции Ляпунова состоит из следующих этапов.

1. Предполагаем градиент формы $\mathbf{grad}\ V = [\alpha]\mathbf{x}$.
2. Определяем W на основе $W = \langle \mathbf{grad}\ V, \mathbf{f} \rangle$.
3. Удовлетворяя уравнению (7.14.3), ограничиваем W, чтобы она не была по крайней мере отрицательно полуопределенной.
4. Определяем $V(\mathbf{x})$ из уравнения (7.14.4) и проверяем, характеризует ли она замкнутые поверхности. Указанная процедура иллюстрируется на примерах.

Пример 7.14.1. Определить функцию Ляпунова для системы из примера 7.8.7.

Рассматриваемая система второго порядка описывается $\dot{x}_1 = x_2$ и $\dot{x}_2 = -g(x_1) - ax_2$. Тогда $\mathbf{grad}\ V$ равен

$$\mathbf{grad}\ V = \begin{bmatrix} [\alpha_{11c} + \alpha_{11v}(x_1)]\, x_1 + [\alpha_{12c} + \alpha_{12v}(x_1)]\, x_2 \\ [\alpha_{21c} + \alpha_{21v}(x_1)]\, x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

и

$$W = \left[\alpha_{11c} + \alpha_{11v}(x_1) - a\alpha_{21c} - a\alpha_{21v}(x_1) - \frac{g(x_1)}{x_1}\right] x_1 x_2 - \\ - [\alpha_{21c} + \alpha_{21v}(x_1)]\, x_1 g(x_1) - [a - \alpha_{12c} - \alpha_{12v}(x_1)]\, x_2^2.$$

Из уравнений (7.14.3) следует, что

$$\frac{\partial (\mathbf{grad}\ V)_1}{\partial x_2} = \alpha_{12c} + \alpha_{12v}(x_1)$$

тождественно равно

$$\frac{\partial\,(\mathbf{grad}\,V)_2}{\partial x_1}=\alpha_{21c}+\frac{\partial\,[\alpha_{21v}(x_1)\,x_1]}{\partial x_1}.$$

Это требование можно выполнить: выражение для W значительно упрощается выбором $\alpha_{21c}=\alpha_{21v}=\alpha_{12v}=\alpha_{11c}=0$ и $\alpha_{11v}(x_1)=g(x_1)/x_1$. Тогда $W=-ax_2^2$ — отрицательно определенная функция при $a>0$.

При этих ограничениях на α $\mathbf{grad}\,V$ равен

$$\mathbf{grad}\,V=\begin{bmatrix} g(x_1)\\ x_2\end{bmatrix}.$$

Тогда согласно уравнению (7.14.4) V задается посредством

$$V(\mathbf{x})=\int_0^{x_1} g(u_1)\,du_1+\int_0^{x_2} u_2\,du_2.$$

Интегрирование второго члена дает

$$V(\mathbf{x})=\int_0^{x_1} g(u)\,du+\frac{x_2^2}{2}.$$

Для $g(u)$ типа, указанного в примере 7.8.7, функция $V(\mathbf{x})$ является положительно определенной. Определенная здесь функция Ляпунова в точности совпадает с используемой в примере 7.8.7.

Пример 7.14.2. Определить функцию Ляпунова для системы из примера 7.8.8.

Рассматриваемая система третьего порядка описывается $\dot{x}_1=x_2$, $\dot{x}_2=x_3$ и $\dot{x}_3=-h(x_1)-g(x_2)-ax_3$. В этом случае $\mathbf{grad}\,V$ равен

$$\begin{bmatrix} [\alpha_{11c}+\alpha_{11v}(x_1)]\,x_1+[\alpha_{12c}+\alpha_{12v}(x_1,\,x_2)]\,x_2+[\alpha_{13c}+\alpha_{13v}(x_1,\,x_2)]\,x_3,\\ [\alpha_{21c}+\alpha_{21v}(x_1,\,x_2)]\,x_1+[\alpha_{22c}+\alpha_{22v}(x_2)]\,x_2+[\alpha_{23c}+\alpha_{23v}(x_1,\,x_2)]\,x_3,\\ [\alpha_{31c}+\alpha_{31v}(x_1,\,x_2)]\,x_1+[\alpha_{32c}+\alpha_{32v}(x_1,\,x_2)]\,x_2+x_3\end{bmatrix}.$$

Для $i=1$, $j=2$ уравнение (7.14.3) дает

$$\alpha_{12c}+\frac{\partial\,[\alpha_{12v}(x_1,\,x_2)\,x_2]}{\partial x_2}+x_3\,\frac{\partial\,[\alpha_{13v}(x_1,\,x_2)]}{\partial x_2}=$$
$$=\alpha_{12c}+\frac{\partial\,[\alpha_{21v}(x_1,\,x_2)\,x_1]}{\partial x_1}+x_3\,\frac{\partial\,[\alpha_{23v}(x_1,\,x_2)]}{\partial x_1}.$$

Это легко удовлетворяется при $\alpha_{12c}=\alpha_{21c}=\alpha_{13v}=\alpha_{23v}=0$, $\alpha_{21v}=dh(x_1)/dx_1$ и и $\alpha_{21v}=h(x_1)/x_1$. Аналогично в случае $i=1$, $j=3$ и прежних α из (7.14.3) получаем

$$\alpha_{13c}=\alpha_{31c}=\alpha_{31v}=\alpha_{32v}=0.$$

Подобным же образом при $i=2$, $j=3$ и указанных выше α из уравнения (7.14.3) следует $\alpha_{23c}=\alpha_{23c}$. Это выполняется просто при $\alpha_{23c}=\alpha_{32c}=a$. При этих α функция W равна

$$W=[\alpha_{11c}+\alpha_{11v}(x_1)]\,x_1x_2+\frac{dh(x_1)}{dx_1}\,x_2^2+$$
$$+h(x_1)\,x_3+[\alpha_{22c}+\alpha_{22v}(x_2)]\,x_2x_3+ax_3^2-[ax_2+x_3]\,[ax_3+h(x_1)+g(x_2)].$$

Теперь очевидно, что выбор ряда α производится совместно с исследованием W.

Теперь W можно значительно упростить, выбирая $\alpha_{11c}=0$, $\alpha_{11v}(x_1)=ah(x_1)/x_1$, $\alpha_{22c}=a^2$ и $\alpha_{22v}(x_2)=g(x_2)/x_2$. Тогда W принимает вид

$$W=-\left[a\frac{g(x_2)}{x_2}-\frac{dh(x_1)}{dx_1}\right]x_2^2;$$

grad V соответственно равен

$$\begin{bmatrix} ah(x_1)+\dfrac{dh(x_1)}{dx_1}x_2 \\ h(x_1)+a^2x_2+g(x_2)+ax_3 \\ ax_2+x_3 \end{bmatrix}.$$

Тогда согласно уравнению (7.14.4) $V(\mathbf{x})$ равна

$$V(\mathbf{x})=\int_0^{x_1} ah(u_1)\,du_1+\int_0^{x_2}[h(x_1)+a^2u_2+g(u_2)]\,du_2+\int_0^{x_3}(ax_2+u_3)\,du_3.$$

Интегрирование дает

$$V(\mathbf{x})=a\int_0^{x_1}h(u)\,du+\int_0^{x_2}g(u)\,du+\frac{1}{2}(ax_2+x_3)^2+x_2h(x_1).$$

Определенная здесь функция Ляпунова в точности совпадает с используемой в примере 7.8.7. Там приведены и условия асимптотической устойчивости.

Из этих примеров должна стать очевидной эффективность метода неопределенного градиента. Единственная особая трудность состоит в выборе величин α. Этот выбор несколько произволен, что может сказаться как на результатах, так и на простоте их получения.

§ 7.15. Неавтономные системы

Предшествующее рассмотрение второго метода Ляпунова ограничивалось автономным случаем. При рассмотрении неавтономного случая

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x},t),\quad \mathbf{f}(\mathbf{0},t)=\mathbf{0},\quad t\geqslant 0 \tag{7.15.1}$$

определения устойчивости остаются неизменными. Однако следует несколько видоизменить определение положительно определенной функции.

Функция $V(\mathbf{x},t)$ является положительно определенной в окрестности начала координат, если она непрерывна, имеет непрерывные частные производные по всем аргументам, $V(\mathbf{0},t)=0$ при $t\geqslant 0$ и если существует такая положительно определенная (в соответствии с определением § 7.8) функция $V_a(\mathbf{x})$, что $V(\mathbf{x},t)\geqslant V_a(\mathbf{x})$ для всех $\mathbf{x}$ в окрестности координат и $t\geqslant 0$.

Отметим, что теперь $W = \frac{dV}{dt}$ дается в виде

$$W = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1(x) + \frac{\partial V}{\partial x_2} f_2(x) + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_n} f_n(x),$$

или через градиент $V(x, t)$:

$$W = \frac{\partial V}{\partial t} + \langle \mathbf{grad}\, V, \mathbf{f} \rangle.$$

Если в окрестности начала координат $W \leqslant 0$, то в данной окрестности $V(\mathbf{x}, t)$ является функцией Ляпунова для уравнения (7.15.1).

При таком определении положительной определенности $V(\mathbf{x}, t)$ предыдущие теоремы об устойчивости автономных систем применимы также и для неавтономных систем. В случае асимптотической устойчивости $V(\mathbf{x}, t)$ должна ограничиваться положительно определенной $V_b(\mathbf{x})$, т. е. $V(\mathbf{x}, t) \leqslant V_b(\mathbf{x})$. Отрицательная определенность $W(\mathbf{x}, t)$ также определяется посредством некоторой отрицательно определенной скалярной функции $W_a(\mathbf{x})$ в виде $W(\mathbf{x}, t) \leqslant W_a(\mathbf{x})$. Несмотря на применимость изложенных ранее теорем, трудность построения функций Ляпунова ограничила число эффективных применений второго метода Ляпунова для неавтономного случая.

Пример 7.15.1. Исследовать устойчивость линейной системы с переменными параметрами на рис. 7.15.1.

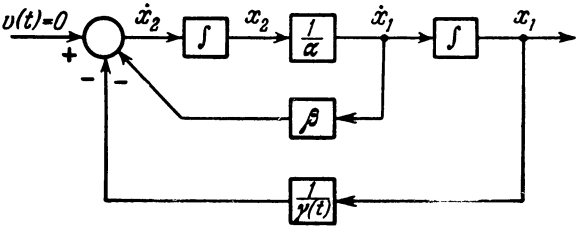


Рис. 7.15.1.

Уравнения состояния имеют вид $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$, где

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\alpha} \\ -\frac{1}{\gamma(t)} & -\frac{\beta}{\alpha} \end{bmatrix}.$$

В предположении $V(\mathbf{x}, t) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{Q}(t)\mathbf{x} \rangle$, где

$$\mathbf{Q}(t) = \begin{bmatrix} \beta + \frac{2\alpha}{\beta\gamma(t)} & 1 \\ 1 & \frac{2}{\beta} \end{bmatrix},$$

имеем

$$V(\mathbf{x}, t) = \left[\beta + \frac{2\alpha}{\beta\gamma(t)}\right] x_1^2 + 2x_1x_2 + \frac{2}{\beta} x_2^2.$$

Пусть $V_a(\mathbf{x}) = \varepsilon_1 x_1^2 + 2x_1x_2 + \varepsilon_2 x_2^2$, $V_a(\mathbf{x})$ — положительно определенная функция и, конечно, $V(\mathbf{x}, t) \geqslant V_a(\mathbf{x})$ при

$$\beta + \frac{2\alpha}{\beta\gamma(t)} > \varepsilon_1 > 1 \quad \text{и} \quad \frac{2}{\beta} > \varepsilon_2 > 1.$$

Теперь, рассматривая W, имеем

$$W = \langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{Q}(t)\mathbf{x}\rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{Q}(t)\dot{\mathbf{x}}\rangle + \langle \mathbf{x}, \dot{\mathbf{Q}}(t)\mathbf{x}\rangle.$$

Подстановка вместо $\dot{\mathbf{x}}$ $\mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ приводит к $W = -\langle \mathbf{x}, \mathbf{P}(t)\mathbf{x}\rangle$, где $-\mathbf{P}(t) = \mathbf{A}^T(t)\mathbf{Q}(t) + \mathbf{Q}(t)\mathbf{A}(t) + \dot{\mathbf{Q}}(t)$. Для данного примера

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\gamma(t)}\left[1 + \frac{\alpha\dot{\gamma}(t)}{\beta\gamma(t)}\right] & 0 \\ 0 & \frac{2}{\alpha} \end{bmatrix}.$$

Тогда W — отрицательно определенная функция, если $\alpha > 0$ и

$$\frac{1}{\gamma(t)}\left[1 + \frac{\alpha\dot{\gamma}(t)}{\beta\gamma(t)}\right] > 0.$$

Достаточными условиями для удовлетворения этих неравенств и того, чтобы некоторая $V_b(\mathbf{x})$ превышала $V(\mathbf{x}, t)$, а значит, асимптотической устойчивости в большом являются

$$\alpha > \gamma(t) > 0, \quad 2 > \beta > 0 \quad \text{и} \quad \dot{\gamma}(t) > 0.$$

§ 7.16. Условная устойчивость

Рассмотренные в предыдущих параграфах виды устойчивости связаны с движениями, определяющими положение равновесия. При этом исследуется действие возмущений на положение равновесия.

Однако в ряде случаев положения равновесия не существует. Например, чрезвычайно трудно точно определить состояние равновесия для многих типов адаптивных систем управления, где сама система, окружающие условия и требуемые ее характеристики непрерывно изменяются. В этом случае понятия устойчивости по Ляпунову становятся неприемлемыми.

Для таких случаев Ла-Сааль и Рэсс ввели в рассмотрение *условную устойчивость* [61]. В сущности, условная устойчивость свидетельствует о том, что если система ведет себя надлежащим образом достаточно длительный промежуток времени, то можно ожидать, что подобным образом она будет вести себя и в будущем.

Начало координат $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ является условно устойчивым, если при данном $\varepsilon > 0$ существуют такие δ и T, что из $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$ следует $\|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, t)\| < \varepsilon$ для всех $t \geqslant t_0 \geqslant T$ [61].

Применительно к исследованию условной устойчивости можно развить второй метод Ляпунова. Часть связанных с этим теорем доказаны Ла-Саалем и Рэсс. Здесь приводятся одна из этих теорем и пример, относящийся к адаптивному управлению.

Теорема 7.16.1 [61]. Предположим, что в системе $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t)$, $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t)$ при ограниченных x, z и $t \geqslant 0$ ограничена $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t)$, а также существует такая скалярная функция $V(\mathbf{x}, \mathbf{z})$, что:

1. $V(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ является положительно определенной и имеет непрерывные частные производные для всех $\mathbf{x}$ и $\mathbf{z}$;

2. при неограниченном возрастании $\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{z}\|^2 V(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ стремится к бесконечности;

3. $W \leqslant -V_a(\mathbf{x}) + h_1(t) q(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + h_2(t) V(\mathbf{x}, \mathbf{z})$, где $V_a(\mathbf{x})$ — непрерывная и положительно определенная функция при всех $\mathbf{x}$; $q(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ непрерывна при всех $\mathbf{x}$, $\mathbf{z}$, а

$$\int_0^\infty |h_i(t)|\, dt < \infty, \quad i = 1, 2.$$

При этих условиях состояние $\mathbf{x} = \mathbf{z} = 0$ условно устойчиво; и если при данном $r > 0$ существует такое T_r, что $\|\mathbf{x}(t_0)\|^2 + \|\mathbf{z}(t_0)\|^2 < r^2$ для некоторого $t_0 \geqslant T_r$, то функция $\mathbf{z}(t)$ ограничена, а $\mathbf{x}(t)$ стремится к $\mathbf{0}$ при стремлении t к бесконечности.

Если дополнительно:

4. При некотором K и некотором $0 \leqslant \alpha < 1$, $|q(\mathbf{x}, \mathbf{z})| \leqslant K V^{-\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$, то все решения $\mathbf{z}(t; \mathbf{z}_0, t_0)$ ограничены и все $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, t_0)$ стремятся к нулю при стремлении t к бесконечности.

Пример 7.16.1 [61, 62]. Требуется управлять скоростью x_1 тела, движущегося в вязкой жидкости, вязкость которой описана неполностью. Неуправляемая система имеет вид $\dot{x}_1 = -\beta(t) x_1$. Известно только, что величина $\beta(t)$ ограничена и при стремлении t к бесконечности $\beta(t)$ стремится к неизвестной постоянной величине. Из этого следует

$$\int_0^\infty |\beta(t) - \beta_0|\, dt < \infty.$$

Требуется поддерживать скорость постоянной: $x_1 = k$.

Если бы $\beta(t)$ была известна, то система, описываемая

$$\dot{x}_1 = -\beta(t) x_1 + [\beta(t) - a] x_1 + ak, \quad a > 0$$

была бы искомой, т. е. установившееся решение равнялось бы k. Однако ввиду того, что $\beta(t)$ и β_0 неизвестны, заменим $\beta(t)$ в скобках переменным коэффициентом усиления обратной связи $z_1(t)$. Получим

$$\dot{x}_1 = -\beta(t) x_1 + (z_1 - a) x_1 + ak, \quad a > 0.$$

Пусть $V(x_1, z_1) = \frac{1}{2}[(x_1 - k)^2 + (z_1 - \beta_0)^2]$. Тогда $W = \frac{dV}{dt}$ дается в виде

$$W = -a(x_1 - k)^2 + [z_1 - \beta_0][x_1(x_1 - k) + \dot{z}_1] - (\beta - \beta_0) x_1 (x_1 - k).$$

При $\dot{z}_1 = -x_1(x_1 - k)$ W принимает вид

$$W = -a(x_1 - k)^2 - (\beta - \beta_0)\, x_1 (x_1 - k).$$

Обозначив $V_a(\mathbf{x}) = a(x_1 - k)^2$, $h_1(t) = \sqrt{2}\,|k| \cdot |\beta(t) - \beta_0|$, $h_2(t) = 2\,|\beta(t) - \beta_0|$ и $q(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \sqrt{V(x_1, z_1)}$, получим

$$W \leqslant -V_a(\mathbf{x}) + h_1(t)\, q(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + h_2(t)\, V(\mathbf{x}, \mathbf{z}).$$

Таким образом, управляемая система $\dot{x}_1 = -\beta(t)x_1 + (z_1 - a)x_1 + ak$, $\dot{z}_1 = -x_1(x_1 - k)$ удовлетворяет всем условиям приведенной теоремы, так что состояние $x_1 = k$, $z_1 = \beta_0$ является условно устойчивым. Более того, при всех начальных состояниях x_1 и z_1 функция z_1 ограничена, а x_1 стремится к k при стремлении t к бесконечности.

§ 7.17. Дискретные системы

Как указывалось в шестой главе, подход с позиций переменных состояния применим к дискретным системам так же, как и к непрерывным. Поэтому настоящее рассмотрение относится к применению второго метода Ляпунова для дискретных систем. Данное рассмотрение мало отличается от случая непрерывных систем. Поэтому оно совсем краткое; указываются лишь существенные особенности дискретного случая и на примере указывается метод построения функции Ляпунова.

В случае дискретных систем уравнения состояния в общем виде описываются разностными уравнениями

$$E\mathbf{x}(kT) = \mathbf{x}[(k+1)T] = \mathbf{f}(\mathbf{x}, kT). \tag{7.17.1}$$

Состояние равновесия задается решением $\mathbf{f}(\mathbf{0}, kT) = \mathbf{0}$ при всех k, а $\mathbf{f}(\mathbf{x}, kT)$ при фиксированных k предполагается действительной и непрерывной функцией от $\mathbf{x}$.

Для дискретных систем применимы основные определения устойчивости, данные в предыдущих параграфах. Только функцию Ляпунова, используемую для исследования устойчивости положения равновесия дискретной системы, нужно определять в дискретные моменты времени kT. Подобным образом требования определенности должны выполняться лишь для этих дискретных моментов времени. Поэтому вместо полной производной от функции Ляпунова для непрерывных систем рассматривается полная разность*)

$$W = \Delta V = V\{\mathbf{x}[(k+1)T], (k+1)T\} - V[\mathbf{x}(kT), kT]. \tag{7.17.2}$$

При этих видоизменениях предыдущие теоремы о применении второго метода Ляпунова к непрерывным системам могут использоваться и для дискретных систем.

*) Для определения скорости изменения V W можно разделить на T; однако это не изменит определенности функции V.

В случае линейных автономных разностных уравнений функция Ляпунова может определяться при помощи процедуры, аналогичной используемой в §§ 7.9, 7.10 и 7.13. Пусть $V(\mathbf{x})$ — положительно определенная квадратичная форма $V(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{Q}\mathbf{x} \rangle$. Тогда в соответствии с уравнением (7.17.2) $W = \langle (E\mathbf{x}), \mathbf{Q}(E\mathbf{x}) \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{Q}\mathbf{x} \rangle$. Для линейных автономных разностных уравнений уравнение (7.17.1) можно записать как $E\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, так что $W = \langle \mathbf{x}, \mathbf{A}^T\mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{Q}\mathbf{x} \rangle$ или $W = \langle \mathbf{x}, (\mathbf{A}^T\mathbf{Q}\mathbf{A} - \mathbf{Q})\mathbf{x} \rangle$, где T означает транспонирование, что не следует путать с периодом квантования. Пусть $\mathbf{P}$ — симметрическая положительно определенная матрица, являющаяся единственным решением линейного уравнения — $\mathbf{P} = \mathbf{A}^T\mathbf{Q}\mathbf{A} - \mathbf{Q}$. Тогда $W = -\langle \mathbf{x}, \mathbf{P}\mathbf{x} \rangle$ отрицательно определенная функция. Данная процедура действенна только в том случае, если абсолютные значения всех характеристических чисел $\mathbf{A}$ меньше единицы.

§ 7.18. Применение к системам с широтно-импульсной модуляцией

Системы с широтно-импульсной модуляцией служат прекрасной иллюстрацией применения второго метода Ляпунова

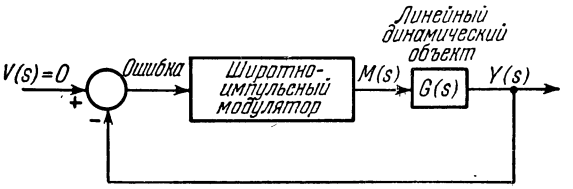


Рис. 7.18.1.

к нелинейным дискретным системам [63, 64]. Рассмотрим систему, представленную на рис. 7.8.1. Выход широтно-импульсного модулятора равен

$$m(t) = \{U_{-1}[t - kT] - U_{-1}[t - kT - \delta(k)]\} \operatorname{sgn} \beta(k)$$

при

$$kT < t < (k+1)T,$$

где $\delta(k) = T \operatorname{sat} |\gamma(k)|$ и

$$\operatorname{sat} |\gamma| = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad |\gamma| \geqslant 1, \\ |\gamma| & \text{при} \quad 1 \geqslant |\gamma| \geqslant 0. \end{cases}$$

Еще следует определить функции переменных состояния линейного динамического объекта $\beta(k)$ и $\gamma(k)$.

Раскладывая $G(s)$ на элементарные дроби, в соответствии с § 5.5 и уравнением (7.10) получим $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{\Lambda x} + m\mathbf{b}$, где $\mathbf{\Lambda}$ — диагональная матрица с элементами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Общее решение уравнений состояния

$$\mathbf{x}(t) = e^{(t-t_0)\Lambda}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} m(\tau)\, e^{(t-\tau)\Lambda}\mathbf{b}\, d\tau,$$

где t_0 — произвольный начальный момент времени. Подстановка следующих двух множеств значений для t_0 и t,

$$t_0 = kT, \qquad t = kT + \delta(k),$$
$$t_0 = kT + \delta(k), \quad t = (k+1)T,$$

приводит к

$$\mathbf{x}[kT + \delta(k)] = e^{\delta(k)\Lambda}\mathbf{x}(kT) + (\operatorname{sgn}\beta) \int_{kT}^{kT+\delta(k)} e^{[kT+\delta(k)-\tau]\Lambda}\mathbf{b}\, d\tau,$$

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = e^{[T-\delta(k)]\Lambda}\mathbf{x}[kT + \varepsilon(k)].$$

Объединение этих уравнений дает

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = e^{T\Lambda}\mathbf{x}(kT) + (\operatorname{sgn}\beta)\, e^{[T-\delta(k)]\Lambda} \int_{kT}^{kT+\delta(k)} e^{[kT+\delta(k)-\tau]\Lambda}\mathbf{b}\, d\tau.$$

Интегрирование приводит к

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = e^{T\Lambda}\mathbf{x}(kT) + (\operatorname{sgn}\beta)\, e^{T\Lambda}\mathbf{\Lambda}^{-1}\left[\mathbf{I} - e^{-\delta(k)\Lambda}\right]\mathbf{b},$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица. При $T \ll 1/-\chi_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\frac{1 - e^{-\delta(k)\lambda_i}}{\lambda_i} = \delta(k),$$

так что

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = e^{T\Lambda}\mathbf{x}(kT) + (\operatorname{sgn}\beta)\,\delta(k)\, e^{T\Lambda}\mathbf{b}.$$

Предполагается, что данное разностное уравнение удовлетворительно характеризует поведение системы.

Чтобы определить из условия устойчивости свойства модулятора, выберем в качестве функции Ляпунова $V(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle$. Тогда

$$W = -\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle + \langle [e^{T\Lambda}\mathbf{x} + (\operatorname{sgn}\beta)\,\delta(k)\, e^{T\Lambda}\mathbf{b}],\ [e^{T\Lambda}\mathbf{x} + (\operatorname{sgn}\beta)\,\delta(k)\, e^{T\Lambda}\mathbf{b}]\rangle,$$

что можно переписать как

$$W = -\langle \mathbf{x}, [\mathbf{I} - e^{2T\Lambda}]\,\mathbf{x}\rangle + 2(\operatorname{sgn}\beta)\,\delta(k)\,\langle \mathbf{x}, e^{2T\Lambda}\mathbf{b}\rangle + \delta^2(k)\,\langle \mathbf{b}, e^{2T\Lambda}\mathbf{b}\rangle.$$

Первый член является отрицательно определенной функцией, если $\lambda_i < 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Рассматривая второй член, положим

$\operatorname{sgn}\beta = -\operatorname{sgn}\langle \mathbf{x}, e^{2T\Lambda}\mathbf{b}\rangle$. Тогда

$$W = -\langle \mathbf{x}, [\mathbf{I} - e^{2T\Lambda}]\mathbf{x}\rangle - 2\delta(k)\,|\langle \mathbf{x}, e^{2T\Lambda}\mathbf{b}\rangle| + \delta^2(k)\langle \mathbf{b}, e^{2T\Lambda}\mathbf{b}\rangle.$$

При произвольном $\mathbf{x}$ функция W принимает наибольшее по величине отрицательное значение, если

$$\delta(k) = \frac{|\langle \mathbf{x}, e^{2T\Lambda}\mathbf{b}\rangle|}{\langle \mathbf{b}, e^{2T\Lambda}\mathbf{b}\rangle}.$$

Так как $\delta(k)$ не превышает T, то лучше всего выбрать ее равной

$$\delta(k) = T\,\mathrm{sat}\left\{\frac{|\langle \mathbf{x}, e^{2T\Lambda}\mathbf{b}\rangle|}{T\langle \mathbf{b}, e^{2T\Lambda}\mathbf{b}\rangle}\right\}.$$

При устойчивом линейном динамическом объекте и модуляторе с определенными здесь свойствами положение равновесия асимптотически устойчиво в большом.

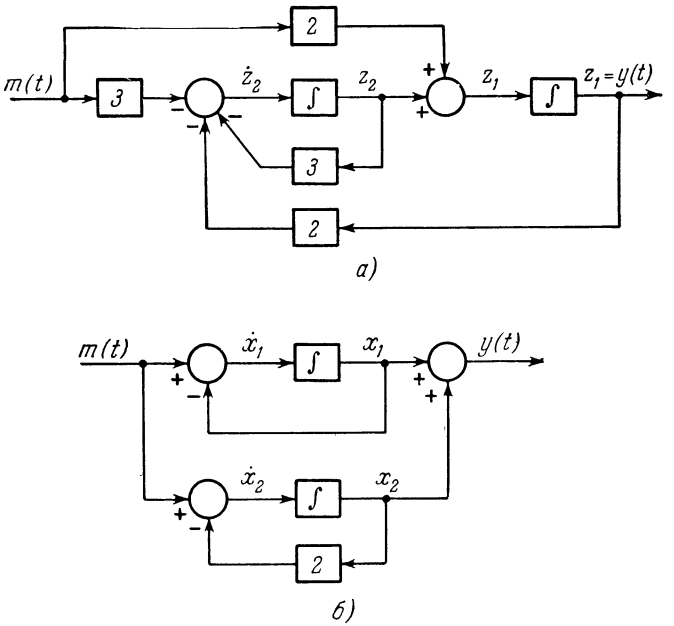


Рис. 7.18.2.

Пример 7.18.1. Определить свойства широтно-импульсного модулятора для линейного динамического объекта на рис. 7.18.2, *а*, где

$$G(s) = \frac{2s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2}.$$

При переменных состояния, соответствующих рис. 7.18.2, *б*,

$$\langle \mathbf{x},\ e^{2T\Lambda}\mathbf{b}\rangle = e^{-2T}\left(x_1 + e^{-2T}x_2\right) \text{ и } \langle \mathbf{b},\ e^{2T\Lambda}\mathbf{b}\rangle = e^{-2T}\left(1 + e^{-2T}\right).$$

Поэтому знак выходного сигнала модулятора равен

$$\operatorname{sgn}\beta = -\operatorname{sgn}\left[x_1 + e^{-2T}x_2\right]$$

и ширина импульса

$$\delta(k) = T\ \operatorname{sat}\left\{\frac{x_1 + e^{-2T}x_2}{T\left(1 + e^{-2T}\right)}\right\}.$$

Отметим, что ни x_1, ни x_2 не отвечают рис. 7.18.2, *а*. Однако на основе методов пятой главы $x_1 = 2z_1 + z_2$ и $x_2 = -(z_1 + z_2)$. Тогда, если можно измерить z_1 и z_2, то надлежащие переключающие сигналы широтно-импульсного модулятора получаются как линейная комбинация результатов измерений.

Задачи

7.1. Показать, что траектории линейной системы второго порядка на рис. 7.3.1 при равном нулю коэффициенте усиления цепи внешней обратной связи ($\omega^2 = 0$, $\xi\omega \neq 0$) задаются посредством $x_2 + 2\xi\omega x_1 = c$.

7.2. Показать, что траектории линейной системы второго порядка на рис. 7.3.1 при $|\xi| = 1$ имеют вид

$$x_2 + \xi\omega x_1 = ce^{\xi\omega x_1/(x_2 + \xi\omega x_1)},\quad \xi = +1 \text{ или } -1.$$

7.3. Начертить для системы на рис. 7.3.1 в фазовой плоскости траектории для каждого из случаев, рассмотренных на рис. 7.3.8, где $v(t)$ теперь равно не нулю, а единичной ступенчатой функции $U_{-1}(t)$.

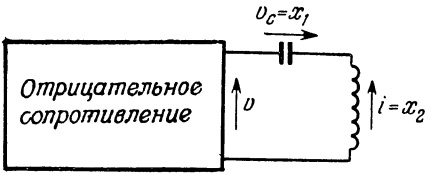
7.4. Вывести выражение § 7.3 для фазовых траекторий, основываясь на частотной интерпретации пятой главы.

7.5 (*а*) Определить расположение и характер особых точек в примере § 7.4 для случаев: $a = 0$; $a > b > 0$.

(*b*) Вычертить фазовые портреты, отвечающие каждому из этих случаев. Указать сепаратрисы.

(*c*) В каком случае данная система является осциллятором или триггером?

(*d*) На рисунках п. (*b*) указать величину $\dot{x}$, при которой данная цепь будет соответственно осциллятором или триггером.



К задаче 7.6.

7.6. Емкость в одну фараду и катушка индуктивности в один генри соединены последовательно с туннельным диодом, обладающим характеристикой $i = -v + v^3$. Пусть x_1 — напряжение на емкости, а x_2 — ток в цепи, как это показано на рисунке.

(*a*) Определить расположение и характер особых точек и начертить фазовый портрет в плоскости x_1x_2. Являются ли x_1 и x_2 переменными состояния для этой системы?

(*b*) Повторно проделать п. (*a*) в плоскости vx_1.

7.7. (*a*) Определить расположение и характер особых точек и вычертить фазовый портрет движения маятника (без учета трения), описываемого $\ddot{\theta} + \sin\theta = 0$. Указать сепаратрисы.

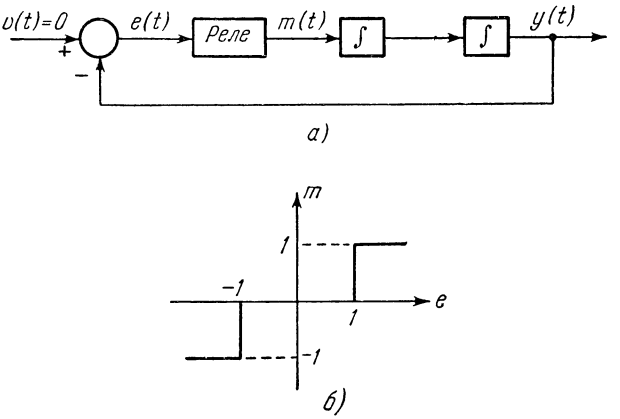
(*b*) Повторно проделать п. (*a*) для $\ddot{\theta} + 0{,}1\dot{\theta} + \sin\theta = 0$.

7.8. Определить расположение и характер особых точек и вычертить фазовый портрет нелинейной системы, описываемой

$$\ddot{y} - \left(0{,}1 - \frac{10}{3}\dot{y}^2\right)\dot{y} + y + y^2 = 0.$$

Может ли данная система использоваться как осциллятор? [11]. (Используя теорему Пуанкаре — Бендиксона, доказать существование устойчивого предельного цикла.)

7.9. Система с обратной связью включает релейный усилитель, управляющий двигателем. Скорость двигателя достаточно низкая, так что обратной



К задаче 7.9.

э. м. с. можно пренебречь. Блок-схема этой системы показана на рисунке 7.9, *а* Характеристика реле дается на рисунке 7.9, *б*.

(*а*) Вычертить фазовые траектории в предположении $v(t) = 0$.

(*b*) Если движение периодическое, то как зависит период колебаний от максимального значения скорости?

(*c*) Существует ли предельный цикл?

7.10. Релейная система в задаче 7.9 видоизменена путем добавления нелинейной обратной связи. Блок-схема модифицированной системы дана на рисунке 7.10, *а*. Нелинейный элемент обладает характеристикой, изображенной на рисунке 7.10, *б*.

(*а*) Для модифицированной системы повторно проделать пункты задачи 7.9.

(*b*) Как влияет на устойчивость нелинейная обратная связь?

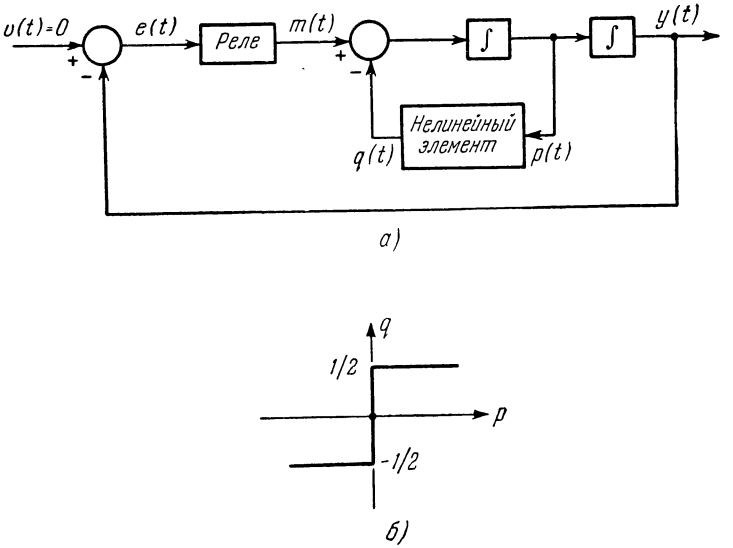
(*c*) Исследовать устойчивость этой системы методом описывающей функции.

7.11. Система на рисунке 7.11, *а* обладает нелинейным звеном в цепи ошибки и зоной нечувствительности в цепи нагрузки. Характеристика с зоной нечувствительности изображена на рисунке 7.11, *б*.

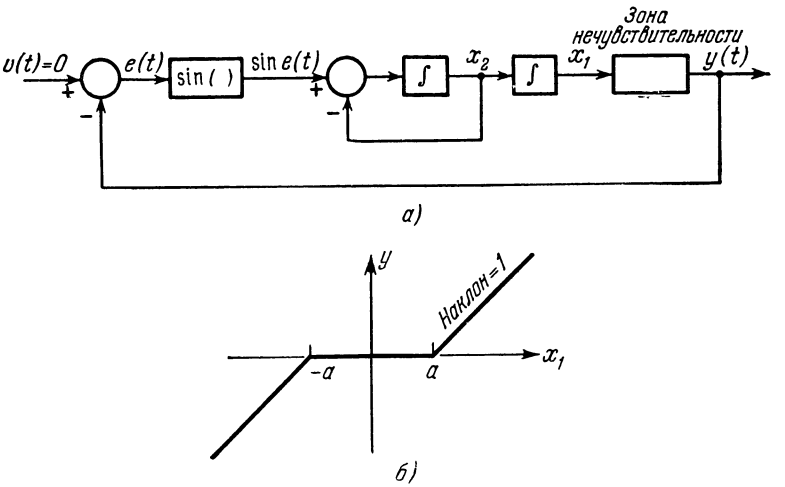
(*а*) Определить расположение и характер особых точек в плоскости x_1x_2 в пределах $|x_1| \leqslant 2\pi + a$.

(*b*) Для этой же области начертить фазовые траектории системы и исследовать ее устойчивость.

(*c*) Исследовать возможность анализа этой системы методом описывающей функции.

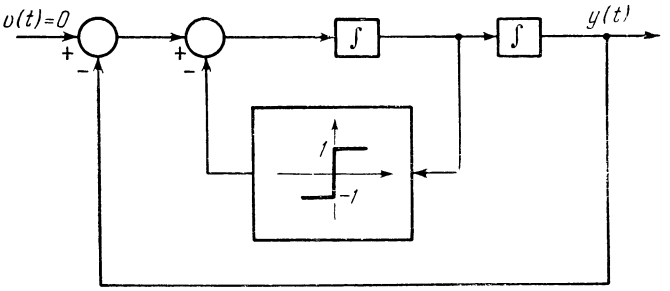


К задаче 7.10.



К задаче 7.11.

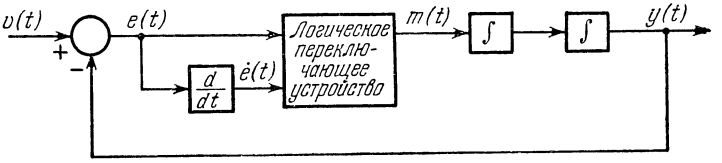
7.12. Для системы с кулоновым трением, показанной на рисунке:
(*a*) определить дифференциальное уравнение, характеризующее систему;
(*b*) начертить фазовый портрет, указывая особую область;
(*c*) существует ли предельный цикл?



К задаче 7.12.

7.13. (*a*) Начертить траектории для системы на рис. 7.5.5 в плоскости $a\dot{a}$.
(*b*) Вывести функцию последования, соответствующую п. (*a*), и исследовать устойчивость системы.

7.14. В системе на рисунке $m(t)$ может принимать значения $+1$ или -1. Величина $m(t)$ управляется логическим переключающим устройством, так что переходная ошибка и ее производная при действии ступенчатого входного сигнала сводится (т. е. $v(t)=U_{-1}(t)$) к нулю за наименьшее время. Это



К задаче 7.14.

соответствует наименьшему числу перемен знака $m(t)$ и отвечает оптимальному переключению.

(*a*) Указать на плоскости $e\dot{e}$ области, где оптимальное $m(t)$ принимает значения $+1$ и -1.

(*b*) Является ли система п. (*a*) оптимальной при $v(t)=t$?

(*c*) Повторить п. (*b*) при $v(t)=\frac{t^2}{2}$.

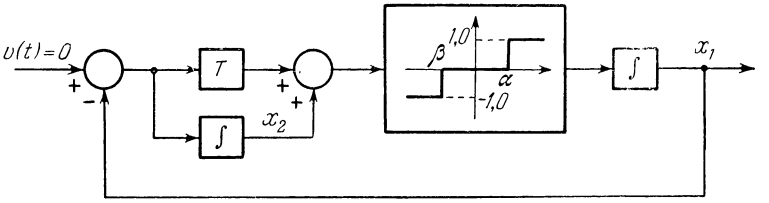
(*d*) Выразить через T_d взаимосвязь между $\dot{e}$ в момент переключения согласно п. (*a*) и в реально происходящий момент переключения, если логическое переключающее устройство, соответствующее п. (*a*), обладает чистым временем запаздывания T_d секунд (т. е. $m(t)$ изменяет знак на T_d позднее, чем это требуется в соответствии с критерием оптимальности).

(*e*) Начертить кривые переключения, соответствующие наличию времени запаздывания.

(*f*) Оценить устойчивость системы с запаздыванием.

7.15. (*a*) Начертить траектории системы на рисунке в плоскости x_1x_2, предполагая $T>0$, $\alpha>\beta>0$. Указать особые точки.

(*b*) При каких значениях α, β и T система (*i*) устойчива в большом? (*ii*) неустойчива в большом? (*iii*) асимптотически устойчива в большом? Доказать, используя функцию последования



К задаче 7.15.

7.16. Пусть $H=T+V$, где T — кинетическая энергия, а V — потенциальная энергия, является гамильтонианом системы с n степенями свободы. Система может описываться n обобщенными координатами $q_1, q_2, \ldots, q_n$ и n обобщенными моментами $p_1, p_2 \ldots, p_n$. Уравнения движения равны $\dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p}$ и $\dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial q}$. Пусть начало координат пространства **pq** будет изолированной точкой равновесия. При помощи метода Ляпунова определить условия, при которых положение равновесия является устойчивым (теорема Лагранжа).

7.17. Определить при помощи функции Ляпунова

$$V(\mathbf{x})=\frac{\omega^2}{2}x_1^2+\frac{x_2^2}{2}$$

условия, при которых состояние равновесия системы $\dot{x}_1=x_2$, $\dot{x}_2=-\omega^2x_1-g(x_1, x_2)x_2$ асимптотически устойчиво в большом.

7.18. (*a*) Показать, что система

$$\frac{dx_1}{dt}=-H(x_1)+x_2, \qquad \frac{dx_2}{dt}=-g(x_1),$$

где

$$H(x_1)=\int_0^{x_1} h(u)\,du,$$

эквивалентна уравнению Лиенарда.

(*b*) Используя V-функцию

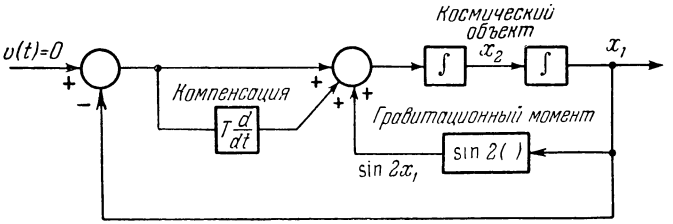
$$V(\mathbf{x})=\frac{x_2^2}{2}+\int_0^{x_1} g(u)\,du$$

и предполагая $g(0)=H(0)=0$, определить условия асимптотической устойчивости в большом.

7.19. Упрощенное представление системы управления положением одноосного спутника с учетом действия гравитационного поля изображено на рисунке. Воспользовавшись функцией

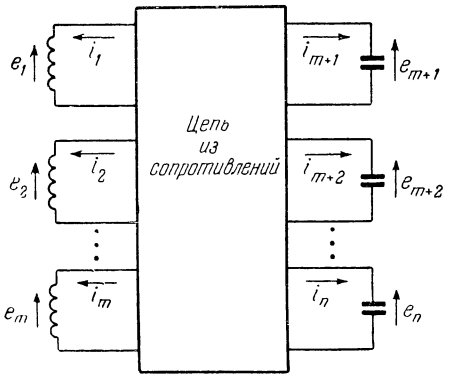
$$V(\mathbf{x}) = \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} + 1 - \cos 2x_1,$$

определить требования, накладываемые на T, чтобы система была асимптотически устойчивой в большом. Исследовать влияние компенсации.



К задаче 7.19.

7.20. Пассивная цепь RLC на рисунке состоит из сопротивлений, емкостей и индуктивностей; все они могут быть нелинейными. Выбрать в качестве переменных состояния заряды на каждой из емкостей и потоки, сцепленные с каждой из катушек индуктивности. Пусть функцией V будет запасенная энергия системы. Определить условия асимптотической устойчивости в большом. Как сказывается на решении учет влияния гистерезиса?



К задаче 7.20.

7.21. (*a*) Показать, что

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \int_0^1 \mathbf{J}(s\mathbf{x})\,\mathbf{x}\,ds,$$

где $\mathbf{J}$ — матрица Якоби.

(*b*) Использовать этот результат, чтобы показать, что если для какой-либо положительно определенной квадратичной формы $V = \langle \mathbf{x}, \mathbf{Q}\mathbf{x}\rangle$ функция $\mathbf{J}^T(\mathbf{x})\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\mathbf{J}(\mathbf{x})$ отрицательно определенная при всех $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, то состояние равновесия $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ является асимптотически устойчивым в большом [39].

(*c*) Применить этот метод к примеру 7.9.3.

7.22. (*a*) Исследовать абсолютную устойчивость системы, состоящей из нелинейного регулятора и линейной части:

(*i*) $G(s) = -\dfrac{(2s^2 + 4s + 1)}{8s^3 - 11s - 3}$,

(*ii*) $G(s) = -\dfrac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)}$.

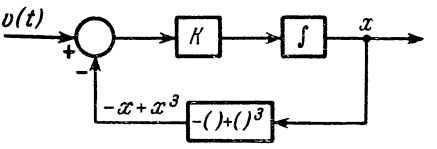
(*b*) Вывести уравнение, соответствующее уравнению (7.10.6), но применимое, если некоторые λ — комплексно сопряженные числа с отрицательными действительными частями. Использовать этот результат для случаев

$$(i)\quad G(s) = -\frac{(s^3+6s^2+12s+8)}{s(s+1)(s^2+2s+2)},$$

$$(ii)\quad G(s) = -\frac{K(s^2+1{,}5s+1{,}5)}{s(s^2+2s+2)}.$$

7.23. Пусть $\mathbf{P}=\mathbf{u}\mathbf{u}^T$, где $\mathbf{u}$ — вектор с составляющими $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Используя метод, аналогичный рассмотренному в § 7.1, вывести достаточные условия *устойчивости в большом* для системы на рис. 7.10.1, *в*. Предполагается, что $b_0=0$ и что объект второго порядка с отрицательными действительными λ. Можно ли использовать это $\mathbf{P}$ для доказательства асимптотической устойчивости в большом? Почему?

7.24. Может ли состояние равновесия быть устойчивым, не будучи полностью устойчивым? (См. недемпфированный маятник.) Может ли состояние равновесия быть полностью устойчивым, не будучи устойчивым?



К задаче 7.25.

7.25. (*a*) При каких значениях K в предположении $v(t)=0$ состояние равновесия в $x=0$ системы на рисунке является устойчивым?

(*b*) Предполагая $v(t)\neq 0$, но ограниченной по абсолютной величине ($|v(t)|\leqslant v_m$), определить значения K, при которых x в конечном счете лежит внутри конечной области $x=0$. Как изменяется эта область с изменением v_m и K?

7.26. Исследовать влияние $H(x_1)$ на скорость реакции системы в задаче 7.18.

7.27. Исследовать влияние T на скорость реакции системы в задаче 7.19.

7.28. Использовать процедуру § 7.13 при проектировании релейного регулятора для системы

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\quad a>0,\ b>0.$$

7.29. Использовать процедуру § 7.13 при проектировании релейного регулятора для системы

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -c & -b & -a \end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где характеристические числа $\mathbf{A}$ отрицательные и различные.

7.30. Распространить процедуру примера 7.13.2 на случай, когда m — вектор.

7.31. Использовать метод неопределенного градиента для определения функции Ляпунова для системы вида, показанного на рис. 7.10.1, *б*, где

$$G(s)=\frac{s+\alpha}{s(s+1)}.$$

Каким условиям должны удовлетворять α и $k(\ )$, чтобы система была асимптотически устойчивой в большом?

7.32. (*а*) Использовать метод неопределенного градиента для определения функции Ляпунова для системы на рис. 7.10.1, *б*, где

$$G(s) = \frac{s+1}{s(s+\beta)}.$$

(*b*) Каким условиям должны удовлетворять β и $k(\ )$, чтобы система была асимптотически устойчивой в большом?

(*c*) Сопоставить ответ к п. (*b*) с предположением Айзермана (см. пример 7.10.1).

7.33. Используя метод неопределенного градиента, определить $V(\mathbf{x})$ и W для системы в примере 7.4.1. Предполагается, что

$$\alpha_{11c} = -b^2/2,\ \alpha_{11v}(x_1) = c^2x_1^2,\ \alpha_{21c} = \alpha_{12c} = \alpha_{21v} = \alpha_{12v} = 0.$$

Указать области плоскости x_1x_2, в которых кривые $V(\mathbf{x})$ являются замкнутыми. Что можно сказать о поведении данной системы?

7.34. Исследовать устойчивость системы в примере 7.15.1, где α и β являются функциями времени.

7.35. Распространить метод, аналогичный рассмотренному в § 7.13 на случай, когда x и m — дискретные сигналы.

7.36. Исследовать применение второго метода Ляпунова к первой канонической форме Лурье, когда σ, $\mathbf{x}$ и z являются дискретными сигналами.

7.37. Линейный динамический объект, характеризуемый уравнением $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{m}$ таков, что $|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$ имеет один корень $\lambda = 0$, отрицательные корни и несколько комплексных корней с отрицательными действительными частями. Корни различные. Этим линейным объектом должен управлять такой регулятор, что различные составляющие $\mathbf{m}$

$$m_i(t) = M_i \operatorname{sgn} \langle \mathbf{x}(k), \boldsymbol{\alpha}_i \rangle$$

при $(k+1)T > t \geqslant kT$, т. е. m_i может менять знак только в дискретные моменты времени kT, $(k+1)T$, ... В промежутках между этими моментами m_i имеют постоянные значения M_i или $-M_i$. Можно ли определить $\boldsymbol{\alpha}_i$ таким образом, чтобы управляемая система была асимптотически устойчивой в большом?

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. R. A. Struble, Nonlinear Differential Equations, McGraw-Hill Book Co., New York, 1962, Chapter 2.
2. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, 1959.
3. A. Liénard, Etude des Oscillations Entretenues, Rev gén élec., Vol. 23, 1928, стр. 901—946.
4. R. N. Buland, Analysis of Nonlinear Servos by Phase Plane-Delta Method, J. Franklin Inst., Vol. 257, 1954, стр. 37—48.
5. Y. H. Ku, Analysis and Control of Nonlinear Systems, The Ronald Press Co., New York, 1958.
6. P. S. Hsia, A Graphical Analysis for Nonlinear Systems, Proc. IEE, Vol. 99, Pt. II, 1952, стр. 120—165.
7. D. Graham and D. McRuer, Analysis of Nonlinear Control Systems, John Wiley and Sons, New York, 1961, стр. 304—313.
8. Л. С. Понтрягин, Обыкновенные дифференциальные уравнения, Физматгиз, 1961.

9. Struble, op. cit., стр. 177.
10. L. M. Vallese, A Note on the Analysis of Flip-Flops, Proceedings of the Symposium on Nonlinear Circuit Analysis, Polytechnic Institute of Brooklyn, Vol. VI, 1956, стр. 347—365.
11. L. M. Vallese, On the Synthesis of Nonlinear Systems, Proceedings of the Symposium on Nonlinear Circuit Analysis, Polytechnic Institute of Brooklyn, Vol. 11, 1953, стр. 201—214.
12. Struble, op. cit., стр. 172—177.
13. N. Minorsky, Nonlinear Oscillations, D Van Nostrand Co., Princeton, N. J., 1962, стр. 77—80.
14. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, стр. 343—347.
15. N. Minorsky, op. cit., стр. 84—91.
16. J. P. LaSalle, Relaxation Oscillations, Quart. Appl. Math., Vol. 7, 1949, стр. 1—19.
17. Л. С. Понтрягин, стр. 223—236.
18. N. Minorsky, op. cit., стр. 165—169.
19. S. T. Bow and J. E. Van Ness, Use of Phase Space in Transient-Stability Studies, Trans. AIEE, Vol. 77, Pt. II, 1958, стр. 187—191.
20. А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, Гостехиздат, 1950.
21. А. И. Лурье, В. Н. Постников, К теории устойчивости регулируемых систем, Прикладная математика и механика, т. 8, вып. 3, 1944.
22. Reprint of Reference, 20, Ann. Math. Study, No. 17, 1949, Princeton University Press.
23. R. E. Kalman and J. E. Bertram, Control System Analysis and Design via the Second Method of Lyapunov: I, Continuous-Time Systems; II, Discrete-Time Systems, Trans. ASME, Ser. D, J. Basic. Eng., Vol. 82, 1960, ASME Papers No. 59 — NAC-2 and -3, RIAS Monograph M 59—13.
24. С. Лефшец, Геометрическая теория дифференциальных уравнений, ИЛ, 1958.
25. Л. С. Понтрягин, стр. 202.
26. J. LaSalle and S. Lefschetz, Stability by Lyapunov's Direct Method with Applications, Academic Press, New York, 1961, стр. 37—38.
27. Struble, op. cit., стр. 161.
28. W. Hahn, Theory and Application of Liapunov's Direct Method, Prentice-Hall, Inc., Englewood Clifs, N. J., 1963, стр. 14—15.
29. Там же, стр. 15.
30. Struble, op. cit., стр. 164.
31. LaSalle and Lefschetz, loc. cit.
32. Hahn, op. cit., pp. 47—48.
33. E. A. Barbasin, Stability of the Solution of a Certain Nonlinear Third-Order Equation (in Russian), Prikl. Mat. Mekh., Vol. 16, 1952, стр. 629—632.
34. W. J. Cunningham, An Introduction to Lyapunov's Second Method (AIEE Work Session in Lypanuv's Second Method, edited by L. F. Kazda), Sept. 1960, стр. 30.
35. Hahn, op. cit., p. 15.
36. Ж. Ла-Сааль, С. Лефшец, стр. 67.
37. Е. А. Барбашин, Н. Н. Красовский, Об устойчивости движения в целом, ДАН СССР, т. 86, вып. 3, 1952.
38. E. I. Ergin, V. D. Norum and T. G. Windeknecht, Techniques for Analysis of Nonlinear Attitude Control Systems for Space Vehicles, Aeronautical Systems Division, Dir./Aeromechanics, Flight Control Lab., Wright-Patterson AFB, Ohio, Rept. No. ASD-TDR-62-208, Vol. II, June 1962.
39. J. P. LaSalle, Stability and Control, J. SIAM, Ser. A on Control, Vol. 1, No. 1, 1962, стр. 3—15.

40. А. И. Лурье, Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования, Гостехиздат, 1951.
41. А. М. Летов, Устойчивость нелинейных регулируемых систем, Физматгиз, 1962.
42. Ж. Ла-Сааль, С. Лефшец, стр. 75—105.
43. J. P. LaSalle, Complete Stability of a Nonlinear Control System, Proc. Nat. Acad. Sci., U S, Vol. 48, No. 4, April 1962, стр. 600—603.
44. Ж. Ла-Сааль, С. Лефшец, стр. 85.
45. J. E. Gibson, Nonlinear Automatic Control, McGraw-Hill Book Co., New York, 1963, стр. 324—326.
46. G Franklin and B. Gragg, Discussion of Stability Analysis of Nonlinear Control Systems by the Second Method of Liapunov, Trans. IRE, AC-7, October 1962, стр. 129—130.
47. Gibson, op. cit., стр. 328—334.
48. М. А. Айзерман, Лекции по теории автоматического регулирования, «Наука», 1965.
49. Г. Н. Дубошин, О задаче устойчивости движения при постоянно действующих возмущениях, Труды ГАИШ, 1940.
50. И. И. Ворович, Об устойчивости движения при случайных возмущениях, Известия АН СССР, сер. матем., 1956.
51. Hahn, op. cit., стр. 107.
52. LaSalle, loc. cit.
53. Ж. Ла-Сааль, С. Лефшец, стр. 121—126.
54. Hahn, op. cit., стр. 68—82.
55. D. R. Ingwerson, A Modified Liapunov Method for Nonlinear Stability Analysis, Trans. IRE, AC-6, May 1961.
56. G. P. Szego, A Contribution to Liapunov's Second Method: Nonlinear Autonomous Systems, Paper No. 61-WA-192, ASME Annual Winter Meeting, November 1961.
57. G. P. Szego, On a New Partial Differential Equation for the Stability Analysis of Time Invariant Control Systems, J. SIAM, Ser. A on Control, Vol. 1, No. 1, 1962, стр. 63—75.
58. Hahn, op. cit., стр. 78—82
59 S. G. Margolis and W. G. Vogt, Control Engineering Applications of V I. Zubov's Construction Procedure for Lyapunov Functions, Trans. IEEE, AC-8 No. 2, April 1963, стр. 104—113.
60. D. G Schultz and J. E. Gibson, The Variable Gradient Method for Generating Liapunov Functions, Trans. AIEE, Vol. 81, Pt. II, 1962, стр. 203—210.
61. J. P. LaSalle and R. J. Rath, Eventual Stability, Proc. Fourth Joint Automatic Control Conference, 1963, стр. 468—470; 1963 IFAC Conference
62. E. R. Rang, Adaptive Controlles Derived by Stability Constiderations, Minneapolis-Honeywell MPG Report 1529-TR9, March 1962.
63. W. L. Nelson, Pulse Width Relay Control in Sampling Systems, ASME Paper No 60-JAC-4, 1960.
64. T. T Kadota and H. C. Bourne, Stability Conditions of Pulse—Width—Modulated Systems through the Second Method of Lyapunov, Trans. IRE, AC-6, September 1961, стр. 266—276.

ГЛАВА 8

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ОПТИМИЗАЦИИ

§ 8.1. Введение

Вторая мировая война явилась большим толчком для развития теории и практики систем управления с обратной связью. После некоторого периода «спячки» пятидесятых годов это направление снова получило бурный стимул к развитию. Это обусловлено нуждами автоматизации промышленности и, еще больше, наступлением космической эры. Проектирование современной системы управления стало чрезвычайно сложным ввиду стремления управлять в широком диапазоне, из-за нелинейных характеристик, свойственных объектам, работающим порой в изменяющихся в широких пределах условиях, а также из-за чрезвычайно высоких требований к качеству таких систем. Теория оптимизации предлагает специалистам по системам управления способы «борьбы» с указанными трудностями проектирования современных систем управления и служит превосходным примером использования понятий линейного векторного пространства. Несмотря на множество исследований, проведенных в настоящее время в области оптимизации, данная глава ограничивается попыткой ознакомить читателя с основами теории оптимизации, а также указанием на характер ряда трудностей, с которыми приходится сталкиваться при ее применении.

Философия теории оптимизации — построить «наилучшую» систему. Это, конечно, подразумевает наличие некоторого критерия или показателя качества для суждения о том, что означает «наилучшая». Выбор надлежащего показателя качества зачастую представляет отдельную задачу. Показатели качества рассматриваются в последующих параграфах.

По сравнению с менее строгими методами проектирования замкнутых систем управления преимущества теории оптимизации состоят в следующем.

1. Процедура проектирования является более четкой, так как включает в едином показателе проектирования все существенные аспекты качества.

2. Очевидно, что проектировщик может ожидать получения наилучшего результата в соответствии с данным показателем качества. Поэтому для рассматриваемой задачи указывается область ограничений.

3. Можно обнаружить несовместность ряда требований качества.

4. Процедура непосредственно включает в себя предсказание, так как оценка показателя качества производится по будущим значениям времени управления.

5. Результирующая система управления будет адаптивной, если в процессе работы показатель проектирования переформулируется и попутно снова вычисляются параметры регулятора.

6. Определение оптимальных нестационарных процессов не вносит каких-либо дополнительных трудностей.

7. Непосредственно рассматриваются и нелинейные объекты; правда, при этом возрастает сложность вычислений.

Трудности, присущие теории оптимизации, состоят в следующем.

1. Превращение различных требований проектирования в значимый на языке математики показатель качества непростая задача; здесь возможны пробы и ошибки.

2. Существующие алгоритмы оптимального управления в случае нелинейных систем требуют сложных программ вычисления и, в ряде случаев, большого количества машинного времени.

3. Испытанные методы проектирования регуляторов применительно к большим областям фазового пространства (в отличие от малых областей вблизи траекторий, соответствующих номинальным режимам) сразу же оказываются неприемлемыми в случае нелинейных систем.

4. Показатель качества результирующей системы управления очень чувствителен к разного рода ошибочным предположениям и (или) к изменениям параметров объекта управления.

Разрешению указанных трудностей посвящаются в настоящее время значительные исследования.

Оптимизация систем берет свое начало от теории оптимальной линейной фильтрации Винера [1]. На системы с переменными параметрами эту теорию распространил Бутон [2]. Однако ни один из этих методов непосредственно неприменим к системам оптимального управления, так как в них не учитываются ограничения на физические величины систем. Следуя теории оптимальной фильтрации Винера, Ньютон рассмотрел ограничения на физические величины, введя ограничения на функции от сигналов системы [3]. Согласно рис. 8.1.1, *а* метод Ньютона может трактоваться как определение передаточной функции

оптимального регулятора системы. Такая постановка неизбежно ограничивается линейными системами. Более того, этот метод пренебрегает влиянием структуры системы на ее свойства.

Отступление от предыдущей процедуры, указанное на рис. 8.1.1, *б*, состоит в нахождении оптимальных управляющих воздействий. Для построения системы управления следует также определить оптимальный *закон управления* *), т. е. зависимость этих управляющих воздействий от переменных состояния объекта управления и желаемого характера поведения системы.

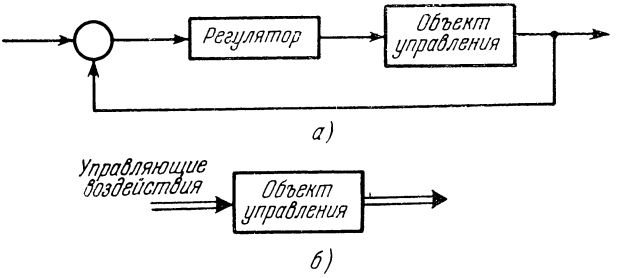


Рис. 8.1.1.

Оптимальный закон управления позволяет получить и структуру оптимальной системы.

Новейший подход к оптимизации систем управления использует современные процедуры, основанные на динамическом программировании Беллмана и расширенных Понтрягиным методах вариационного исчисления. Множество других авторов, ряд которых упоминается позднее в данной главе, также внесли существенный вклад в теорию оптимизации. Среди них следует отметить Мэрриама, особо занимающегося внедрением теории оптимизации в инженерную практику. Значительная часть материала данной главы взята из его работ, а также работ одного из его сотрудников — Эллерта.

§ 8.2. Требования к системам и показатели качества

Главная задача инженера в области управления состоит в проектировании реальных систем управления физическими процессами. Рассматриваемое здесь применение теории оптимизации к данной задаче состоит из трех основных этапов. К ним относится:

---

*) Понятие оптимальный закон управления трактуется автором как оптимальная зависимость управлений от координат объекта, а не как оптимальная программа управления во времени. (*Прим. ред.*)

1. Построение математических моделей физического процесса, подлежащего управлению, а также требований качества. Математическая модель требований качества является показателем качества системы.

2. Вычисление оптимальных управляющих воздействий.

3. Синтез регулятора, формирующего оптимальные сигналы управления.

В данном параграфе рассматриваются различные показатели качества и их взаимосвязь с требованиями качества.

Системы управления должны удовлетворять многочисленным требованиям, касающимся качества системы и ее оснащения. Например, требования качества системы могут включать:

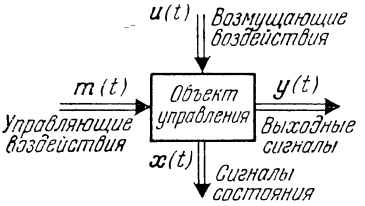


Рис. 8.2.1.

1. Желаемый характер переходного процесса.

2. Желаемый вид управляющих воздействий.

3. Ограничения на управление.

4. Ограничения на характер переходных процессов в системе, обусловленные либо назначением самой системы, либо насыщением характеристик ее элементов.

5. Желаемое значение реакции системы в некоторый будущий момент времени.

6. Минимизацию или максимизацию некоторых функций от переменных системы или времени.

7. Возмущения, начальные условия, изменения параметров и т. д., которым должна «противодействовать» система.

8. Коэффициент затухания.

9. Собственную частоту.

Требования 1—7 являются объективными, так как могут быть описаны математически для любой системы. Последние же два требования являются субъективными, так как они имеют смысл лишь для линейных систем второго порядка с постоянными параметрами. Тем не менее они полезны для приближенного суждения об устойчивости и скорости протекания процесса более сложных замкнутых систем.

Требования к аппаратуре системы должны включать:

1. Допустимое число датчиков.

2. Конструктивные элементы регулятора.

3. Размер, вес, стоимость и надежность системы.

Требования к аппаратуре системы чрезвычайно трудно непосредственно включить в какую-либо процедуру проектирования.

Показатель качества является математической моделью требований качества и выражается через входные, выходные сиг-

налы, а также сигналы состояния управляемого объекта (рис. 8.2.1). В литературе предложено много показателей качества [4—16]. Существенная часть из них представляет частные случаи показателя качества вида

$$I = \int_0^\infty f(t)\, g[e(t)]\, dt,$$

где $f(t)$ — множитель, «взвешивающий» во времени $g[e(t)]$, функцию от ошибки $e(t)$. Обычно $f(t)$ — это одна из функций $1, t, t^2, \ldots t^n$, а $g[e(t)]$ — обычно $e^2(t)$ или $|e(t)|$. В частности, показатель качества в виде интеграла от квадрата ошибки

$$I = \int^\infty e^2(t)\, dt \tag{8.2.1}$$

приводит к недостаточно демпфированным процессам, так как большие ошибки учитываются с бо́льшим весом, чем малые*). Поэтому в соответствии с минимизацией данного показателя качества большие ошибки должны быстро уменьшаться. Тем не менее этот критерий часто используется из-за возможности построения аналитического решения.

Показатель качества в виде уравнения (8.2.1) оказывается непригодным при необходимости учесть целый ряд факторов, так как ошибка может быть лишь одним из этих факторов. В связи с этим предложены показатели качества более общего вида. Эллерт, например, использует форму [16]

$$I = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left(\varphi_{ii}(t) \left[\frac{y_i^d(t) - y_i(t)}{l_{y_i}} \right]^2 + \xi_{ii}(t) \left| \frac{y_i^d(t) - y_i(t)}{l_{y_i}} \right|^{\gamma_i} \right) + \right.$$
$$\left. + \sum_{i=1}^{M} \left(\psi_{ii}(t) \left[\frac{m_i^d(t) - m_i(t)}{l_{m_i}} \right]^2 + \beta_{ii}(t) \left| \frac{m_i^d(t) - m_i(t)}{l_{m_i}} \right|^{\mu_i} \right) \right\} dt, \tag{8.2.2}$$

где y_i^d и m_i^d соответственно желаемые выход и управление; l_{y_i} и l_{m_i} относятся соответственно к предельным значениям y_i и m_i; $\varphi_{ii}(t)$, $\xi_{ii}(t)$, $\psi_{ii}(t)$ и $\beta_{ii}(t)$ являются изменяющимися во времени весовыми коэффициентами, γ_i и μ_i — целые числа. Показатель качества соответствует рассмотрению поведения

*) Приводимое здесь объяснение некорректно (см. [8] в дополнительной литературе). (*Прим. перев.*)

системы на интервале времени $t_0 \leqslant t \leqslant t_f$, где t_f может быть постоянной, переменной величиной или равной бесконечности.

Весовые множители выделяют или «взвешивают» во времени различные члены показателя качества в зависимости от их значимости. Члены, возведенные в степени γ_i и μ_i, являются *штрафными функциями*, стремящимися поддерживать выходные и управляющие сигналы в заданных пределах. Это достигается значительным «увеличением веса» этих сигналов при превышении ими граничных значений.

В общем случае не существует единственного набора весовых множителей и штрафных функций, удовлетворяющих требованиям проектирования. Более того, их выбор неэлементарен. Однако невозможность единственного выбора весовых множителей и штрафных функций порождает и гибкость их выбора, делает его более простым. С инженерной точки зрения необходима эффективная процедура выбора весовых коэффициентов и штрафных функций. Как показано в последующих параграфах, ответ на это частично дан Эллертом.

Указанные выше показатели качества и множество других, приведенных в литературе, можно представить в форме

$$I = \int_{t_0}^{t_f} q\,[y(t),\ m(t),\ t]\,dt. \tag{8.2.3}$$

Например, при полете летательного аппарата из одной точки в другую с минимальным расходом топлива желательно *минимизировать* уравнение (8.2.3) при условии, что $q[y, m, t]$ — расход топлива в единицу времени. При управлении химическими процессами можно искать *максимум* уравнения (8.2.3). В последнем случае $q[y, m, t]$ обычно характеризует «мгновенную производительность» процесса. Наконец, минимизация времени, требуемого для перехода системы из одного состояния в другое, может осуществляться минимизацией уравнения (8.2.3) при $q[y, m, t]$, равной постоянной величине. В этом случае должны существовать и соблюдаться ограничения на скорости и ускорения координат системы.

Можно было бы перечислить и множество других примеров оптимальных задач. Существенным в приведенном рассмотрении является то, что, несмотря на различие этих задач, все они тесно математически связаны уравнением (8.2.3), максимум или минимум которого находится при их решении. Задачи этого типа решаются методом Понтрягина или динамическим программированием Беллмана.

§ 8.3. Необходимые условия экстремума. Вариационное исчисление

Рассматриваемая задача состоит в определении управляющих воздействий $m(t)$, минимизирующих (или максимизирующих) показатель качества (8.2.3). Объект управления описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{m}, t), \\ \mathbf{y} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \tag{8.3.1}$$

Составляющие $\mathbf{f}$ предполагаются непрерывными по $\mathbf{x}$ и $\mathbf{m}$ и непрерывно дифференцируемыми по $\mathbf{x}$. Объект управления предполагается управляемым и наблюдаемым, т. е. все переменные состояния доступны измерению и возбуждается любое из состояний управляемого объекта. Приводимое здесь рассмотрение ограничивается частным случаем отсутствия ограничений на управляющие воздействия и переменные состояния. Более общее рассмотрение дается Понтрягиным и др. [17].

Прежде чем рассматривать минимизацию (максимизацию) функционала типа (8.2.3), целесообразно рассмотреть более знакомый случай нахождения минимума (максимума) функции. Инженеры сталкиваются с задачами минимизации (максимизации) функции конечного числа независимых переменных, скажем, $\theta(\mathbf{x})$. Точки, в которых все первые частные производные данной функции обращаются в нуль, известны как *стационарные точки*. Если в стационарной точке функция имеет минимум (максимум), то эта точка называется *экстремумом*.

Если переменные функции не являются независимыми, а подчинены ограничениям типа равенств, т. е. $\mathbf{w}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, то необходимые условия экстремума определяются методом множителей Лагранжа. Этот метод состоит во введении новых параметров (*множителей Лагранжа*) $p_1, p_2, \ldots$ (которые могут рассматриваться как составляющие вектора $\mathbf{p}$), равных числу ограничений, образованию функции $\theta_c = \theta(\mathbf{x}) + \langle \mathbf{p}, \mathbf{w} \rangle$ и нахождению необходимых условий экстремума на основе уравнений

$$\mathbf{grad}_{\mathbf{x}}\, \theta_c = \mathbf{0} \quad \text{и} \quad \mathbf{grad}_{\mathbf{p}}\, \theta_c = \mathbf{0}.$$

Эти условия имеют вид

$$\frac{\partial \theta_c}{\partial x_1} = \frac{\partial \theta_c}{\partial x_2} = \ldots = 0,$$

$$\frac{\partial \theta_c}{\partial p_1} = w_1(x) = \frac{\partial \theta_c}{\partial p_2} = w_2(x) = \ldots = 0.$$

Метод Лагранжа устраняет необходимость решения уравнений, соответствующих ограничениям, относительно x и подстановку

результатов в $\theta(\mathbf{x})$. Это обеспечивается введением указанных выше дополнительных ограничений.

Изложение вариационного исчисления также посвящено определению экстремума*). Однако, в отличие от экстремума функций, предметом вариационного исчисления служит нахождение экстремума функционалов. В § 1.4 указывается, что если каждому значению t, лежащему в некоторой области, соответствует единственное *значение* x, то $x(t)$ называется функцией t в этой области; каждому *значению* x соответствует значение t. Функционал, в сущности, является функцией не переменной, а функции. Например, $f[x(t)]$ является функционалом, если каждой *функции* $x(t)$ соответствует *значение* f. Показатель качества I, описываемый уравнением (8.2.3), является функционалом.

Если второе из уравнений (8.3.1) подставить в уравнение (8.2.3), в результате получим**)

$$I = \int_{t_0}^{t_f} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{m}, t)\, dt. \tag{8.3.2}$$

Тогда задача нахождения экстремума уравнения (8.3.2) для объекта управления, описываемого уравнением (8.3.1), состоит в определении функции $m(t)$, обеспечивающей экстремум I и удовлетворяющей n ограничениям: $f(\mathrm{x}, \mathbf{m}, t) - \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$. Для минимизации (максимизации) функционалов при функциональных ограничениях в виде равенств также полезен рассматриваемый здесь метод множителей Лагранжа.

В связи с этим сформируем функционал

$$I_c = \int_{t_0}^{t_f} (f_0 + \langle \mathbf{p}, \mathbf{f} - \dot{\mathbf{x}} \rangle)\, dt. \tag{8.3.3}$$

Составляющие $\mathbf{p}$ являются множителями Лагранжа. Если оптимальные величины (т. е. обеспечивающие экстремум I) $\mathbf{x}$, $\mathbf{m}$ и $\mathbf{p}$ обозначить соответственно через $\mathbf{x}^0$, $\mathbf{m}^0$ и $\mathbf{p}^0$, то вариации этих переменных относительно их оптимальных значений записываются как

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{x}^0 + \mathbf{A}\mathbf{x}^a, \\ \mathbf{m} &= \mathbf{m}^0 + \mathbf{B}\mathbf{m}^a, \\ \mathbf{p} &= \mathbf{p}^0 + \mathbf{\Gamma}\mathbf{p}^a, \end{aligned} \tag{8.3.4}$$

*) Наиболее доступной книгой по вариационному исчислению является [18]. Строгое изложение дается в [19].

**) Чтобы исключить вырожденные задачи, предположим, что в показатель качества входят все переменные состояния. Это может быть связано с присутствием переменных состояния исключительно в f_0 или с их воздействием на другие переменные состояния, присутствующие в f_0.

где $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{\Gamma}$ — диагональные матрицы с элементами соответственно α_i, β_i и γ_i; α_i, β_i и γ_i — параметры, характеризующие меру воздействия вариаций $\overset{a}{x_i}$, $\overset{a}{m_i}$ и $\overset{a}{p_i}$ соответственно на x_i, m_i и p_i. Предполагается, что эти вариаци инеограничены.

Из первого уравнения (8.3.4) очевидно, что

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}^0 + \mathbf{A}\dot{\mathbf{x}}^a. \tag{8.3.5}$$

При подстановке уравнений (8.3.4) и (8.3.5) в уравнение (8.3.3) I_c принимает оптимальное значение I_c^0 при $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A}\mathbf{1} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{B}\mathbf{1} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{\Gamma}\mathbf{1} = \mathbf{0}$, так как при этом $\mathbf{x}$, $\mathbf{m}$ и $\boldsymbol{p}$ принимают соответственно оптимальные значения $\mathbf{x}^0$, $\mathbf{m}^0$ и $\mathbf{p}^0$. Поэтому уравнение (8.3.3) имеет стационарную точку при $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}$ и необходимые условия оптимальности равны

$$\begin{aligned} &\mathbf{grad}_{\alpha} I_c \big|_{\alpha=\beta=\gamma=0} = \mathbf{0}, \\ &\mathbf{grad}_{\beta} I_c \big|_{\alpha=\beta=\gamma=0} = \mathbf{0}, \\ &\mathbf{grad}_{\gamma} I_c \big|_{\alpha=\beta=\gamma=0} = \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{8.3.6}$$

В результате подстановки уравнений (8.3.4) и (8.3.5) с учетом (8.3.6) в уравнения (8.3.3) получим

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t_f} \left(\mathbf{X}^a \,\mathbf{grad}_{\mathbf{x}^0} H_c^0 + \dot{\mathbf{X}}^a \,\mathbf{grad}_{\dot{\mathbf{x}}^0} H_c^0\right) dt = \mathbf{0}, \\ &\int_{t_0}^{t_f} \left(\mathbf{M}^a \,\mathbf{grad}_{\mathbf{m}^0} H_c^0\right) dt = \mathbf{0}, \\ &\int_{t_0}^{t_f} \left(\mathbf{P}^a \,\mathbf{grad}_{\mathbf{p}^0} H_c^0\right) dt = \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{8.3.7}$$

где $\mathbf{X}^a$, $\mathbf{M}^a$ и $\mathbf{P}^a$ — диагональные матрицы, элементы которых равны соответственно $\mathbf{x}^a$, $\mathbf{m}^a$ и $\mathbf{p}^a$, а H_c^0 — оптимальное значение подынтегрального выражения уравнения (8.3.3), т. е. $H_c^0 = f_0^0 + \langle \mathbf{p}^0, \mathbf{f}^0 - \dot{\mathbf{x}}^0 \rangle$. Интегрирование второго члена по частям в первом из уравнений (8.3.7) позволяет записать это уравнение как

$$\int_{t_0}^{t_f} \mathbf{X}^a \left[\mathbf{grad}_{\mathbf{x}^0} H_c^0 - \frac{d}{dt}\left(\mathbf{grad}_{\dot{\mathbf{x}}^0} H_c^0\right)\right] dt + \mathbf{X}^a \,\mathbf{grad}_{\dot{\mathbf{x}}^0} H_c^0 \Big|_{t=t_0}^{t=t_f} = \mathbf{0}.$$

$\mathbf{x}^a$ — произвольная вариация, за исключением $t = t_0$ и возможно, $t = t_f$. Для того чтобы оптимальное решение рассматриваемой задачи удовлетворяло $\mathbf{x}^0(t_0) = \mathbf{x}(t_0)$, в $t = t_0$ $\mathbf{x}^a = 0$. В задаче с заданными конечными условиями $\mathbf{x}(t_f)$ имеем $\mathbf{x}^0(t_f) = \mathbf{x}(t_f)$

и $\mathbf{x}^a(t_f)=\mathbf{0}$. Если конечные условия $\mathbf{x}$ не заданы, то $\mathbf{x}^a(t_f)$ — произвольная величина. Поэтому в соответствии с предыдущим уравнением

$$\mathbf{grad}_{\mathbf{x}^0} H_c^0 - \frac{d}{dt}\left(\mathbf{grad}_{\dot{\mathbf{x}}^0} H_c^0\right) = \mathbf{0} \tag{8.3.8}$$

и или $\mathbf{x}^0(t_f)=\mathbf{x}(t_f)$ или

$$\mathbf{grad}_{\dot{\mathbf{x}}^0} H_c^0\big|_{t=t_f} = \mathbf{0}. \tag{8.3.9}$$

Последние два уравнения (8.3.7) удовлетворяются, если

$$\begin{aligned} \mathbf{grad}_{\mathbf{m}^0} H_c^0 &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{grad}_{\mathbf{p}^0} H_c^0 &= \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{8.3.10}$$

Уравнения (8.3.8) и (8.3.10) совместно с граничными условиями $\mathbf{x}^0(t_0)=\mathbf{x}(t_0)$ и либо с $\mathbf{x}^0(t_f)=\mathbf{x}(t_f)$, либо с уравнением (8.3.9) образуют первое условие оптимальности.

Уравнения Понтрягина обычно записываются в форме, аналогичной уравнениям Гамильтона в аналитической механике. Это выполняется путем определения H аналогично гамильтониану

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{m}, \mathbf{p}, t) = \langle \mathbf{p}, \mathbf{f} \rangle. \tag{8.3.11}$$

Вектор $\mathbf{p}$ в уравнении (8.3.11) отличается от аналогичного в уравнении (8.3.3) тем, что он имеет нулевую составляющую, равную единице. Подобным образом $\mathbf{f}$ в уравнении (8.3.11) отличается от соответствующей в уравнении (8.3.1) тем, что имеет нулевую составляющую, равную подынтегральному выражению $f_0(\mathbf{x}, \mathbf{m}, t)$ уравнения (8.3.2). Поэтому $\mathbf{p}$ и $\mathbf{f}$ теперь являются векторами размерности $(n+1)$.

Первое необходимое условие оптимальности в случае «незакрепленных» конечных условий для переменных состояния можно записать посредством H в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{grad}_{\mathbf{x}^0} H^0 &= -\dot{\mathbf{p}}^0, \\ \mathbf{grad}_{\mathbf{m}^0} H^0 &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{grad}_{\mathbf{p}^0} H^0 &= \dot{\mathbf{x}}^0 \end{aligned} \tag{8.3.12}$$

при граничных условиях $\mathbf{x}^0(t_0)=\mathbf{x}(t_0)$ и $\mathbf{p}^0(t_f)=\mathbf{0}$ *). При заданных конечных условиях для $\mathbf{x}^0$ последнее граничное условие заменяется $\mathbf{x}^0(t_f)=\mathbf{x}(t_f)$ **).

Приведенное выше уравнение относительно $\dot{\mathbf{x}}^0$ эквивалентно уравнению (8.3.2) и первому уравнению (8.3.1), следовательно,

*) Последнее из данных граничных условий представляет собой частный случай так называемых *условий трансверсальности*.

**) Задачи, в которых ограничения накладываются на часть (но не все) конечных значений переменных состояния, также рассматриваются в литературе [17].

является неотъемлемой частью сформулированной задачи. Уравнения (8.3.12) называются уравнениями *Эйлера* или *Гамильтона* в канонической форме. Их совместное решение позволяет найти управляющие воздействия $\mathbf{m}^0(t)$, обеспечивающие стационарность I.

В вариационном исчислении различают слабый и сильный максимум и минимум. Помимо уравнений Эйлера должны удовлетворяться два других необходимых условия слабого максимума и минимума. Это — условие Лежандра и условие Якоби [18]. Согласно условию слабого минимума Лежандра требуется, чтобы матрица (4.11.11) $\mathbf{grad}_{\mathbf{m}^0}\langle\mathbf{grad}_{\mathbf{m}^0} H^0$ была положительно определенной. Это аналогично требованию положительности второй производной при минимизации функции на основе обычных методов исчисления. Как показано в следующем параграфе, надлежащий выбор f_0 при линейном объекте управления обеспечивает выполнение условия Лежандра.

Условие Якоби требует, чтобы на интервале $t_0 < t \leqslant t_f$ не существовало ни одной сопряженной точки. *Сопряженной точкой* является такая точка, в которой $x_i^a(t_1)$ ограничена, где $t_0 < t_1 \leqslant \leqslant t_j$ *). Следовательно, в такой точке вариация $x_i(t)$ ограничена. При существовании сопряженной точки параметры регулятора могли бы стать неограниченными. Поэтому с целью обеспечения ограниченности параметров регулятора должны соблюдаться условия Якоби. При линейном объекте управления надлежащий выбор f_0 гарантирует также выполнение условия Якоби. Это указывается в § 8.4.

Интерпретация в виде оптимизации координаты. Формулировка задачи оптимизации, данная Понтрягиным, сводит задачу к оптимизации некоторой координаты. В сущности, вводится нулевая координата $\mathbf{x}$

$$x_0(t) = \int_{t_0}^{t} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{m}, \tau)\, d\tau,$$

так что $\dot{x}_0(t) = f_0(\mathbf{x}, \mathbf{m}, t)$. Оптимизация $x_0(t)$ в момент $t = t_f$ соответствует оптимизации показателя качества, так как

$$I = x_0(t_f) = \int_{t_0}^{t_f} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{m}, t)\, dt, \tag{8.3.13}$$

т. е. является уравнением (8.3.2).

Для объектов первого порядка, описываемых $\dot{x}_1 = f_1(x_1, m_1, t)$, задачу оптимизации с заданным конечным условием $x_1^0(t_f) = x_1(t_f)$

*) Сопряженные точки имеют очень интересную геометрическую интерпретацию [18, 19]. Однако это выходит за пределы приводимого здесь рассмотрения.

можно представить в плоскости x_0x_1 (рис. 8.3.1). (Обобщение на случай объектов более высокого порядка не представляет затруднений; но изобразить это на чертеже трудно.) Желаемое конечное условие представляется линией $x_1 = \overset{0}{x}_1(t_f)$. Из уравнения (8.3.13) для различных $m_1(t)$ можно определить соответствующие значения $I = x_0(t_f)$. Оптимальным управляющим воздействием $m_1^0(t)$ является такое, при котором координата $x_0(t_f) = I$ принимает наименьшее значение $x_0^0(t_f) = I^0$ (в предположении, что ищется минимум I). Если I не зависит от $m_1(t)$, то надлежащее $\overset{0}{m}_1(t)$ является мгновенным импульсом. Тогда $x_1(t_0)$ переводилось бы из $x_1(t_0)$ в $x_1^0(t^f)$ за «время, равное нулю», и, следовательно, при нулевом I. Однако мгновенные импульсы $m_1(t)$ физически нереализуемы. $m^0(t)$ следует выбирать из множества допустимых управляющих воздействий, которые по определению ограничены и непрерывны для всех $t_0 \leqslant t \leqslant t_f$, за исключением, быть может, конечного числа t.

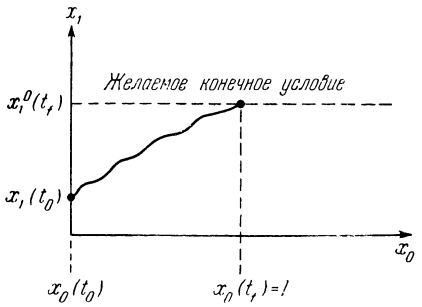


Рис. 8.3.1.

В случае отсутствия ограничений на $\mathbf{x}^0(t_f)$ все составляющие $\mathbf{p}^0$ при $t = t_f$ равны нулю, за исключением составляющей $p_0^0(t_f)$, равной единице. Поэтому задача минимизации (максимизации) $I = x^0(t_f)$ может рассматриваться как минимизация (максимизация) $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle$ при $t = t_f$. Другими словами, исходя из начальных условий $\mathbf{x}^0(t_0)$, следует выбирать $\mathbf{m}^0(t)$ таким образом, чтобы состояние системы (включая составляющую x_0) минимально (максимально) изменялось в направлении вектора $\mathbf{p}$. Но первое и последнее уравнения (8.3.12) не что иное, как уравнения аналитической механики Гамильтона. H аналогична гамильтониану, или полной энергии, а $\mathbf{p}$ и $\mathbf{x}$ аналогичны соответственно моменту и обобщенным координатам. Так как H представляет полную энергию системы, $\mathbf{x}$, $\mathbf{m}(t)$ следует выбирать из условия минимума (максимума) в каждый момент времени функции H. Это описывается вторым уравнением (8.3.12).

§ 8.4. Оптимальные линейные задачи

В этом параграфе предполагается, что объект управления описывается

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{m}, \tag{8.4.1}$$

а показатель качества задается путем подстановки

$$f_0(\mathbf{x}, \mathbf{m}, t) = \frac{1}{2}[\langle(\mathbf{x}^d - \mathbf{x}), \mathbf{\Omega}(\mathbf{x}^d - \mathbf{x})\rangle + \langle\mathbf{m}, \mathbf{Zm}\rangle]$$

в уравнение (8.3.2). $\mathbf{x}^d$ — желаемое поведение системы, $\mathbf{\Omega}$ и $\mathbf{Z}$ — симметрические матрицы, элементы которых могут изменяться во времени*). Размерность $\mathbf{\Omega}$ меньше, чем $(n \times n)$, чтобы в f_0 входили не все составляющие $(\mathbf{x}^d - \mathbf{x})$**). Требуется определить $\mathbf{x}^0$, $\mathbf{m}^0$ и зависимость $\mathbf{m}^0$ от $\mathbf{x}^0$ и $\mathbf{x}^d$.

Из уравнения (8.3.10)

$$H^0 = \frac{1}{2}[\langle\mathbf{x}^d - \mathbf{x}^0, \mathbf{\Omega}(\mathbf{x}^d - \mathbf{x}^0)\rangle + \langle\mathbf{m}^0, \mathbf{Zm}^0\rangle] + \langle\mathbf{p}^0, \mathbf{Ax}^0 + \mathbf{Bm}^0\rangle.$$

Из второго уравнения (8.3.12) имеем $\mathbf{Zm}^0 + \mathbf{B}^T\mathbf{p}^0 = \mathbf{0}$, так как матрица $\mathbf{Z}$ симметрическая. Тогда

$$\mathbf{m}^0 = -\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{p}^0. \tag{8.4.2}$$

Это выражение для оптимального управления, но записано оно относительно $\mathbf{p}^0$. В соответствии с законом управления необходимо выразить $\mathbf{m}^0(t)$ через $\mathbf{x}^0(t)$.

Согласно первому уравнению (8.3.12) $\dot{\mathbf{p}}^0 = -\mathbf{A}^T\mathbf{p}^0 + \mathbf{\Omega}(\mathbf{x}^d - \mathbf{x}^0)$. Из уравнения (8.4.1) после подстановки уравнения (8.4.2) имеем $\dot{\mathbf{x}}^0 = \mathbf{Ax}^0 - \mathbf{BZ}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{p}^0$. Последние два уравнения можно переписать в виде

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}^0 \\ \dot{\mathbf{p}}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{BZ}^{-1}\mathbf{B}^T \\ -\mathbf{\Omega} & -\mathbf{A}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{p}^0 \end{bmatrix} + \mathbf{\Omega} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{x}^d \end{bmatrix}. \tag{8.4.3}$$

Уравнение (8.4.3) состоит из $2n$ линейных дифференциальных уравнений первого порядка, содержащих $2n$ неизвестных $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, p_1^0, p_2^0, \ldots, p_n^0$. Они подчинены n граничным условиям при $t = t_0$, т. е. $\mathbf{x}^0(t_0) = \mathbf{x}(t_0)$ и n граничным условиям при $t = t_f$, т. е. либо $\mathbf{p}^0(t_f) = \mathbf{0}$, либо $\mathbf{x}^0(t_f) = \mathbf{x}(t_f)$ (в зависимости от характера задачи). Уравнение (8.4.3) с приведенными выше граничными условиями образует *двухточечную краевую задачу*. Ее решение позволяет получить оптимальное управление $\mathbf{m}^0(t)$ и соответствующее ему поведение объекта $\mathbf{x}^0(t)$ при $t_0 \leqslant t \leqslant t_f$.

---

*) Уравнения Эйлера совместно с положительной полуопределенностью $\mathbf{\Omega}$ и положительной определенностью $\mathbf{Z}$ составляют необходимые и достаточные условия существования минимума показателя качества для рассматриваемого здесь класса задач. Более того, соответствующая линейная система является устойчивой (асимптотически устойчивой в случае положительной определенности $\mathbf{\Omega}$) [25].

**) Подобное утверждение справедливо при размерности $\mathbf{Z}$, соответствующей размерности $\mathbf{m}$.

Преобразование двухточечной краевой задачи. В рассматриваемом случае двухточечная краевая задача может быть сведена к двум «одноточечным краевым» задачам*). Уравнение (8.4.3) состоит из системы взаимосвязанных дифференциальных уравнений относительно $\mathbf{x}^0$ и $\mathbf{p}^0$. Поэтому $\mathbf{x}^0$ и $\mathbf{p}^0$ должны быть связаны линейным преобразованием, которое может выражаться посредством

$$\mathbf{p}^0 = \mathbf{K}\mathbf{x}^0 - \mathbf{v}^0, \tag{8.4.4}$$

где $\mathbf{K}$ — квадратная матрица переменных коэффициентов усиления, а $\mathbf{v}$ — переменный вектор. Подстановка уравнения (8.4.4) во второе уравнение (8.4.3) дает

$$\mathbf{K}\dot{\mathbf{x}}^0 + \dot{\mathbf{K}}\mathbf{x}^0 - \dot{\mathbf{v}}^0 = -\mathbf{\Omega}\mathbf{x}^0 - \mathbf{A}^T\mathbf{K}\mathbf{x}^0 + \mathbf{A}^T\mathbf{v}^0 + \mathbf{\Omega}\mathbf{x}^d.$$

Тогда подстановка $\mathbf{x}^0$ из первого уравнения (8.4.3) с учетом уравнения (8.4.4) приводит к

$$\left(\dot{\mathbf{K}} + \mathbf{K}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{K} - \mathbf{K}\mathbf{B}\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K} + \mathbf{\Omega}\right)\mathbf{x}^0 = \dot{\mathbf{v}}^0 + \left(\mathbf{A}^T - \mathbf{B}\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{B}^T\right)\mathbf{v}^0 + \mathbf{\Omega}\mathbf{x}^d.$$

Так как это выражение должно выполняться для всевозможных $\mathbf{x}$, то условием этого служат

$$\begin{gathered}\dot{\mathbf{K}} + \mathbf{K}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{K} - \mathbf{K}\mathbf{B}\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K} + \mathbf{\Omega} = [0],\\ \dot{\mathbf{v}}^0 + \left(\mathbf{A}^T - \mathbf{B}\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{B}^T\right)\mathbf{v}^0 + \mathbf{\Omega}\mathbf{x}^d = \mathbf{0}.\end{gathered} \tag{8.4.5}$$

Первое уравнение (8.4.5) представляет систему нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка типа Риккати [20]. Второе уравнение (8.4.5) является системой линейных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами**). В случае отсутствия ограничений на $\mathbf{x}^0$ в конечной точке t_f $\mathbf{p}^0(t_f) = 0$. Тогда граничные условия, накладываемые на $\mathbf{K}$ и $\mathbf{v}^0$ в соответствии с уравнением (8.4.4), состоят в равенстве нулю элементов $\mathbf{K}$ и $\mathbf{v}^0$ при $t = t_f$.

При определенных $\mathbf{K}$ и $\mathbf{v}^0$ закон управления оптимальной системы получается в результате подстановки уравнения (8.4.4) в (8.4.2)

$$\mathbf{m}^0 = -\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{B}^T\left(\mathbf{K}\mathbf{x}^0 - \mathbf{v}^0\right). \tag{8.4.6}$$

Таким образом, в рассмотренном случае закон управления является линейным и коэффициенты усиления обратной связи $\mathbf{K}$

*) Под одноточечной краевой задачей подразумевается интегрирование системы уравнений при заданных начальных или конечных условиях. (*Прим. ред.*)

**) Эти уравнения являются сопряженными к уравнениям замкнутой (управляемой) системы.

не зависят от состояния объекта управления. Более того, так как закон управления не зависит от начальных значений переменных состояния, указанная на рис. 8.4.1 структура оптимальна при любых начальных условиях. Мэрриам, первый отметивший это свойство, назвал его оптимальной структурой [14]*). На рис. 8.4.1 показана структура линейной системы в общем виде.

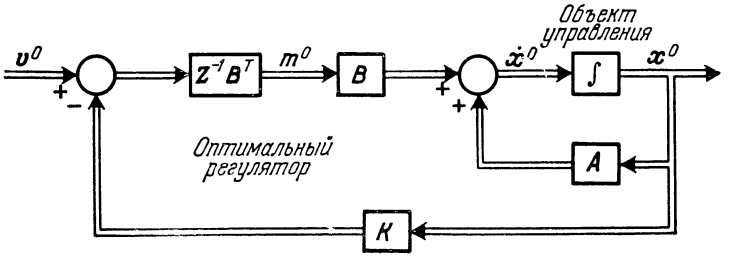


Рис. 8.4.1.

Определив $\mathbf{m}^0$, находим реакцию оптимальной системы из выражения

$$\dot{\mathbf{x}}^0 = \left(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}\right)\mathbf{x}^0 + \mathbf{B}\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{v}^0, \tag{8.4.7}$$

получающегося в результате подстановки уравнения (8.4.6) в (8.4.1). Таким образом, двухточечная краевая задача сведена к двум одноточечным краевым задачам. Это — решение уравнения (8.4.5) «назад» — от $t=t_f$ к $t=t_0$ и последующее решение уравнения (8.4.7) «вперед» — от $t=t_0$ к $t=t_f$.

В нелинейном случае (нелинейный объект управления и (или) неквадратичный показатель качества) преобразовать двухточечную краевую задачу указанным выше образом не представляется возможным. Оптимальный закон управления при этом будет нелинейным. Решение таких оптимальных задач требует, как показано в последующих параграфах, привлечения вычислительных машин.

Пример 8.4.1. Построить оптимальный регулятор при показателе качества

$$I = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} [x_1\omega_{11}x_1 + m_1\zeta_{11}m_1]\,dt$$

для объекта первого порядка, описываемого $\dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + b_{11}m_1(t)$. Рассматривается система регулирования, так что $x_1^d = 0$, $x_1(t_f)$ — произвольная величина.

---

*) Указанный структурный вариант не единственный и к тому же неполный, так как вектор $\mathbf{v}^0$ зависит как от $\mathbf{x}^d$, так и от $\mathbf{K}$. (*Прим. перев.*)

При $\mathbf{x}^d=0$ из уравнения (8.4.5) следует $\mathbf{v}^0=0$. Следовательно, $m_1^0(t)=-\zeta_{11}^{-1}b_{11}k_{11}(t)\,x_1^0(t)$, где $k_{11}(t)$ задается уравнением

$$\dot{k}_{11}+2k_{11}a_{11}-\left(\frac{b_{11}^2}{\zeta_{11}}\right)k_{11}^2+\omega_{11}=0,\quad k_{11}(t_f)=0,$$

полученным на основе уравнений (8.4.6) и (8.4.5). Для определения $k_{11}(t)$ положим $\tau=t_f-t$ и $k_{11}(t_f-\tau)=k_{11}^0(\tau)$. Тогда

$$\dot{k}_{11}^0=2a_{11}k_{11}^0-\left(\frac{b_{11}^2}{\zeta_{11}}\right)k_{11}^{02}+\omega_{11},\quad k_{11}^0(0)=0.$$

Пусть $k_{11}^0(\tau)=\zeta_{11}\dot{z}/b_{11}^2z$, откуда следует

$$\ddot{z}-2a_{11}\dot{z}-\frac{\omega_{11}b_{11}^2}{\zeta_{11}}z=0.$$

Это линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами и может решаться классическим методом или методом преобразований. Его решение $z=c_1e^{\lambda_1\tau}+c_2e^{\lambda_2\tau}$, где c_1 и c_2 — постоянные величины, а $\lambda_1=a_{11}+\beta$, $\lambda_2=a_{11}-\beta$,

$$\beta=\left(a_{11}^2+\omega_{11}\frac{b_{11}^2}{\zeta_{11}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Поэтому

$$k_{11}^0(\tau)=\frac{\zeta_{11}\left(\lambda_1c_1e^{\beta\tau}+\lambda_2c_2e^{-\beta\tau}\right)}{b_{11}^2\left(c_1e^{\beta\tau}+c_2e^{-\beta\tau}\right)}.$$

Так как $k_{11}^0(0)=0$, то $c_2=-c_1\lambda_1/\lambda_2$. Тогда

$$k_{11}^0(\tau)=\frac{\omega_{11}\operatorname{sh}\beta\tau}{\beta\operatorname{ch}\beta\tau-a_{11}\operatorname{sh}\beta(t_f-t)}.$$

Следовательно,

$$k_{11}(t)=\frac{\omega_{11}\operatorname{sh}\beta(t_f-t)}{\beta\operatorname{ch}\beta(t_f-t)-a_{11}\operatorname{sh}\beta(t_f-t)},$$

и $m^0(t)$ задается в виде

$$m_1^0(t)=-\frac{\omega_{11}b_{11}}{\zeta_{11}}\left[\frac{\operatorname{sh}\beta(t_f-t)}{\beta\operatorname{ch}\beta(t_f-t)-a_{11}\operatorname{sh}\beta(t_f-t)}\right]x_1^0(t).$$

Полученный в результате решения регулятор показан на рис. 8.4.2.

При t_f, равной постоянной величине, по мере роста $t<t_f$ интервал интегрирования в показателе качества уменьшается. В этой так называемой задаче с *сокращающимся интервалом* оптимальная система получается нестационарной. Если $t_f=t+T$, то конечное время в показателе качества скользит со сдвигом T вдоль текущего времени. Это так называемая задача со *скользящим интервалом* и, если $\mathbf{x}^d$, Ω, $\mathbf{Z}$ и параметры линейного объекта управления не зависят от времени, то результирующая система будет стационарной. Частным случаем служит t_f, равное бесконечности. Это задача с бесконеч-

ным интервалом *). Если $\mathbf{x}^d$, Ω, $\mathbf{Z}$ и параметры объекта управления постоянны, то результирующая система, соответствующая бесконечному интервалу

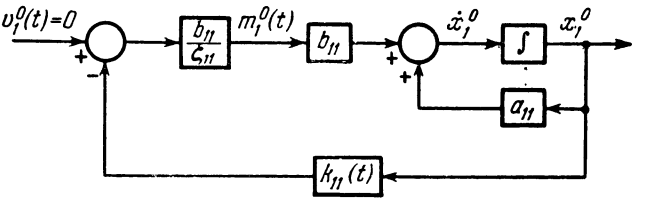


Рис. 8.4.2.

показателя качества, будет стационарной. В рассматриваемом примере $m_1^0(t)$ принимает вид

$$m_1^0(t) = -\frac{\omega_{11} b_{11}}{\zeta_{11}(\beta - a_{11})} x_1^0(t),$$

что соответствует стационарной системе.

В случае объекта управления, содержащего «чистое» интегрирующее звено, $a_{11}=0$. Тогда в случае бесконечного интервала

$$m_1^0(t) = -\left(\frac{\omega_{11}}{\zeta_{11}}\right)^{\frac{1}{2}} x_1^0(t).$$

При увеличении ω_{11}/ζ_{11} коэффициент усиления разомкнутой системы возрастает, так что в соответствии с показателем качества ошибка системы уменьшается. Скорость реакции, выражаемая

$$x_1^0(t) = x_1^0(t_0) \exp\left[-b_{11}\left(\frac{\omega_{11}}{\zeta_{11}}\right)^{\frac{1}{2}}(t-t_0)\right],$$

также возрастает. Это согласуется с «интуитивными» представлениями, основанными на общеизвестной теории обратной связи.

Если оптимальная система стационарная, $\dot{\mathbf{K}}=[0]$ и уравнение Риккати (8.4.5) сводится к системе нелинейных алгебраических уравнений, разрешаемых относительно элементов $\mathbf{K}$. Однако даже в этом частном случае невозможно определить $\mathbf{K}$ в замкнутой форме для объектов выше второго порядка. Поэтому предшествующее рассмотрение приведено скорее с целью показать существование для линейного случая закона управления в виде уравнения (8.4.6), чем указать общий метод его нахождения. При законе управления (8.4.6) важно выбрать в качестве переменных состояния переменные, доступные измерению.

В общем случае при аналитическом расчете оптимальной системы используется непосредственно решение двухточечной краевой задачи, а не сведéние ее к двум одноточечным.

*) Эти термины введены Мэрриамом.

Стационарный случай. Если **A**, **B**, **Ω** и **Z** не зависят от времени, то уравнение (8.4.3) можно решить на основе преобразования Лапласа. Полагая $t_0=0$, видим, что преобразование уравнения (8.4.3) дает

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{\Phi}(s)\mathbf{B}\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{B}^T \\ -\mathbf{\Phi}^T(-s)\mathbf{\Omega} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}^0(s) \\ \mathbf{P}^0(s) \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}(s)\mathbf{x}^0(0) \\ -\mathbf{\Phi}^T(-s)[\mathbf{p}^0(0)+\mathbf{\Omega}\mathbf{X}^d(s)] \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{\Phi}(s)=(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$ и $-\mathbf{\Phi}^T(-s)=(s\mathbf{I}+\mathbf{A}^T)^{-1}$, а $\mathbf{X}^0(s)$, $\mathbf{P}^0(s)$, $\mathbf{X}^d(s)$ — векторы. $\mathbf{\Phi}(s)$ и $-\mathbf{\Phi}(-s)$ — преобразование Лапласа переходных матриц состояния соответственно для уравнения (8.4.1) и сопряженного к нему.

Ввиду

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \mathbf{I} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (\mathbf{I}-\alpha_{12}\alpha_{21})^{-1} & -(\mathbf{I}-\alpha_{12}\alpha_{21})^{-1}\alpha_{12} \\ -(\mathbf{I}-\alpha_{21}\alpha_{12})^{-1}\alpha_{21} & (\mathbf{I}-\alpha_{21}\alpha_{12})^{-1} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{X}^0(s)$ и $\mathbf{P}^0(s)$ записываются как

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{X}^0(s) &= [\mathbf{I}+\mathbf{\Phi}(s)\mathbf{B}\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{\Phi}^T(-s)\mathbf{\Omega}]^{-1}\times \\ &\quad\times\mathbf{\Phi}(s)\{\mathbf{x}^0(0)+\mathbf{B}\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{\Phi}^T(-s)[\mathbf{p}^0(0)+\mathbf{\Omega}\mathbf{X}^d(s)]\}, \\ \mathbf{P}^0(s) &= [\mathbf{I}+\mathbf{\Phi}^T(-s)\mathbf{\Omega}\mathbf{\Phi}(s)\mathbf{B}\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{B}^T]^{-1}\times \\ &\quad\times\mathbf{\Phi}^T(-s)\{\mathbf{\Omega}\mathbf{\Phi}(s)\mathbf{x}^0(0)-[\mathbf{p}^0(0)+\mathbf{\Omega}\mathbf{X}^d(s)]\}. \end{aligned}\right\} \quad (8.4.8)$$

Уравнения (8.4.8) и (8.4.2) можно использовать для нахождения оптимального закона управления и реакции оптимальной системы. Однако эта процедура более усложнена, чем описанная ранее.

Пример 8.4.2. Повторно решить пример 8.4.1 методом преобразования Лапласа.

В этом случае

$$\Phi(s)=[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}=\frac{1}{s-a_{11}}$$

и $\mathbf{X}^d(s)=\mathbf{0}$. Тогда

$$P_1^0(s)=-\left[1-\frac{\omega_{11}b_{11}^2}{\zeta_{11}(s-a_{11})(s+a_{11})}\right]^{-1}\left[\frac{1}{s+a_{11}}\right]\left[\frac{\omega_{11}x_1^0(0)}{s-a_{11}}-p_1^0(0)\right]= \\ =-\frac{\omega_{11}x_1^0(0)}{(s+\beta)(s-\beta)}+\frac{p_1^0(0)(s-a_{11})}{(s+\beta)(s-\beta)},$$

где β определяется в примере 8.4.1. Обратное преобразование приводит к

$$p_1^0(t) = -\frac{\omega_{11}x_1^0(0)}{\beta}\operatorname{sh}\beta t + \frac{p_1^0(0)}{\beta}(\beta\operatorname{ch}\beta t - a_{11}\operatorname{sh}\beta t).$$

Граничное условие, накладываемое на $p_1^0(t)$, есть $p_1^0(t_f) = 0$. Так как задача линейная, то ее решение достигается надлежащим выбором $p_1^0(0)$. Поэтому

$$p_1^0(0) = \frac{\omega_{11}x_1^0(0)\operatorname{sh}\beta t_f}{\beta\operatorname{ch}\beta t_f - a_{11}\operatorname{sh}\beta t_f}.$$

Тогда $p_1^0(t)$ записывается как

$$p_1^0(t) = \frac{\omega_{11}x_1^0(0)}{\beta}\left[-\operatorname{sh}\beta t + \frac{\operatorname{sh}\beta t_f(\beta\operatorname{ch}\beta t - a_{11}\operatorname{sh}\beta t)}{\beta\operatorname{ch}\beta t_f - a_{11}\operatorname{sh}\beta t_f}\right].$$

Подобным образом

$$x_1^0(t) = x_1^0(0)\left[\frac{\beta\operatorname{ch}\beta(t_f - t) - a_{11}\operatorname{sh}\beta(t_f - t)}{\beta\operatorname{ch}\beta t_f - a_{11}\operatorname{sh}\beta t_f}\right].$$

Это выражение можно разрешить относительно $x_1^0(0)$, а результат подставить в уравнение для $p_1^0(t)$. Это приводит к

$$p_1^0(t) = \left[\frac{\omega_{11}\operatorname{sh}\beta(t_f - t)}{\beta\operatorname{ch}\beta(t_f - t) - a_{11}\operatorname{sh}\beta(t_f - t)}\right]x_1^0(t).$$

Тогда согласно уравнению (8.4.2)

$$m_1^0(t) = -\frac{\omega_{11}b_{11}}{\zeta_{11}}\left[\frac{\operatorname{sh}\beta(t_f - t)}{\beta\operatorname{ch}\beta(t_f - t) - a_{11}\operatorname{sh}\beta(t_f - t)}\right]x_1^0(t),$$

что совпадает с результатом, полученным ранее другим методом. Иллюстрацией данного результата также служит рис. 8.4.2.

Пример 8.4.3. Построить оптимальную систему для объекта на рис. 8.4.3. Показатель качества описывается

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix}\omega_{11} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \zeta_{22}\end{bmatrix},$$

а t_f равно бесконечности, что соответствует задаче с бесконечным интервалом. Снова рассматривается задача регулирования, так что $\mathbf{x}^d(t) = \mathbf{0}$. $\mathbf{x}(t_f)$, как и ранее, может быть произвольной величиной.

Так как матрица $\mathbf{Z}$ особенная, то нельзя непосредственно использовать первое из уравнений (8.4.8). $\mathbf{Z}^{-1}$ в уравнении (8.4.8) следует из решения

$$\mathbf{Z}\mathbf{m}^0 + \mathbf{B}^T\mathbf{p}^0 = \mathbf{0} \tag{8.4.9}$$

относительно $\mathbf{m}^0$ и подстановки результата в уравнение (8.4.1). В рассматриваемом случае $\mathbf{Z}$ приведена выше, а

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Поэтому из уравнения (8.4.9) имеем лишь $m_2^0 = -\left(p_2^0/\zeta_{22}\right)$. Однако согласно условиям задачи $m_1^0=0$. Тогда уравнение (8.4.9) не изменится, если $\mathbf{Z}$ заменить на

$$\mathbf{Z}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta_{22} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, можно воспользоваться уравнениями (8.4.8), заменив $\mathbf{Z}^{-1}$ матрицей $\mathbf{Z}_1^{-1}$ *). Тогда, учитывая, что

$$\varphi(s) = \begin{bmatrix} s^{-1} & s^{-2} \\ 0 & s^{-1} \end{bmatrix},$$

можно определить $\mathbf{P}^0(s)$ в виде

$$\mathbf{P}^0(s) = \frac{\omega_{11}\begin{bmatrix} -s^2 & -s \\ s & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}^0(0) - \begin{bmatrix} -s^3 & -\dfrac{\omega_{11}}{\zeta_{22}} \\ s^2 & -s^3 \end{bmatrix}\mathbf{p}^0(0)}{s^4 + (\omega_{11}/\zeta_{22})},$$

где $\mathbf{p}^0(0)$ следует выбрать таким образом, чтобы $\mathbf{p}^0(\infty)=\mathbf{0}$. Но $s^4+(\omega_{11}/\zeta_{22}) = G(s)G(-s)$, где

$$G(s) = s^2 + (2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\omega_{11}}{\zeta_{22}}\right)^{\frac{1}{4}} s + \left(\frac{\omega_{11}}{\zeta_{22}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Это указывает на то, что $\mathbf{P}^0(s)$ содержит два полюса в правой полуплоскости и два — в левой, симметрично расположенные относительно начала координат. Чтобы $\mathbf{p}^0(\infty)=0$, вычеты в полюсах, лежащих в правой полуплоскости, должны быть равны нулю. Из разложения на элементарные дроби $P_1^0(s)$ либо $P_0^2(s)$ следует, что условия, накладываемые на $\mathbf{p}^0(0)$ из условия равенства нулю вычетов в каждом из полюсов $\mathbf{P}^0(s)$ в правой полуплоскости, имеют вид

$$\mathbf{p}^0(0) = \begin{bmatrix} \left(4\omega_{11}^3\zeta_{22}\right)^{\frac{1}{4}} & \left(\omega_{11}\zeta_{22}\right)^{\frac{1}{2}} \\ \left(\omega_{11}\zeta_{22}\right)^{\frac{1}{2}} & \left(4\omega_{11}\zeta_{22}^3\right)^{\frac{1}{4}} \end{bmatrix}\mathbf{x}^0(0).$$

Из

$$\mathbf{X}^0(s) = \frac{\begin{bmatrix} s^3 & s^2 \\ -\dfrac{\omega_{11}}{\zeta_{22}} & s_3 \end{bmatrix}\mathbf{x}^0(0) + \zeta_{22}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & -s \\ s & -s^2 \end{bmatrix}\mathbf{p}^0(0)}{s^4 + (\omega_{11}/\zeta_{22})}$$

---

*) Заметим, что $\mathbf{Z}_1$ положительно определенная функция и, следовательно, результирующая линейная оптимальная система асимптотически устойчива (все другие ранее указанные для этого требования также выполняются). Очевидно, что, в отличие от приведенной процедуры, можно вывести уравнение (8.4.8), но для случая, когда $\mathbf{B}$ — вектор.

при указанных выше значениях $\mathbf{p}^0(0)$ имеем $\mathbf{x}^0(t) = \varphi(t)\mathbf{x}^0(0)$, где

$$\varphi(t) = e^{-\alpha t}\begin{bmatrix} (2)^{\frac{1}{2}}\sin\left(\alpha t + \frac{\pi}{4}\right) & \alpha^{-1}\sin\alpha t \\ -2\alpha\sin\alpha t & -(2)^{\frac{1}{2}}\sin\left(\alpha t - \frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix},$$

а $\alpha = (\omega_{11}/4\zeta_{22})^{\frac{1}{4}}$. Подобным образом

$$m_2^0(t) = -\zeta_{22}^{-1}p_2^0(t) =$$

$$= -2\alpha^2 e^{-\alpha t}\left[-x_1^0(0)(2)^{\frac{1}{2}}\sin\left(\alpha t - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{x_2^0(0)}{\alpha}\sin\left(\alpha t + \frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Подстановка $\mathbf{x}^0(0) = \varphi^{-1}(t)\mathbf{x}^0(t)$ дает для объекта управления на рис. 8.4.3 закон управления

$$m_2^0(t) = -2\alpha\left[\alpha x_1^0(t) + x_2^0(t)\right].$$

Как и следовало ожидать, это линейная функция переменных состояния.

Увеличение α соответствует возрастанию в показателе качества отношения коэффициентов при ошибке и управлении. Из $\varphi(t)$ или $G(s)$ видно, что это увеличивает скорость переходного процесса и собственную частоту системы. Однако коэффициент затухания остается постоянным, равным 0,707. Увеличение затухания можно было бы достигнуть выбором в показателе качества $\omega_{22} > 0$.

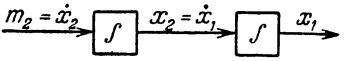


Рис. 8.4.3.

Нестационарный случай [21]. Если какой-либо из элементов **A**, **B**, **Ω** или **Z** зависит от времени, то уравнение (8.4.3) обычно необходимо решать во временнóй области. Решение уравнения (8.4.3) определяется переходной матрицей состояния, удовлетворяющей

$$\dot{\varphi}(t, t_0) = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B}\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{B}^T \\ -\mathbf{\Omega} & -\mathbf{A}^T \end{bmatrix}\varphi(t, t_0).$$

Переходная матрица состояния содержит $2n$ строк и $2n$ столбцов и может быть разбита на четыре подматрицы

$$\varphi(t, t_0) = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(t, t_0) & \varphi_{12}(t, t_0) \\ \varphi_{21}(t, t_0) & \varphi_{22}(t, t_0) \end{bmatrix}. \tag{8.4.10}$$

Так как $\varphi(t_0, t_0) = \mathbf{I}$, то

$$\varphi_{11}(t_0, t_0) = \varphi_{22}(t_0, t_0) = \mathbf{I},$$
$$\varphi_{12}(t_0, t_0) = \varphi_{21}(t_0, t_0) = [0].$$

Решение уравнения (8.4.3) выражается через $\varphi(t, t_0)$ в виде

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}^0(t) \\ \mathbf{p}^0(t) \end{bmatrix} = \varphi(t, t_0) \begin{bmatrix} \mathbf{x}^0(t_0) \\ \mathbf{p}^0(t_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1(t, t_0) \\ \mathbf{b}_2(t, t_0) \end{bmatrix}, \tag{8.4.11}$$

где

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1(t, t_0) \\ \mathbf{b}_2(t, t_0) \end{bmatrix} = \int_{t_0}^{t} \varphi(t, \tau) \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{\Omega}(\tau)\mathbf{x}^d(\tau) \end{bmatrix} d\tau. \tag{8.4.12}$$

Подстановка $\varphi(t, \tau)$ дает

$$\mathbf{b}_1(t, t_0) = \int_{t_0}^{t} \varphi_{12}(t, \tau)\mathbf{\Omega}(\tau)\mathbf{x}^d(\tau)\,d\tau.$$

$$\mathbf{b}_2(t, t_0) = \int_{t_0}^{t} \varphi_{22}(t, \tau)\mathbf{\Omega}(\tau)\mathbf{x}^d(\tau)\,d\tau.$$

При незаданных терминальных условиях для $\mathbf{x}^0(t)$ $\mathbf{p}^0(t_f) = \mathbf{0}$. Поэтому

$$\mathbf{p}^0(t_f) = \varphi_{21}(t_f, t_0)\mathbf{x}^0(t_0) + \varphi_{22}(t_f, t_0)\mathbf{p}^0(t_0) + \mathbf{b}_2(t_f, t_0) = \mathbf{0}.$$

Решая относительно $\mathbf{p}^0(t_0)$, имеем

$$\mathbf{p}^0(t_0) = -\varphi_{22}^{-1}(t_f, t_0)[\varphi_{21}(t_f, t_0)\mathbf{x}^0(t_0) + \mathbf{b}_2(t_f, t_0)]. \tag{8.4.13}$$

Подстановка t вместо t_0 дает

$$\mathbf{p}^0(t) = -\varphi_{22}^{-1}(t_f, t)[\varphi_{21}(t_f, t)\mathbf{x}^0(t) + \mathbf{b}_2(t_f, t)].$$

Тогда из уравнения (8.4.2) $\mathbf{b}_2(t_f, t)$, а также

$$\varphi_{22}^{-1}(t_f, t)\varphi_{22}(t_f, \tau) = \varphi_{22}(t, \tau),$$

закон управления имеет вид

$$\mathbf{m}^0(t) = \mathbf{Z}^{-1}\mathbf{B}^T\left[\varphi_{22}^{-1}(t_f, t)\varphi_{21}(t_f, t)\mathbf{x}^0(t) + \int_{t}^{t_f} \varphi_{22}(t, \tau)\mathbf{\Omega}(\tau)\mathbf{x}^d(\tau)\,d\tau\right]. \tag{8.4.14}$$

Вызываемая им реакция $\mathbf{x}^0(t)$ может быть получена из уравнений (8.4.11) и (8.4.13).

При заданных терминальных условиях $\mathbf{x}^0(t_f) = \mathbf{x}(t_f)$ из уравнения (8.4.11) следует

$$\mathbf{x}^0(t_f) = \varphi_{11}(t_f, t_0)\mathbf{x}^0(t_0) + \varphi_{12}(t_f, t_0)\mathbf{p}^0(t_0) + \mathbf{b}_1(t_f, t_0).$$

Тогда

$$\mathbf{p}^0(t_0) = -\varphi_{12}^{-1}(t_f, t_0)[\varphi_{11}(t_f, t_0)\mathbf{x}^0(t_0) - \mathbf{x}^0(t_f) + \mathbf{b}_1(t_f, t_0)]. \quad (8.4.15)$$

Подставив t вместо t_0, используя уравнение (8.4.2), величину $\mathbf{b}_1(t_f, t)$, а также

$$\varphi_{12}^{-1}(t_f, t)\varphi_{12}(t_f, \tau) = \varphi_{12}(t, \tau),$$

получим закон терминального управления в виде

$$\mathbf{m}^0(t) = \mathbf{Z}^{-1}\mathbf{B}^T\left\{\varphi_{12}^{-1}(t_f, t)\left[\varphi_{11}(t_f, t)\mathbf{x}^0(t) - \mathbf{x}^0(t_f)\right] + \right.$$
$$\left. + \int_t^{t_f} \varphi_{12}(t, \tau)\mathbf{\Omega}(\tau)\mathbf{x}^d(\tau)\,d\tau\right\}. \quad (8.4.16)$$

Соответствующую реакцию $\mathbf{x}^0(t)$ можно найти из уравнений (8.4.11) и (8.4.15).

Читателю следует заметить, что указанные законы управления имеют вид уравнения (8.4.6), где

$$\mathbf{K} = -\varphi_{22}^{-1}(t_f, t)\varphi_{21}(t_f, t)$$

для произвольных $\mathbf{x}^0(t_f)$ и

$$\mathbf{K} = -\varphi_{12}^{-1}(t_f, t)\varphi_{11}(t_f, t)$$

для заданных $\mathbf{x}^0(t_f)$. Для нахождения закона управления требуется знание $\mathbf{x}^d$ на интервале управления «в будущем», т. е. $\mathbf{x}^d(\tau)$ при $t \leqslant \tau \leqslant t_f$. Это основное требование при оптимизации с данным критерием качества.

Пример 8.4.4. Повторно решить пример 8.4.3 во временно́й области. Пусть

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B}\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{B}^T \\ -\mathbf{\Omega} & -\mathbf{A}^T \end{bmatrix} = (-1)\left[\begin{array}{cc:cc} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \zeta_{22}^{-1} \\ \hdashline \omega_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right],$$

так что $\varphi(t, t_0) = e^{\mathbf{G}(t-t_0)}$. На основе метода Кэли — Гамильтона имеем

$$\varphi(t, t_0) = \left[\begin{array}{cc:cc} \alpha_0(t-t_0) & \alpha_1(t-t_0) & \zeta_{22}^{-1}\alpha_3(t-t_0) & -\zeta_{22}^{-1}\alpha_2(t-t_0) \\ -\omega_{11}\zeta_{22}^{-1}\alpha_3(t-t_0) & \alpha_0(t-t_0) & \zeta_{22}^{-1}\alpha_2(t-t_0) & -\zeta_{22}^{-1}\alpha_1(t-t_0) \\ \hdashline -\omega_{11}\alpha_1(t-t_0) & -\omega_{11}\alpha_2(t-t_0) & \alpha_0(t-t_0) & \omega_{11}\zeta_{22}^{-1}\alpha_3(t-t_0) \\ \omega_{11}\alpha_2(t-t_0) & \omega_{11}\alpha_3(t-t_0) & -\alpha_1(t-t_0) & \alpha_0(t-t_0) \end{array}\right],$$

где

$$\alpha_0(t) = \operatorname{sh} \alpha t \cos \alpha t,$$

$$\alpha_1(t) = \frac{\operatorname{sh} \alpha t \cos \alpha t + \operatorname{ch} \alpha t \sin \alpha t}{2\alpha},$$

$$\alpha_2(t) = \frac{\operatorname{sh} \alpha t \cdot \sin \alpha t}{2\alpha^2},$$

$$\alpha_3(t) = \frac{\operatorname{ch} \alpha t \sin \alpha t - \operatorname{sh} \alpha t \cos \alpha t}{4\alpha^3},$$

а α определяется в примере 8.4.3. Подстановка в уравнение (8.4.14), для бесконечного t_f дает

$$m_2^0(t) = -2\alpha\left[\alpha x_1^0(t) + x_2^0(t)\right],$$

что совпадает с результатом, полученным в примере 8.4.3.

Пример 8.4.5. Построить оптимальную систему управления для объекта управления, характеризуемого

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{t} x_1 + \frac{1}{t} m_1.$$

Показатель качества

$$I = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left(x_1^2 + m_1^2\right) dt,$$

а $x_1^d(t) = 0$. Конечные условия не задаются.

Согласно условиям задачи

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{BZB}^T \\ -\mathbf{\Omega} & -\mathbf{A}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t^{-1} & -t^{-2} \\ -1 & t^{-1} \end{bmatrix}.$$

Тогда составляющие $\varphi_{11}(t, t_0)$ и $\varphi_{21}(t, t_0)$ матрицы $\boldsymbol{\varphi}(t, t_0)$ должны удовлетворять

$$\varphi_{11}(t, t_0) = -\frac{1}{t} \varphi_{11}(t, t_0) - \frac{1}{t^2} \varphi_{21}(t, t_0),$$

$$\varphi_{21}(t, t_0) = -\varphi_{11}(t, t_2) + \frac{1}{t} \varphi_{21}(t, t_0).$$

Решая второе уравнение относительно $\varphi_{11}(t, t_0)$ и подставив результат в первое уравнение, получим

$$\ddot{\varphi}_{21}(t, t_0) - \frac{1}{t^2} \varphi_{21}(t, t_0) = 0.$$

Это уравнение типа Эйлера, рассмотренное в примере 2.8.2. Замена переменной $t = e^z$ дает

$$\varphi_{21}''(e^z, e^{z_0}) - \varphi_{21}'(e^z, e^{z_0}) - \varphi_{21}(e^z, e^{z_0}) = 0,$$

где «штрих» означает дифференцирование по z. Дифференциальное уравнение относительно $\varphi_{21}(e^z, e^{z_0})$ имеет решение

$$\varphi_{21}(e^z, e^{z_0}) = k_1(z_0) \exp\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} z\right) + k_2(z_0) \exp\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} z\right),$$

так что

$$\varphi_{21}(t, t_0) = c_1(t_0)\, t^{(\sqrt{5}+1)/2} + c_2(t_0)\, t^{(1-\sqrt{5})/2}.$$

Подобным же образом

$$\varphi_{11}(t, t_0) = c_1(t_0)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) t^{(\sqrt{5}-1)/2} + c_2(t_0)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) t^{-(\sqrt{5}+1)/2}.$$

Так как $\varphi_{11}(t_0, t_0) = 1$ и $\varphi_{21}(t_0, t_0) = 0$, $c_1(t_0)$ и $c_2(t_0)$ определяются в виде

$$c_1(t_0) = -\frac{1}{\sqrt{5}}\, t_0^{(1-\sqrt{5})/2},$$

$$c_2(t_0) = \frac{1}{\sqrt{5}}\, t_0^{(1+\sqrt{5})/2}.$$

Тогда

$$\varphi_{11}(t, t_0) = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{t_0}{t}\right)^{-(\sqrt{5}-1)/2} + \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{t_0}{t}\right)^{(\sqrt{5}+1)/2}$$

и

$$\varphi_{21}(t, t_0) = \frac{t_0}{\sqrt{5}}\left(\frac{t_0}{t}\right)^{(\sqrt{5}-1)/2} - \frac{t_0}{\sqrt{5}}\left(\frac{t_0}{t}\right)^{-(\sqrt{5}+1)/2}.$$

Подобным же образом

$$\varphi_{12}(t, t_0) = -\frac{t^{-1}}{\sqrt{5}}\left(\frac{t_0}{t}\right)^{-(\sqrt{5}-1)/2} + \frac{t^{-1}}{\sqrt{5}}\left(\frac{t_0}{t}\right)^{(\sqrt{5}+1)/2},$$

$$\varphi_{22}(t, t_0) = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{t_0}{t}\right)^{-(\sqrt{5}-1)/2} + \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{t_0}{t}\right)^{(\sqrt{5}+1)/2}.$$

Из уравнения (8.4.14)

$$m_1^0(t) = \frac{1}{t}\,\frac{\varphi_{21}(t_f, t)}{\varphi_{22}(t, t_f)}\, x_1^0(t).$$

Поэтому

$$m_1^0(t) = -2\left[\frac{1-(t/t_f)^{\sqrt{5}}}{(\sqrt{5}+1)+(\sqrt{5}-1)\,(t/t_f)^{\sqrt{5}}}\right] x_1^0(t).$$

Для задачи с бесконечным интервалом t_s

$$m_1^0(t) = -\frac{2}{\sqrt{5}+1}\, x_1^0(t).$$

В этом случае при нестационарном объекте параметры оптимального регулятора не зависят от времени.

Пример 8.4.6. Построить оптимальную систему для объекта управления из примера 8.4.5 при показателе качества

$$I = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} m_1^2 \, dt.$$

Терминальное условие $x_1^0(t_f) = 0$. В этом случае

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -t^{-1} & -t^{-2} \\ 0 & t^{-1} \end{bmatrix}.$$

$\varphi(t, t_0)$ является решением $\dot{\varphi}(t, t_0) = \mathbf{G}\varphi(t, t_0)$. Интегрирование этого уравнения методом разделения переменных дает

$$\varphi(t, t_0) = \begin{bmatrix} \frac{t_0}{t} & \frac{1}{t} - \frac{1}{t_0} \\ 0 & \frac{t}{t_0} \end{bmatrix}.$$

Из уравнения (8.4.16) получаем

$$m_1^0(t) = -\left[\frac{t}{t_f - t}\right] x_1^0(t).$$

Вызываемая $m_1^0(t)$ реакция, как это следует из уравнений (8.4.11) и (8.4.15), равна

$$x_1^0(t) = \frac{t_0(t_f - t)}{t(t_f - t_0)} x_1^0(t_0).$$

Данная реакция удовлетворяет терминальному условию $x_1^0(t_f) = 0$. Однако при $t > t_f$ она отлична от нуля. Этого следовало ожидать, так как эту часть реакции показатель качества не учитывает.

Хотя коэффициент усиления обратной связи при $t = t_f$ равен бесконечности, величина $m_1^0(t)$ всегда конечна. Действительно, из выражений для $m_1^0(t)$ и $x_1^0(t)$ видно, что коэффициент

$$m_1^0(t) = -\frac{t_0}{t_f - t_0} x_1^0(t_0)$$

равен постоянной величине. При бесконечном интервале t_f $m_1^0(t) = 0$. Поэтому система будет разомкнутой, а ее реакция, обусловленная начальными условиями, равна $x_1^0(t) = (t_0/t)\, x_1^0(t_0)$. Данная реакция удовлетворяет всем требованиям случая бесконечного интервала и, очевидно, соответствует минимальному значению показателя качества. Однако эта система неприемлема из-за ее низкого качества по отношению к действию паразитных возмущений.

В приведенных в этом параграфе примерах объекты управления достаточно простые. Тем не менее в ряде случаев (даже несмотря на то, что системы линейные) построение оптимальной

системы требует значительных усилий. Реальные системы нелинейные, и аналитическое конструирование оптимальных систем, по сути дела, не представляется возможным. Теория оптимизации оказывается действенной лишь совместно с вычислительными устройствами. Это рассматривается в дальнейшем.

§ 8.5. Выбор постоянных весовых коэффициентов

Из приведенных в предыдущем параграфе примеров видно, что закон управления и реакция системы в значительной степени зависят от выбора весовых коэффициентов показателя качества. Выбор этих коэффициентов представляет трудную задачу, так как взаимосвязь весовых коэффициентов и параметров оптимальной системы или ее реакцией в общем случае очень сложная. Для стационарного случая метод выбора коэффициентов функционала предложен Эллертом [16] *).

Рассмотрим, например, объект второго порядка, описываемый

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix} \mathbf{m}.$$

Показатель качества имеет такой же вид, как и в § 8.4. t_f равно бесконечности,

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \omega_{11} & 0 \\ 0 & \omega_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

В соответствии с уравнениями (8.4.5) находим закон управления

$$m_2^0(t) = -b_{22}\left[k_{21}x_1^0(t) + k_{22}x_2^0(t)\right] + b_{22}v_1^0(t), \tag{8.5.1}$$

где k определяются из уравнений

$$\begin{aligned} \omega_{22} + 2a_{22}k_{22} + 2a_{12}k_{21} - b_{22}^2k_{22}^2 &= 0, \\ \omega_{11} + 2a_{21}k_{21} + 2a_{11}k_{11} - b_{22}^2k_{21}^2 &= 0, \\ a_{21}k_{22} + a_{22}k_{21} + a_{11}k_{21} + a_{12}k_{11} - b_{22}^2k_{22}k_{21} &= 0, \end{aligned} \tag{8.5.2}$$

а v_0 определяется из

$$\begin{aligned} -\dot{v}_1^0 &= \omega_{22}x_2^d + a_{22}v_2^0 + a_{12}v_1^0 - b_{22}^2k_{22}v_2^0, \\ -\dot{v}_2^0 &= \omega_{11}x_1^d + a_{21}v_1^0 + a_{11}v_1^0 - b_{11}^2k_{21}v_2^0. \end{aligned} \tag{8.5.3}$$

---

*) См. также дополнительную литературу к данной главе. (*Прим. перев.*)

Так как замкнутая система линейная стационарная, то ее передаточная функция определяется как

$$\frac{X_1^0(s)}{V(s)} = \frac{\omega_0^2}{s^2 + z_1\omega_0 s + \omega_0^2}, \tag{8.5.4}$$

где

$$z_1\omega_0 = b_{22}^2 k_{22} - a_{11} - a_{22},$$

$$\omega_0^2 = a_{11}(a_{22} - b_{22}^2 k_{22}) + a_{12}(b_{22}^2 k_{21} - a_{21}),$$

$$V(s) = \frac{a_{12} b_{22}^2}{\omega_0^2} V_1(s),$$

а $V_1(s)$ — преобразование Лапласа входного сигнала системы.

При этих обозначениях k_{22} и k_{21} можно записать как

$$\begin{aligned} k_{22} &= \frac{1}{b_{22}^2}(z_1\omega_0 + a_{11} + a_{22}), \\ k_{21} &= \frac{1}{a_{21} b_{22}^2}(\omega_0^2 + a_{11} z_1 \omega_0 + a_{12} a_{21} + a_{11}^2). \end{aligned} \tag{8.5.5}$$

Из уравнений (8.5.2) и (8.5.5) следует, что

$$\begin{aligned} \omega_{11} = \frac{1}{a_{12}^2 b_{22}^2}\big[&\omega_0^4 + 3a_{11} z_1 \omega_0^3 + a_{11}^2(3z_1^2 + 2)\omega_0^2 + 4a_{11}^3 z_1 \omega_0 + \\ &+ (2a_{11} a_{12} a_{21} a_{22} + 2a_{11}^2 a_{12} a_{21} + a_{12}^2 a_{21}^2 + a_{11}^4)\big], \\ \omega_{22} = \frac{1}{b_{22}^2}\big[&(z_1^2 - 2)\omega_0^2 - a_{11}^2 - a_{22}^2 - 2a_{12} a_{21}\big]. \end{aligned} \tag{8.5.6}$$

При выбранных величинах z_1 и ω_0 эти выражения определяют ω_{11} и ω_{22}.

Согласно процедуре Эллерта выбор z_1 обеспечивает требуемую степень устойчивости системы при условии, что ни одна из переменных системы не превышает заданных пределов.

ω_0 выбирается в соответствии с требуемой полосой пропускания системы или ограничениями на $m_2(t)$. Взаимосвязь $m_2(t)$ и ω_0 получается из подстановки уравнения (8.5.5) в (8.5.1):

$$\begin{aligned} m_2(t) = -\frac{1}{b_{22}}\Big\{&\frac{\omega_0^2}{a_{12}} x_1(t) + \left[\frac{a_{11}}{a_{12}} x_1(t) + x_2(t)\right] z_1\omega_0 + \\ &+ \left(\frac{a_{11}^2}{a_{12}} + a_{21}\right) x_1(t) + (a_{11} + a_{22}) x_2(t)\Big\} + b_{22} v_1(t). \end{aligned} \tag{8.5.7}$$

Уравнение (8.5.7) можно разрешить относительно ω_0 при подстановке в него максимально допустимой величины $m_2(t)$, «наихудших» $x_1(t)$, $x_2(t)$ и $v_1(t)$ из решения уравнения (8.5.3).

После определения z_1 и ω_0 весовые коэффициенты ω_{11} и ω_{22} задаются уравнением (8.5.6). Для выпуклости показателя качества *) ω_{11} и ω_{22} должны быть неотрицательными. В сущности, это требование служит проверкой непротиворечивости требований проектирования в предположении правомерности выбора квадратичного показателя качества с постоянными весовыми коэффициентами [16].

Таблица 8.5.1

Тип системы		Стандартные формы	Максимальная величина перерегулирования (в процентах)
Нулевая позиционная ошибка	(*a*)	$s^2+1{,}4\omega_0 s+\omega_0^2$	5
	(*b*)	$s^3+2\omega_0 s^2+2\omega_0^2 s+\omega_0^3$	8
	(*c*)	$s^4+2{,}6\omega_0 s^3+3{,}4\omega_0^2 s^2+2{,}6\omega_0^3 s+\omega_0^4$	10
Нулевая скоростная ошибка	(*d*)	$s^2+2{,}5\omega_0 s+\omega_0^2$	10
	(*e*)	$s^3+5{,}1\omega_0 s^2+6{,}3\omega_0^2 s+\omega_0^3$	10
	(*f*)	$s^4+7{,}2\omega_0 s^3+1{,}6\omega_0^2 s^2+12\omega_0^3 s+\omega_0^4$	10
	(*g*)	$s^5+9\omega_0 s^4+29\omega_0^2 s^3+38\omega_0^3 s^2+18\omega_0^4 s+\omega_0^5$	10
	(*h*)	$s^6+11\omega_0 s^5+43\omega_0^2 s^4+83\omega_0^3 s^3+$ $+73\omega_0^4 s^2+25\omega_0^5 s+\omega_0^6$	10
Нулевая ошибка по ускорению	(*i*)	$s^3+6{,}7\omega_0 s^2+6{,}7\omega_0^2 s+\omega_0^3$	10
	(*j*)	$s^4+7{,}9\omega_0 s^3+15\omega_0^2 s^2+7{,}9\omega_0^3 s+\omega_0^4$	20
	(*k*)	$s^5+18\omega_0 s^4+69\omega_0^2 s^3+69\omega_0^3 s^2+$ $+18\omega_0^4 s+\omega_0^5$	20
	(*l*)	$s^6+36\omega_0 s^5+251\omega_0^2 s^4+485\omega_0^3 s^3+$ $+251\omega_0^4 s^2+36\omega_0^5 s+\omega_0^6$	20

Для объектов уравнения более высокого порядка уравнение (8.5.4) принимает вид

$$\frac{X_1(s)}{V(s)}=\frac{N(s)}{s^n+z_{n-1}\omega_0 s^{n-1}+\ldots+z_1\omega_0^{n-1}s+\omega_0^n}, \tag{8.5.8}$$

где

$$N(s)=\omega_0^n,$$
$$N(s)=z_1\omega_0^{n-1}s+\omega_0^n$$

*) Имеется в виду выпуклость функционала качества. (*Прим. перев.*)

или

$$N(s) = z_2\omega_0^{n-2}s^2 + z_1\omega_0^{n-1}s + \omega_0^n$$

соответственно для систем первого, второго и третьего типа, т. е. систем соответственно с нулевой установившейся ошибкой при

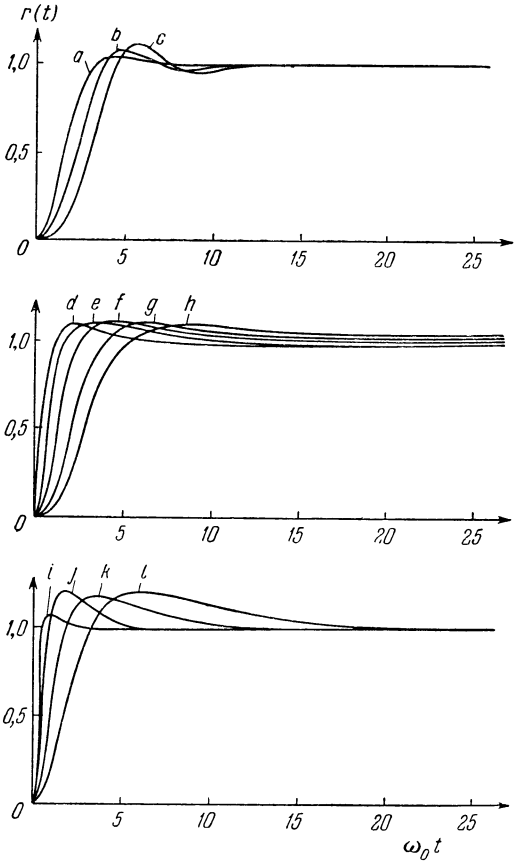


Рис. 8.5.1.

единичном ступенчатом входном сигнале, единичном линейно нарастающем входном сигнале и т. д. Предложенная Эллертом процедура выбора весовых коэффициентов показателя качества применима и для этих случаев, если z_i $(i=1, 2, \ldots, n-1)$ можно определить за небольшое число пробных шагов. Критерий выбора z_i с целью получения надлежащей реакции описан в литературе. Действительно, существуют табулированные числен-

ные значения z_i, называемые стандартными формами [6, 10, 22]. В таблице 8.5.1 приведены стандартные формы характеристического уравнения Уайтли [22]. Соответствующие временные характеристики показаны на рис. 8.5.1. Так как передаточной функцией типа (8.5.8) обладают многие реальные системы управления, то для определения весовых коэффициентов, удовлетворяющих «объективным» требованиям проектирования, можно использовать стандартные формы Уайтли совместно с процедурой Эллерта *).

Такие «объективные» требования проектирования, как ограничения на сигналы управления или переменные состояния, следует учитывать иным образом. Это рассматривается в следующем параграфе.

§ 8.6. Штрафные функции

Особенности проектирования большинства систем управления требуют, чтобы ряд переменных ограничивался заданными предельными величинами. Подобные ограничения могут быть обусловлены насыщением параметров объекта или связаны с условиями функционирования системы. Например, задаваемая максимально допустимая температура плавления носовой части космического аппарата при входе в плотные слои атмосферы составляет часто 3500° по Фаренгейту. Указанные температурные ограничения являются «жесткими» ограничениями в том смысле, что данная величина не должна превышаться. Часто задаются как «жесткие», так и «нежесткие» ограничения, но большинство встречающихся на практике ограничений являются в действительности нежесткими. Так, температура 3600° по всей вероятности также приемлема, так как подобные цифры включают в себя обычно факторы безопасности. Ни одно проектирование или последующее конструирование не являются точными, ни одна процедура проектирования не может учесть случайные факторы, связанные с окончательным функционированием системы. Хотя жесткие ограничения полезны с точки зрения математики (в идейном плане), обычно они не существуют физически. Более того, жесткие ограничения вызывают значительные трудности при численном решении оптимальных задач и при построении регуляторов **). В связи с этим ограничения учитываются здесь

*) С подобным подходом вряд ли можно согласиться. Выбор коэффициентов показателя качества не самоцель. Именно он и определяет z_i, а значит, и параметры регулятора. *(Прим. ред.)*

**) С утверждением авторов о нереальности жестких ограничений нельзя согласиться. Примерами служат ограничения на перемещения различных органов [17]. *(Прим. ред.)*

посредством штрафных функций. Жесткое ограничение достигается путем более «сурового» штрафа.

Штрафной функцией является составляющая показателя качества, увеличивающая его величину при стремлении переменных к их граничным значениям. Например, штрафными функциями служат второй и четвертый члены уравнения (8.2.2). В литературе предложено много других штрафных функций [23—25].

Весовые коэффициенты в первом и третьем членах уравнения (8.2.2) выбираются с целью удовлетворения «объективным» требованиям проектирования. Это обсуждалось в предыдущем параграфе. При выбранных весовых коэффициентах можно выбирать штрафные функции, удовлетворяющие данным ограничениям. Если это выполнено, то реакция системы удовлетворяет устойчивости и требованиям к скорости переходного процесса при условии, что ни одна из переменных не принимает своих предельных значений. Более того, при «попытке превысить эти предельные значения» переменные надлежащим образом ограничиваются. Указанное является идейной основой процедуры Эллерта.

Введение в показатель качества штрафных функций, отличных от квадратических, делает задачу оптимизации нелинейной даже при линейном объекте управления *). По этой причине для решения практических задач оптимизации необходимы в общем случае вычислительные устройства. Вычислительные методы решения оптимальных задач рассматриваются в следующем параграфе.

§ 8.7. Итерация граничных условий

Как указывалось в § 8.3, 8.4, решение уравнения (8.3.12) сводится к решению двухточечной краевой задачи. Одновременное решение уравнений $\dot{\mathbf{x}}$ и $\dot{\mathbf{p}}$ в «прямом времени» не представляется возможным, если точно не известны граничные условия $\mathbf{p}(t_0)$. Подобная проблема возникает и при попытке решить эти уравнения в «обратном времени».

Один из возможных подходов состоит в предположении существования множества значений $\mathbf{p}(t_0)$, обозначаемого $\mathbf{p}^1(t_0)$. Индекс «1» используется для указания первого выбора $p(t_0)$. Эти

*) Для этого случая по-прежнему справедливо первое из примечаний § 8.4, если термины «положительно полуопределенный» и «положительно определенный» заменить соответственно «выпуклым и дифференцируемым» и «строго выпуклым и дифференцируемым» [25]. Конечно, теперь эти термины применимы не к $\mathbf{\Omega}$ и $\mathbf{Z}$, а к соответствующим членам подынтегрального выражения f_0 уравнения (8.3.2).

n условий совместно с n условиями $\mathbf{x}^0(t_0)=\mathbf{x}(t_0)$ достаточны для решения уравнения (8.3.12) и нахождения $\mathbf{x}^1(t)$ и $\mathbf{p}^1(t)$. Вычисленные значения $\mathbf{p}^1(t_f)$ или $\mathbf{x}^1(t_f)$, в зависимости от рассматриваемого случая, можно затем сравнить с надлежащими значениями, определяемыми терминальными граничными условиями. Если эти два множества значений совпадают (это было бы счастливой удачей), то $\mathbf{p}^1(t)=\mathbf{p}^0(t)$ и $\mathbf{x}^1(t)=\mathbf{x}^0(t)$ — и задача решена. Однако в общем случае эти значения различны. При линейных уравнениях $\dot{\mathbf{x}}$ и $\dot{\mathbf{p}}$ можно использовать суперпозицию для непосредственного выбора $\mathbf{p}^1(t_0)$ так, чтобы удовлетворялись терминальные граничные условия, что, следовательно, сразу же приводит к оптимальному решению. В более общем случае следует выбрать скорректированные значения $\mathbf{p}(t_0)$, а именно, $\mathbf{p}^2(t_0)$, и уравнения решаются снова. Процесс вычислений повторяется до тех пор, пока не будут удовлетворяться с приемлемой степенью точности граничные условия. Этот метод называется *итерацией* граничных условий.

Для построения итераций граничных условий ряд методов предложили Мэрриам, Нейштадт, Щармэк и Спэйер [25—28]. Например, можно сформулировать задачу спуска так, чтобы оптимуму соответствовало $\mathbf{p}^n(t_f)=\mathbf{p}^0(t_f)$. Поэтому можно использовать вычислительные алгоритмы градиентных методов.

В общем случае существуют две важные проблемы, связанные с методами итерации граничных условий. Первая, как следует из уравнения (8.4.8) для линейного случая, состоит в том, что решаемые дифференциальные уравнения неустойчивые. Поэтому их решение чрезвычайно чувствительно к ошибкам, обусловленным выбранными начальными условиями и процедурой вычислений. Чувствительность обычно возрастает по мере достижения оптимума, так как при этом возрастает скорость реакции системы и, следовательно, скорость реакции неустойчивых сопряженных уравнений*). Вторая проблема заключается в том, что для получения численных значений управляющих воздействий следует решить второе из уравнений (8.3.12) на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant t_f$. Так как зачастую это нелинейное алгебраическое уравнение или даже трансцендентное, то его решение может оказаться затруднительным.

Недостатки методов итераций граничных условий частично сглаживаются тем, что они требуют меньшей памяти вычислительной машины, чем другие рассматриваемые здесь методы. Существенной может оказаться и сравнительная простота программы вычислений, например, в случае оптимизации времени движения.

---

*) Предполагается устойчивость уравнений объекта. (*Прим. перев.*)

§ 8.8. Динамическое программирование

Динамическое программирование (в дискретном варианте) представляет второй способ решения двухточечной краевой задачи. В данном методе n переменных состояния и время квантуются, образуя в $(n+1)$-мерном $\mathbf{x}t$ пространстве сетку. Для объекта первого порядка это иллюстрируется на рис. 8.8.1. Абсциссой служат квантованные значения времени, отсчитываемые от начального момента t_0 до конечного t_f. Время «течет» от

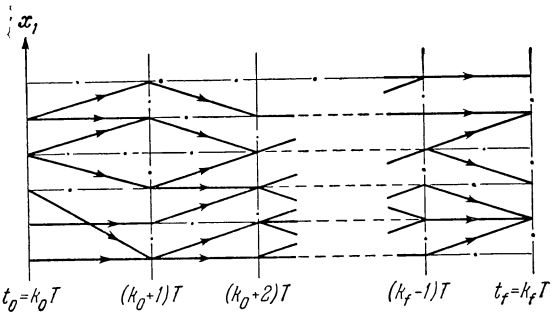


Рис. 8.8.1.

t_0 к t_f. Ординатой служат квантованные значения x_1. Ввиду того, что задача дискретная, существенны лишь значения x_1 и времени в точках пересечения штрих-пунктирных линий. Эти точки называются *узлами*, а толстые линии со стрелками означают допустимые переходы x_1 из одного узла в другой.

Дискретной формой уравнения (8.3.2) является показатель

$$I^* = T \sum_{k=k_0}^{k_f} f_0 [\mathbf{x}(k), \mathbf{m}(k), k]. \tag{8.8.1}$$

Величина f_0 на интервале от $k=k_j$ до $k=k_f$ определяется $\mathbf{x}(k_j)$ состоянием объекта управления при $k=k_j$ и управляющим воздействием $\mathbf{m}(k)$ при $k_j \leqslant k \leqslant k_f$. Таким образом, показатель качества на интервале $k_j \leqslant k \leqslant k_f$ определяется $\mathbf{x}(k_j)$ и $\mathbf{m}(k)$, а также $k_f - k_j$. В предположении, что k_f равна постоянной величине, эта зависимость от $\mathbf{x}(k_j)$, $\mathbf{m}(k)$ и k_j выражается посредством

$$R[\mathbf{x}(k_j), \mathbf{m}(k), k_j] = T \sum_{k=k_j}^{k_f} f_0 [\mathbf{x}(k), \mathbf{m}(k), k],$$

где $R[\mathbf{x}(k_j), \mathbf{m}(k), k_j]$ обозначает часть I^*, соответствующую $k_j \leqslant k \leqslant k_f$.

Определяя *политику* как какое-либо правило принятия решений, приводящее к допустимой последовательности решений, *принцип оптимальности* Беллмана можно сформулировать так: «Оптимальная политика обладает таким свойством, что вне зависимости от начального состояния и начального решения все последующие решения должны составлять оптимальную политику по отношению к состоянию, полученному в результате первоначального решения». В сущности, это очевидное утверждение того, что если I^* минимизируется выбором $\mathbf{m}(k)$, то часть I^*, обозначаемая через R, должна быть минимальной. Более того, принцип оптимальности утверждает, что если R минимизируется выбранной последовательностью $\mathbf{m}(k)$, $k_j \leqslant k \leqslant k_f$, то оптимальная последовательность $\mathbf{m}^0(k)$ является функцией состояний $\mathbf{x}(k_j)$. Состояние объекта управления в момент $k=k_j$ определяет $m^0(k)$ на интервале $k_j \leqslant k \leqslant k_f$. Данная функциональная зависимость может быть выражена в виде $\mathbf{m}^0(k)=\mathbf{g}_k[\mathbf{x}(k_j)]$. Поэтому минимальное значение R является функцией лишь состояния объекта управления в момент k_j, а также и самого k_j. Тогда

$$R^0[\mathbf{x}(k_j),\ k_j]=\min_{\mathbf{m}(k)} \sum_{k=k_j}^{k_f} Tf_0[\mathbf{x}(k),\ \mathbf{m}(k),\ k]. \qquad (8.8.2)$$

Символ перед знаком суммирования указывает на то, что выбранные $m(k)$ должны минимизировать сумму на интервале $k_j \leqslant k \leqslant k_f$.

Очевидно, что при $k_j=k_f$, $R^0[\mathbf{x}(k_f), k_f]=0$. Выбрав это граничное условие за исходное, можно воспользоваться уравнением (8.8.2) для вычисления $\mathbf{m}^0(k)$ при попятном движении от $k=k_f$ к $k=k_0$ и определить минимальное значение показателя качества. В результате вычислений получаем $m^0(t)$ и соответствующие $\mathbf{x}^0(t)$ от каждого из узлов пространства $\mathbf{x}t$ до узлов t_f. Поэтому решение двухточечной краевой задачи определяется не для одного-единственного, а для множества начальных условий. Исходная задача «погружена» в множество подобных задач.

К сожалению, для вычисления $R^0[\mathbf{x}(k_f-i), k_f-i]$ для каждого узла в момент времени t_f-iT необходимо временно хранить в вычислительной машине $R^0[\mathbf{x}(k_f-i+1), k_f-i+1]$ в каждом из узлов при $t_f-(i-1)T$. Требуемая оперативная память вычислительной машины при сетке «номинальных» размеров оказывается очень большой. В действительности порядок объекта управления должен быть меньше трех, чтобы избежать переполнения памяти машины IBM-704 в тридцать две тысячи слов.

Предложено несколько методов решения задач динамического программирования, уменьшающих чрезмерные требования к памяти машины [30, 31]. В одном из подходов для начального

решения используется «направляющая сетка». Последующее решение использует при нахождении оптимума меньшую область пространства $\mathbf{x}t$, выделенную первоначальным решением.

В другом методе минимальное значение показателя качества в заданный момент времени аппроксимируется рядом ортогональных функций. Поэтому вместо R^0 в памяти хранятся коэффициенты ряда. Однако и этим методам присущи определенные трудности.

Прежде чем рассматривать другие вычисительные методы решения задач оптимизации, интересно отметить, что уравнение (8.3.12) можно получить при помощи динамического программирования. Так как при произвольных k_j $R^0[\mathbf{x}(k_j), k_j]$ равно постоянной величине, то уравнение (8.8.2) можно записать в виде

$$\min_{\mathbf{m}(k)} \left\{ Tf_0[\mathbf{x}(k_j), \mathbf{m}(k_j), k_j] + T \sum_{k=k_j+1}^{k_f} f_0[\mathbf{x}(k), \mathbf{m}(k), k] - \right.$$
$$\left. - R^0[\mathbf{x}(k_j), k_j] \right\} = 0.$$

Это эквивалентно

$$\min_{\mathbf{m}(k)} \left\{ f_0[\mathbf{x}(k_j), \mathbf{m}(k_j), k_j] + \frac{R^0[\mathbf{x}(k_{j+1}), k_{j+1}] - R^0[\mathbf{x}(k_j), k_j]}{T} \right\} = 0.$$

В результате предельного перехода при стремлении T к нулю определим непрерывный аналог уравнения Беллмана*)

$$\left\{ f_0[\mathbf{x}^0(\tau), \mathbf{m}^0(\tau), \tau] + \frac{dI^0[\mathbf{x}^0(\tau), \tau]}{d\tau} \right\} = 0,$$

где $t_0 \leqslant \tau \leqslant t_f$, а I^0 — минимальное значение показателя качества. Полную производную по времени можно выразить через частные производные; с учетом первого из уравнений (8.3.1) это выражение примет вид

$$f_0[\mathbf{x}^0, \mathbf{m}^0, \tau] + \frac{\partial I^0}{\partial \tau} + \langle \mathbf{grad}_{\mathbf{x}^0} I^0, \mathbf{f} \rangle = 0.$$

Данное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка относительно зависимой переменной I^0 называется уравнением Гамильтона — Якоби. Определяя $p_k^0(\tau) = \partial I^0/\partial x_k^0$, можно записать уравнение Гамильтона — Якоби как

$$\frac{\partial I_0}{\partial \tau} + H(\mathbf{x}^0, \mathbf{m}^0, \mathbf{p}^0, \tau) = 0.$$

Решение этого уравнения методом характеристик приводит, как указывалось выше, к уравнению (8.3.12) [25].

---

*) Это справедливо лишь при ряде ограничений (см. дополнительную литературу [1]). (*Прим. перев.*)

§ 8.9. Итерация управляющих воздействий

Причина, по которой рассматриваемая двухточечная краевая задача в общем случае не может быть разделена и решена как две одноточечные краевые задачи, состоит в том, что уравнения $\dot{\mathbf{x}}^0$ и $\dot{\mathbf{p}}^0$ связаны между собой выражением для $\mathbf{m}^0$. Однако, если не использовать уравнение Понтрягина для $\mathbf{m}^0$, а вместо этого определять $\mathbf{m}$ посредством итераций, то эти уравнения будут несвязанными. В этом состоит основа методов Келли и Брайсона [32, 33]. Указанная процедура *итерации управляющих воздействий* сходится к оптимальному управлению $\mathbf{m}^0$, удовлетворяющему уравнениям Понтрягина, для множества линейных и нелинейных задач. Данный метод наиболее эффективен для решения задач нахождения траекторий — применительно к разомкнутым системам управления.

Первый этап процедуры итераций управляющих воздействий состоит в выборе допустимого $\mathbf{m}^1(t)$ и интегрировании уравнений $\dot{\mathbf{x}}$ от t_0 до t для нахождения $x^1(t)$. Величины $\mathbf{m}^1(t)$ и $\mathbf{x}^1(t)$ хранятся в памяти машины. При этом также вычисляется и хранится в памяти соответствующее значение видоизмененного показателя качества I_c^1 в соответствии с уравнением (8.3.3).

Затем решаются сопряженные уравнения $\dot{\mathbf{p}}$ при попятном движении от t_f к t_0. В этих уравнениях в общем случае фигурируют хранившиеся в памяти величины $x_1(t)$, которые и используются для вычислений. При этом рассматривается эффект, вызываемый изменениями $\mathbf{m}^1(t)$, с целью определения новых управляющих воздействий $\mathbf{m}^2(t)$ для нового этапа вычислений. Результат этих изменений можно определить, полагая для $(i+1)$-й итерации

$$\delta\mathbf{m}^i = \mathbf{m}^{i+1} - \mathbf{m}^i.$$

Тогда соответствующее изменение переменных состояния равно

$$\delta\mathbf{x}^i = \mathbf{x}^{i+1} - \mathbf{x}^i.$$

Это вызывает изменение видоизмененного показателя качества $\delta I_c^i = I_c^{i+1} - I_c^i$. В предположении минимизации I_c указанная итерационная процедура сходится, если $\delta I_c^i < 0$. Процедура продолжается до тех пор, пока δI_c^i и (или) $\delta\mathbf{m}^i$ не будут пренебрежимо малыми величинами.

Найдем алгоритм вычисления $\delta\mathbf{m}^i$. Приводимый здесь вывод следует Мэрриаму [25]. Из уравнения (8.3.3)

$$I_c^{i+1} = \int_{t_0}^{t_f} \left[f_0^{i+1} + \langle \mathbf{p}^{i+1},\ \mathbf{f}^{i+1} - \dot{\mathbf{x}}^{i+1}\rangle\right] dt.$$

Подстановка

$$f_0^{i+1} = f_0^i + \delta f_0^i,$$
$$\mathbf{p}^{i+1} = \mathbf{p}^i + \delta \mathbf{p}^i,$$
$$\mathbf{f}^{i+1} = \mathbf{f}^i + \delta \mathbf{f}^i,$$
$$\dot{\mathbf{x}}^{i+1} = \dot{\mathbf{x}}^i + \delta \dot{\mathbf{x}}^i$$

приводит к

$$I_c^{i+1} = \int_{t_0}^{t_f} \{[f_0^i + \langle \mathbf{p}^i, \mathbf{f}^i - \dot{\mathbf{x}}^i \rangle] + \delta f_0^i + \langle \mathbf{p}^i, \delta \mathbf{f}^i \rangle + \\ + \langle \delta \mathbf{p}^i, \delta \mathbf{f}^i \rangle - \langle \mathbf{p}^i, \delta \dot{\mathbf{x}}^i \rangle - \langle \delta \mathbf{p}^i, \delta \dot{\mathbf{x}}^i \rangle + \langle \delta \mathbf{p}^i, \mathbf{f}^i - \dot{\mathbf{x}}^i \rangle\} \, dt.$$

Первый член этого интеграла дает I_c^i, последний равен нулю (при использовании первого из уравнений (8.3.1) применительно к i-итерации). Поэтому

$$I_c^{i+1} = I_c^i + \int_{t_0}^{t_f} [\delta f_0^i + \langle \mathbf{p}^i, \delta \mathbf{f}^i \rangle + \langle \delta \mathbf{p}^i, \delta \mathbf{f}^i \rangle - \langle \mathbf{p}^i, \delta \dot{\mathbf{x}}^i \rangle - \langle \delta \mathbf{p}^i, \delta \dot{\mathbf{x}}^i \rangle] \, dt. \tag{8.9.1}$$

Раскладывая f_0^{i+1}, $\mathbf{p}^{i+1}$ и $\mathbf{f}^{i+1}$ в ряд Тейлора относительно их значений в предыдущей итерации, имеем

$$\delta f_0^i = f_0^{i+1} - f_0^i = \langle \mathbf{grad}_{\mathbf{x}^i} f_0^i, \delta \mathbf{x}^i \rangle + \langle \mathbf{grad}_{\mathbf{m}^i} f_0^i, \delta \mathbf{m}^i \rangle + \ldots,$$
$$\delta \mathbf{p}^i = \mathbf{p}^{i+1} - \mathbf{p}^i = \mathbf{P}(\mathbf{x}^i) \delta \mathbf{x}^i + \mathbf{P}(\mathbf{m}^i) \delta \mathbf{m}^i + \ldots,$$
$$\delta \mathbf{f}^i = \mathbf{f}^{i+1} - \mathbf{f}^i = \mathbf{F}(\mathbf{x}^i) \delta \mathbf{x}^i + \mathbf{F}(\mathbf{m}^i) \delta \mathbf{m}^i + \ldots,$$

где $\mathbf{F}(\mathbf{x}^i)$ — якобиан (7.4.4) при $\mathbf{f} = \mathbf{f}^i$ и $\mathbf{x} = \mathbf{x}^i$, т. е. для i-й итерации. $\mathbf{F}(\mathbf{m}^i)$ — соответствующая матрица при замене $\mathbf{x}^i$ на $\mathbf{m}^i$. $\mathbf{P}(\mathbf{x}^i)$ и $\mathbf{P}(\mathbf{m}^i)$ — матрицы, соответствующие $\mathbf{F}(\mathbf{x}^i)$ и $\mathbf{F}(\mathbf{m}^i)$ при замене $\mathbf{f}$ на $\mathbf{p}$. Подстановка разложенных в ряд величин в уравнение (8.9.1), пренебрегая членами $\delta \mathbf{m}^i$ и $\delta \mathbf{x}^i$ выше первого порядка, приводит к

$$I_c^{i+1} = I_c^i + \int_{t_c}^{t_f} \{\langle \mathbf{s}^i, \delta \mathbf{m}^i \rangle - \langle \mathbf{p}^i, \delta \dot{\mathbf{x}}^i \rangle + \\ + \langle \mathbf{grad}_{\mathbf{x}^i} f_0^i, \delta \mathbf{x}^i \rangle + \langle \mathbf{p}^i, \mathbf{F}(\mathbf{x}^i) \delta \mathbf{x}^i \rangle\} \, dt,$$

где

$$\mathbf{s}^i = \mathbf{grad}_{\mathbf{m}^i} f_0^i + \mathbf{F}^T(\mathbf{m}^i) \mathbf{p}^i = \mathbf{grad}_{\mathbf{m}^i} H^i. \tag{8.9.2}$$

Из уравнений (8.3.11) и (8.3.12) имеем

$$-\dot{\mathbf{p}}^i = \mathbf{grad}_{\mathbf{x}^i} f_0^i + \mathbf{F}^T(\mathbf{x}^i)\,\mathbf{p}^i. \tag{8.9.3}$$

Тогда I_c^{i+1} принимает вид

$$I_c^{i+1} = I_c^i + \int_{t_0}^{t_f} \{\langle \mathbf{s}^i, \delta\mathbf{m}^i - [\langle \mathbf{p}^i, \delta\dot{\mathbf{x}}^i\rangle + \langle \dot{\mathbf{p}}^i, \delta\mathbf{x}^i\rangle]\}\, dt.$$

Подынтегральное выражение в скобках равно $(d/dt)\langle \mathbf{p}^i, \delta\mathbf{x}^i\rangle$. Так как $\delta\mathbf{x}^i(t_0)$ должно равняться нулю и так как должны быть равны нулю либо $\mathbf{p}^i(t_f)$, либо $\delta\mathbf{x}^i(t_f)$, то в результате интегрирования выражения в скобках получим нуль. Поэтому

$$I_c^{i+1} = I_c^i + \int_{t_0}^{t_f} \langle \mathbf{s}^i, \delta\mathbf{m}^i\rangle\, dt. \tag{8.9.4}$$

Алгоритм определения $\mathbf{m}^{i+1}$ основывается на требовании отрицательности или, возможно, равенства нулю δI_c. Нулевое значение возможно только в том случае, если $\mathbf{s}^i$ равно нулю. Один из возможных выборов $\delta\mathbf{m}^i$ задается посредством $\delta m_j^i = -|\beta_j^i|\operatorname{sgn} s_j^i$, где β_j^i еще подлежат определению.

Так как уравнение (8.9.4) лишь приближенное, то для обеспечения справедливости аппроксимации, проводимой при его выводе, следует ограничивать величины $\delta\mathbf{m}^i$. Однако для быстрой сходимости итерационного процесса $\delta\mathbf{m}^i$ должны быть как можно большими. Одним из возможных значений β_j^i служит $\beta_j^i = \eta + \text{const}$. Логика вычислительной машины может выбираться так, чтобы η удовлетворительно справлялась с противоречивыми требованиями быстроты сходимости и сходимости как таковой. Мэрриам предлагает другие возможные β_j^i [25].

Итерация управляющих воздействий представляет собой в некотором смысле компромисс между итерацией граничных условий и динамическим программированием (в дискретной форме). При итерации управляющих воздействий уравнения двухточечной краевой задачи развязаны, так что для устойчивого объекта управления решаются устойчивые системы дифференциальных уравнений при «прямом» и «обратном» течении времени. Более того, требования к памяти в этом случае лежат между соответствующими для итерации граничных условий и динамического программирования (в дискретной форме).

Наиболее серьезный недостаток метода итерации управляющих воздействий состоит в выборе β_j^i. Часто определению

подходящих значений β_j^i предшествует множество неудачных вычислений *).

Следует также указать, что алгоритм приращения управляющих воздействий игнорирует тот факт, что при изменении $\mathbf{x}$ и $\mathbf{p}$ изменяется форма поверхности, на которой лежит оптимальное значение гамильтониана H. Это уменьшает скорость сходимости и вносит трудности в определение β_j^i.

§ 8.10. Итерация закона управления [25]

Путем искусных построений, подобных приведенным в предыдущем параграфе, но только значительно сложнее, Мэрриам получил алгоритмы, которые включают члены первого приближения, учитывающие изменение формы поверхности, содержащей H^0. Это приводит к чрезвычайно быстрой сходимости процедуры вычислений, если $\mathbf{x}^i$ находится в соответствующей окрестности оптимальной траектории. Более того, предложенный Мэрриамом метод непосредственно приводит к системе с обратной связью, в то время как метод итерации управляющих воздействий соответствует разомкнутому управлению. Регулятор системы представляет собой линейную аппроксимацию оптимального нелинейного регулятора; он оптимален в указанной выше окрестности.

В методе *итерации закона управления* также используется уравнение (8.9.1), в которое снова подставляются разложения в ряд Тейлора f_0^{i+1}, $\mathbf{p}^{i+1}$ и $\mathbf{f}^{i+1}$. Однако в этом случае учитываются члены $\delta\mathbf{m}^i$ и $\delta\mathbf{x}^i$ второго порядка малости. Мэрриам показывает, что в результате приходим к уравнению $I_c^{i+1} = I_c^i + v^i$, аналогичному (8.9.4), где

$$v^i = \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{1}{2}\langle \delta\mathbf{m}^i,\ \mathbf{T}^i\,\delta\mathbf{m}^i\rangle + \langle \delta\mathbf{m}^i,\ \mathbf{s}^i + \mathbf{R}^i\,\delta\mathbf{x}^i\rangle + \frac{1}{2}\langle \mathbf{K}^i\,\delta\mathbf{x}^i,\ \mathbf{R}^i\,\delta\mathbf{x}^i\rangle\right]. \tag{8.10.1}$$

s^i определяется уравнением (8.9.2), а

$$\mathbf{T}^i = \mathbf{grad}_{\mathbf{m}^i}\langle \mathbf{grad}_{\mathbf{m}^i} f_0^i + \mathbf{grad}_{\mathbf{m}^i}\rangle \langle \mathbf{F}^T(\mathbf{m}^i)\,\mathbf{p}^i, \tag{8.10.2}$$

$$\mathbf{R}^i = \mathbf{grad}_{\mathbf{m}^i}\langle \mathbf{grad}_{\mathbf{x}^i} f_0^i + \mathbf{grad}_{\mathbf{m}^i}\rangle \langle \mathbf{F}^T(\mathbf{x}^i)\,\mathbf{p}^i + \mathbf{F}^T(\mathbf{m}^i)\,\mathbf{P}(\mathbf{x}^i).$$

$\mathbf{K}^i$ определяется из $\mathbf{T}^i\mathbf{K}^i = \mathbf{R}^i$. Элементы $k_{ij} = -\dfrac{\partial m_i^i}{\partial x_j^i}$ матрицы $\mathbf{K}^i$ являются коэффициентами усиления обратной связи при линей-

*) Весьма эффективные алгоритмы рассмотрены в [2] (дополнительная литература). (*Прим. перев.*)

ной аппроксимации нелинейного оптимального закона управления. В соответствии с этими определениями уравнение (8.9.3) можно записать как

$$-\dot{\mathbf{p}}^i = -(\mathbf{R}^i)^T \mathbf{u}^i + \mathbf{grad}_{\mathbf{x}^i} f_0^i - (\mathbf{K}^i)^T \mathbf{grad}_{\mathbf{m}^i} f_0^i + [\mathbf{F}(\mathbf{x}^i) - \mathbf{F}(\mathbf{m}^i)\mathbf{K}^i]^T \mathbf{p}^i, \tag{8.10.3}$$

где $\mathbf{u}^i$ определяется из $\mathbf{T}^i\mathbf{u}^i = -\mathbf{s}^i$. В связи с рассмотрением второй вариации требуется дополнительное соотношение

$$-\dot{\mathbf{P}}(\mathbf{x}^i) = \mathbf{grad}_{\mathbf{x}^i}\langle \mathbf{grad}_{\mathbf{x}^i} f_0^i + \mathbf{grad}_{\mathbf{x}^i}\rangle \langle \mathbf{F}^T(\mathbf{x}^i)\mathbf{p}^i + \\ + \mathbf{F}^T(\mathbf{x}^i)\mathbf{P}(\mathbf{x}^i) + \mathbf{P}^T(\mathbf{x}^i)\mathbf{F}(\mathbf{x}^i) - (\mathbf{R}^i)^T\mathbf{K}^i, \tag{8.10.4}$$

подчиненное граничному условию $\mathbf{P}(\mathbf{x}^i)|^{t=t_f} = [0]$.

Если $\delta\mathbf{m}^i$ выбираются таким образом, что справедлива аппроксимация, приводящая к выражению для I_c^{i+1}, и при этом v_i отрицательны, то итерации сходятся к $\mathbf{m}^0$. Однако из-за сложности выражения для v^i алгоритм вычислений неочевиден. Мэрриам показал, что наиболее быстрая сходимость получается в том случае, если $\delta\mathbf{m}^i$ таковы, что v^i принимают минимальные значения. Далее, так как v^i — квадратичная форма, то представляется возможность избежать решения второй двухточечной краевой задачи, выбрав $\delta\mathbf{m}^i$ минимизирующими v^i при ограничениях, описываемых линеаризованными уравнениями объекта управления

$$\delta\dot{\mathbf{x}}^i = \mathbf{F}(\mathbf{x}^i)\delta\mathbf{x}^i + \mathbf{F}(\mathbf{m}^i)\delta\mathbf{m}^i, \quad \delta\mathbf{x}^i(t_0) = \mathbf{0}. \tag{8.10.5}$$

Минимизация

$$v^i + \int_{t_0}^{t_f} \langle \mathbf{g}^i, \mathbf{F}(\mathbf{x}^i)\delta\mathbf{x}^i + \mathbf{F}(\mathbf{m}^i)\delta\mathbf{m}^i - \delta\dot{\mathbf{x}}^i\rangle\, dt,$$

где $\mathbf{g}$ аналогичен $\mathbf{p}$ в первой задаче минимизации, приводит к линейному дифференциальному уравнению

$$-\dot{\mathbf{g}}^i = (\mathbf{R}^i)^T\mathbf{u}^i + [\mathbf{F}(\mathbf{x}^i) - \mathbf{F}(\mathbf{m}^i)\mathbf{K}^i]^T\mathbf{g}^i, \quad \mathbf{g}^i(t_f) = \mathbf{0}. \tag{8.10.6}$$

Из второй задачи минимизации получаем закон управления в замкнутой системе

$$\delta\mathbf{m}^i = \mathbf{w}^i - \mathbf{K}^i\delta\mathbf{x}^i, \tag{8.10.7}$$

где $\mathbf{w}$ определяется посредством

$$\mathbf{T}^i\mathbf{w}^i = -\mathbf{s}^i - \mathbf{F}^T(\mathbf{m}^i)\mathbf{g}^i. \tag{8.10.8}$$

С целью ограничения величин $\delta \mathbf{m}^i$ в соответствии с процедурой аппроксимации Мэрриам предлагает алгоритм

$$\delta \mathbf{m}^i = e\mathbf{w}^i - \mathbf{K}^i \delta \mathbf{x}^i, \tag{8.10.9}$$

где e — параметр из области $0 < e \leqslant 1$.

Метод итераций закона управления Мэрриама обладает двумя существенными преимуществами по сравнению с методом предыдущего параграфа. Как указывалось ранее, метод Мэрриама обладает быстрой сходимостью в окрестности оптимальной траектории. В связи с тем, что как исходное уравнение (8.10.5), так и сопряженные (8.10.3), (8.10.4) и (8.10.6) вблизи оптимума обладают устойчивостью, свойственной линейным оптимальным системам управления, ошибки вследствие отбрасывания ряда членов при этом также уменьшаются.

§ 8.11. Пример проектирования

С целью иллюстрации идей, изложенных в предыдущих параграфах, рассмотрим в упрощенном виде одну задачу проектирования. Воспользуемся методом Эллерта выбора весовых коэффицентов и штрафных функций и методом итерации закона управления Мэрриама *).

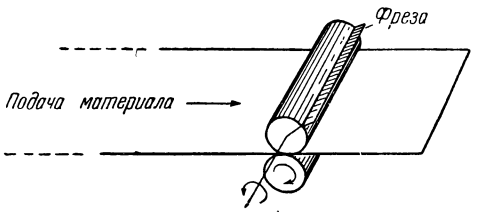


Рис. 8.11.1.

Рассматривается задача управления скоростью дисковых ножниц, изображенных на рис. 8.11.1. Система должна нарезать материал строго определенной длины. В связи с тем, что скорость подачи материала в процессе управления несколько изменяется, она измеряется совместно со скоростью вращающихся фрез. Эти сигналы используются в действующей модели для поддержания длины нарезаемого материала в допустимых пределах.

Здесь рассматривается лишь одна частная задача — переход от одного разрезанного куска к другому путем изменения скорости вращающейся фрезы. Чтобы избежать брака материала, подводимого к ножницам, изменение скорости должно быть плавным. Однако оно должно быть и быстрым, чтобы уменьшить количество производимого за один проход материала не-

*) Приводимые здесь результаты вычислений на цифровой машине проводились Эллертом на основе программы, разработанной в Объединенной электрической научно-исследовательской лаборатории под руководством Мэрриама.

желаемой длины, так как подобный материал составляет отбросы производства. На рис. 8.11.2, *а* в функции времени изображено желаемое изменение скорости фрезы. Для простоты начальное значение скорости нормализуется и равно единице, а начало перехода соответствует нулю.

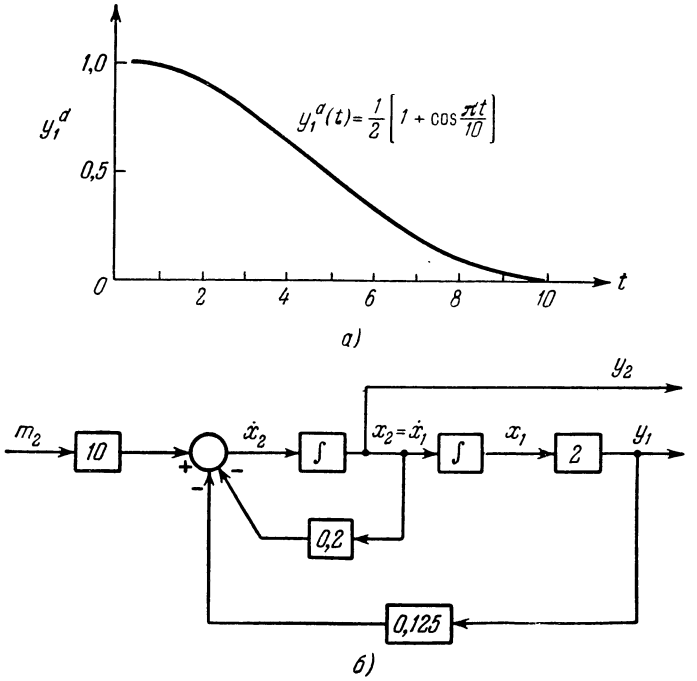


Рис. 8.11.2.

Объект управления представлен на рис. 8.11.2, *б*. Переменная y_1 — скорость вращения фрезы. Момент двигателя фрез равен y_2. Таким образом, уравнения объекта управления имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{m}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}, \end{aligned} \tag{8.11.1}$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0{,}25 & -0{,}2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Целью построения служит линейный регулятор, стремящийся, чтобы $y_1(t)$ воспроизводило $y_1^d(t)$ при ограничениях

$$|m_2(t)| \leqslant 0{,}2 \quad \text{и} \quad |y_2(t)| \leqslant 0{,}2.$$

Превышение этих пределов соответствует зоне насыщения. Реакция системы при единичном начальном условии должна быть «несколько задемпфированной» — перерегулирование не должно превышать пяти процентов. Диапазон начальных условий равен

$$1{,}0 \leqslant y_1(t_0) \leqslant 1{,}5 \text{ или}$$

$$0{,}5 \leqslant x_1(t_0) \leqslant 0{,}75$$

и $0 \leqslant y_2(t_0) \leqslant 0{,}2$.

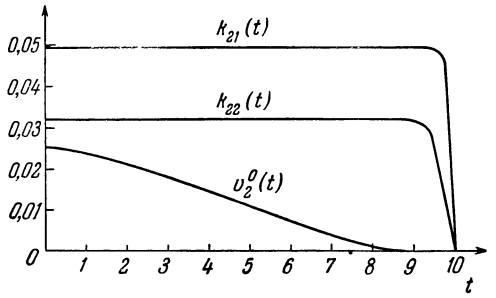


Рис. 8.11.3.

После определения уравнений состояния объекта управления (см. уравнение (8.11.1)) следующий шаг проектирования состоит в формулировке показателя качества. В качестве «первой пробы» предположим

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{10} [\langle \mathbf{x}^d - \mathbf{x}, \mathbf{\Omega}(\mathbf{x}^d - \mathbf{x})\rangle + \langle \mathbf{m}, \mathbf{Zm}\rangle]\, dt, \quad (8.11.2)$$

где в соответствии с рис. 8.11.2

$$x_1^d(t) = \frac{1}{4}\left(1 + \cos\frac{\pi t}{10}\right), \quad 0 \leqslant t \leqslant 10.$$

Ввиду $x_2 = \dot{x}_1$ имеем также

$$x_2^d(t) = -\frac{\pi}{40}\sin\frac{\pi t}{10}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 10.$$

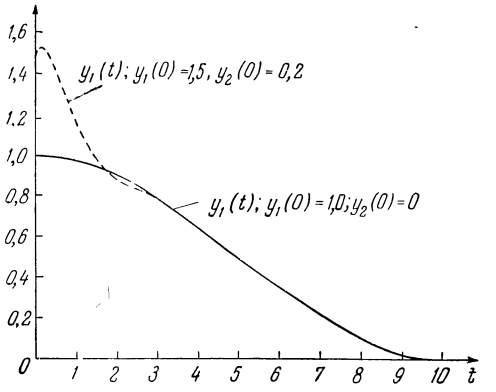


Рис. 8.11.4.

С целью определения весовых коэффициентов показателя качества положим t_f равным бесконечности. Результирующая замкнутая система описывается уравнением (8.5.4). Так как проектируемая система должна иметь перерегулирование, не превышающее пяти процентов, выбираем из первой стандартной формы таблицы 8.5.1 $z_1 = 1{,}4$.

Для определения ω_0 разрешим уравнение (8.5.3) относительно $v_1^0(0)$. Подставив результат в уравнение (8.5.7) совместно с уравнением (8.5.6) и «худшими» значениями $x_1(0) = 0{,}75$, $x_2(0) = 0{,}2$ и $m_2(0) = -0{,}2$, получим на цифровой машине реше-

ние $\omega_0 = 2{,}2812839$, $\omega_{11} = 0{,}06786696$ и $\omega_{22} = 0{,}02075401$. После определения этих величин предположение о бесконечном t_f отбрасывается и оптимальная система рассчитывается для $t_j = 10$ *).

Для рассматриваемого случая на основе уравнения (8.4.5) получаем $v_2^0(t)$, $k_{21}(t)$ и $k_{22}(t)$, как это показано на рис. 8.11.3. Соответствующая реакция системы при двух крайних значениях начальных условий изображена на рис. 8.11.4. На рис. 8.11.5 приведены соответствующие кривые для $y_2(t)$, а надлежащие управляющие воздействия показаны на рис. 8.11.6. Как следует из рис. 8.11.5, данная система отвечает всем требованиям, за исключением ограничения на $y_2(t)$.

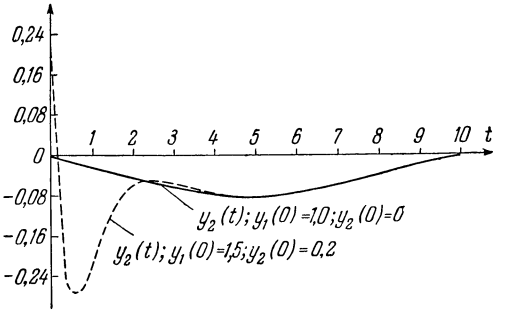


Рис. 8.11.5.

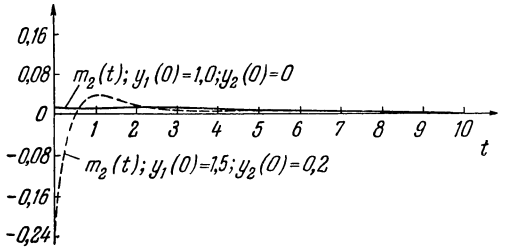


Рис. 8.11.6.

С целью поддержания $y_2(t)$ в заданных пределах введем в показатель качества штрафную функцию. Поэтому в подынтегральное выражение уравнения (8.11.2) дополнительно войдет

$$\omega_{22}\left|\frac{y_2(t)}{0{,}2}\right|^{\gamma_2} = \omega_{22}\left|\frac{x_2(t)}{0{,}2}\right|^{\gamma_2},$$

где γ_2 следует выбрать таким образом, чтобы соблюдалось ограничение, накладываемое на $y_2(t)$. Оптимальное решение следует определять методом Мэрриама итерации закона управления.

Из уравнения (8.10.2)

$$\mathbf{T}^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{R}^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 10\dfrac{\partial p_2^i}{\partial x_1^i} & 10\dfrac{\partial p_2^i}{\partial x_2^i} \end{bmatrix}.$$

*) Это одно из самых слабых мест решения данной задачи. (*Прим. ред.*)

Тогда из $\mathbf{T}^i\mathbf{K}^i = \mathbf{R}^i$

$$\mathbf{K}^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 10\dfrac{\partial p_2^i}{\partial x_2^i} & 10\dfrac{\partial p_2^i}{\partial x_2^i} \end{bmatrix}.$$

Из уравнения (8.9.2) имеем также

$$\mathbf{s}^i = \begin{bmatrix} 0 \\ m_2^i + 10p_2^i \end{bmatrix}.$$

Тогда из $\mathbf{T}^i\mathbf{u}^i = -\mathbf{s}^i$

$$\mathbf{u}^i = \begin{bmatrix} 0 \\ -(m_2^i + 10p_2^i) \end{bmatrix}.$$

На основе этих выражений, а также для $\mathbf{grad}_{\mathbf{x}^i} f_0^i$, $\mathbf{grad}_{\mathbf{m}^i} f_0^i$, $\mathbf{F}(\mathbf{x}^i)$, $\mathbf{F}(\mathbf{m}^i)$ и $\mathbf{P}(\mathbf{x}^i)$ можно получить уравнения для решения на вычислительной машине.

Первое выражение (в «прямом времени») получается, если переписать уравнение (8.10.9) в форме $m_2^{i+1} = ew_2^i + v_2^i - k_{21}^i x_1^{i+1} - k_{22}^i x_2^{i+1}$, где в общем случае $\mathbf{v}^i = \mathbf{m}^i + \mathbf{K}^i\mathbf{x}^i$. В данном частном случае $v_2^i = m_2^i + k_{21}^i x_1^i + k_{22}^i x_2^i$. Уравнения для $\mathbf{v}$ решаются в «обратном времени». Уравнения состояния в «прямом времени» записываются из уравнения (8.11.1) как

$$\dot{x}_1^{i+1} = x_2^{i+1},$$
$$\dot{x}_2^{i+1} = -0{,}25x_1^{i+1} - 0{,}2x_2^{i+1} + 10m_2^{i+1}.$$

Окончательное выражение задается уравнением (8.11.2) в виде

$$I^{i+1} = \frac{1}{2}\int_0^{10} \left[\omega_{11}(x_1^d - x_1^{i+1})^2 + \omega_{22}(x_2^d - x_2^{i+1})^2 + (m_2^{i+1})^2\right] dt.$$

Выражения для $\mathbf{p}$ в «обратном времени» получаются из уравнения (8.10.3) как

$$-\dot{p}_1^i = -0{,}25p_2^i - \omega_{11}(x_1^d - x_1^i),$$
$$-\dot{p}_2^i = p_1^i - 0{,}2p_2^i - \omega_{22}(x_2^d - x_2^i) + \frac{\omega_{22}\gamma_2}{0{,}2}\left|\frac{x_2}{0{,}2}\right|^{\gamma_2 - 1} \operatorname{sgn} x_2^i.$$

Из уравнения (8.10.4) следуют выражения для $\mathbf{P}(\mathbf{x}^i)$ (в «обратном времени»)

$$-\dot{p}_{11}^i = \omega_{11} - 0{,}50p_{21}^i - 100\,(p_{21}^i)^2,$$
$$-\dot{p}_{12}^i = -\dot{p}_{21}^i = -0{,}25p_{22}^i + p_{11}^i - 0{,}2p_{21}^i - 100p_{21}^i p_{22}^i,$$
$$-\dot{p}_{22}^i = \omega_{22}\left[1 + \frac{\gamma_2(\gamma_2 - 1)}{0{,}04}\left|\frac{x_2^i}{0{,}2}\right|^{\gamma_2 - 2}\right] + 2\,(p_{12}^i - 0{,}2p_{22}^i) - 100(p_{22}^i)^2,$$

где $p_{ij} = \partial p_i/\partial x_j$. Уравнения в «обратном времени» для $\mathbf{g}$ даются уравнением (8.10.6)

$$-\dot{g}_1^i = -10\left(m_2^i + 10p_2^i\right)p_{21}^i + \left(100p_{21}^i - 0{,}25\right)g_2^i,$$

$$-\dot{g}_2^i = -10\left(m_2^i + 10p_2^i\right)p_{22}^i + g_1^i + \left(100p_{22}^i - 0{,}2\right)g_2^i.$$

Уравнение (8.10.8) приводит к окончательному выражению (в «обратном времени»)

$$w_2^i = -\left[m_2^i + 10\left(p_2^i + g_2^i\right)\right].$$

Используя результаты решения оптимальной задачи при $x_1(0) = 0{,}75$ и $x_2(0) = 0{,}2$ первоначально без штрафной функции, получим в результате вычислений кривые на рис. 8.11.6—8.11.10. При проведении вычислений γ_2 увеличивалась до тех пор, пока $x_2(t)$ не стала соответствовать предписанным пределам. Это отвечает $\gamma_2 = 16$. Эта величина затем фиксировалась, и итерации продолжались вплоть до получения оптимума.

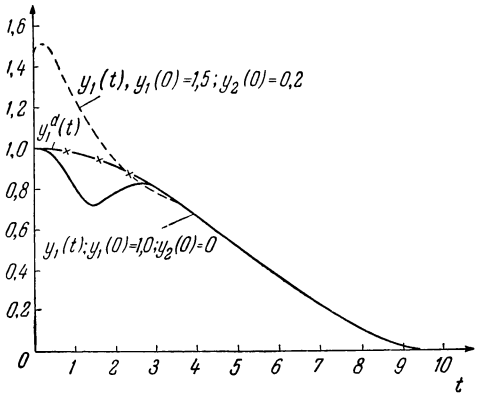


Рис. 8.11.7.

Из рассмотрения рис. 8.11.7—8.11.10 следует, что соответствующая система удовлетворяет всем требованиям проектирования. Однако сплошная кривая рис. 8.11.7 обладает при этом нежелательной впадиной. Это

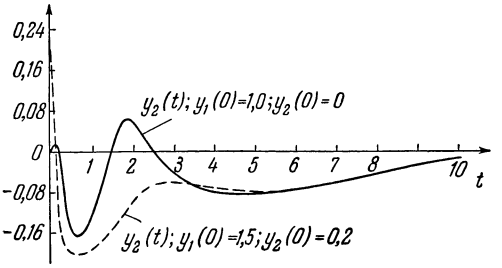


Рис. 8.11.8.

вызвано тем, что оптимум отвечал начальным условиям, соответствующим штриховой кривой. В задачах проектирования,

подобных рассмотренной, с большой областью начальных условий возможности линейного регулятора, в смысле качества

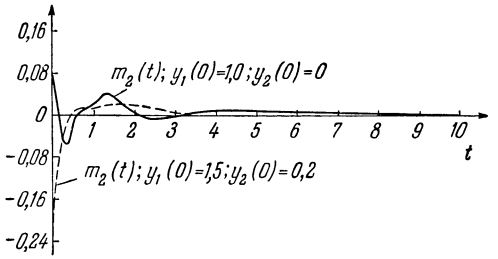


Рис. 8.11.9.

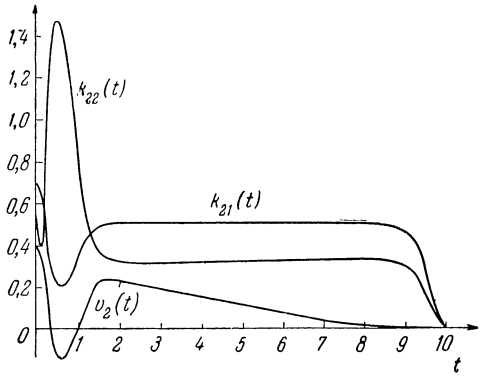


Рис. 8.11.10.

управления, ограничены. В подобных случаях желательно использование нелинейного регулятора. Однако методы построения таких регуляторов находятся еще в стадии разработки [25].

§ 8.12. Особые системы управления

В § 8.3 констатировалось, что $\mathbf{m}^0(t)$ должны выбираться из множества ограниченных функций. На возможность ограничения $\mathbf{m}^0(t)$ при помощи штрафных функций указывалось в § 8.6. Сейчас же, скорее с математической, чем с практической точки зрения, представляет интерес построение систем при жестких ограничениях на $\mathbf{m}^0(t)$, не прибегая к штрафным функциям. Например, если уравнения, описывающие задачу оптимизации

(включая в качестве нулевой координаты показатель качества *)) имеют вид

$$\dot{x}_j = f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) + b_j(m_j)^k, \qquad j = 0, 1, \ldots, n$$
$$k \text{ — нечетное число,}$$

то

$$H = \sum_{j=0}^{n} p_j [f_j + b_j (m_j)^k], \quad k \text{ — нечетное число.}$$

H принимает минимальное (максимальное) значение, если m_j максимальны по величине и противоположны (совпадают) по знаку с p_j. В этом случае оптимальная система управления релейного типа, так как m_j^0 при переключениях принимает свои предельные значения.

Для этой релейной системы из $\mathbf{grad}_{\mathbf{m}^0} H^0 = \mathbf{0}$ следует

$$k p_j^0 m_j^{0\,(k-1)} = 0, \qquad j = 0, 1, \ldots, n, \quad k \text{ — нечетное число,} \tag{8.12.1}$$

если m_j отличается от постоянной величины. Если выполняется данное соотношение, то H^0 не зависит от m_j и, следовательно, H^0 не дает тогда никакой информации о $\mathbf{m}^0$. Такое условие называется *особым*. Несмотря на то, что H^0 не зависит от $\mathbf{m}^0$, Понтрягин показал, что уравнение (8.3.12) является необходимым условием оптимальности [17] **).

Линейные оптимальные по быстродействию системы ***). Если в уравнении (8.3.2) $f_0 = 1$, то $I = t_f - t_0$. Поэтому в результате минимизации такого I при граничных условиях $\mathbf{x}^0(t_0) = \mathbf{x}(t_0)$ и $\mathbf{x}^0(t_f) = \mathbf{x}(t_f)$ система оптимальна в том смысле, что переход ее из расстояния $\mathbf{x}^0(t_0)$ в $\mathbf{x}^0(t_f)$ происходит за наименьшее время. Если объект управления линейный,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{m}, \tag{8.12.2}$$

то

$$H = \langle \mathbf{p}, \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{m} \rangle + 1 \tag{8.12.3}$$

и уравнения (8.3.11) приводят к уравнению (8.12.2) и уравнению

$$-\dot{\mathbf{p}}^0 = \mathbf{A}^T \mathbf{p}^0, \tag{8.12.4}$$

сопряженному (8.12.2). Общий вид решения легко определяется, так как уравнение (8.12.4) линейное и не содержит $\mathbf{x}^0$ или $\mathbf{m}^0$. Однако при этом неизвестны граничные условия на $\mathbf{p}^0$.

---

*) См. уравнение (8.3.13). (*Прим. перев.*)

**) Эти два факта не связаны между собой. (*Прим. перев.*)

***) Имеется в виду линейность уравнений объекта управления. (*Прим. перев.*)

Так как из уравнения (8.3.12) имеем также

$$\mathbf{grad}_{\mathbf{m}^0} H = \mathbf{0} = \mathbf{B}^T\mathbf{p}^0 \tag{8.12.5}$$

(за исключением промежутков постоянного значения $\mathbf{m}^0$), то $\mathbf{B}^T\mathbf{p}^0 = \mathbf{0}$ должно выполняться при отличии $\mathbf{m}^0$ от постоянной величины, т. е. в моменты переключения релейного регулятора. Между моментами переключения, когда величина $\mathbf{m}^0$ постоянная, H принимает минимальное значение, если $\langle \mathbf{p}^0, \mathbf{B}\mathbf{m}^0\rangle$ «наиболее отрицательно». Это выполняется при $m_j = -M_j \operatorname{sgn}(\mathbf{B}^T\mathbf{p})_j$, где M_j — максимальное значение m_j. Эти условия определяют $\mathbf{m}^0(t)$, если известно общее решение уравнения (8.12.4). Решения уравнений зависят от $\mathbf{x}^0(t_0)$ и $\mathbf{x}^0(t_f)$. Поэтому для определения всех допустимых управлений $\mathbf{m}^0(t)$, удовлетворяющих уравнениям (8.12.2), (8.12.4), (8.12.5) и требованиям к $\langle \mathbf{p}^0, \mathbf{B}\mathbf{m}^0\rangle$, обычно легче решать уравнение (8.12.4) при произвольных начальных условиях. Затем из допустимых управлений выбирается удовлетворяющее заданным граничным условиям.

Пример 8.12.1. Построить регулятор, обеспечивающий переход в начало координат при произвольных $\mathbf{x}(t_0)$, $\mathbf{x}(t)$ за минимальное время. Объект управления такой же, как и в примере 7.13.1. Ограничения $|m_2(t)| \leqslant M_2$.

Объект управления описывается уравнением (8.12.2), где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для удобства введем преобразование $\mathbf{w} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{x}$

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} -s_1 & 1 \\ -s_2 & 1 \end{bmatrix},$$

где s_1 и s_2 — характеристические числа,

$$s_1 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b},$$

$$s_2 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}.$$

Для простоты полагаем $(a/2)^2 - b^2 > 0$. Тогда уравнение (8.12.2) приводится к $\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{w} + \mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{m}$, где

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} s_2 & 0 \\ 0 & s_1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{S}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Использование для данной системы уравнения (8.12.4) дает

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= -s_2 p_1, \\ \dot{p}_2 &= -s_1 p_2, \end{aligned} \tag{8.12.6}$$

а из уравнения (8.12.5) следует, что в моменты переключения $(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{B})^T\mathbf{p} = 0$. Следовательно, моменты переключения характеризуются

$$p_1(t) + p_2(t) = 0. \tag{8.12.7}$$

Так как уравнение (8.12.6) отличается от уравнения (7.3.11) лишь знаком минус, то траектории в плоскости p_1p_2 будут отличаться от траекторий рис. 7.4.3, *а* плоскости z_1z_2 лишь направлением (следует изменить направление стрелок). Прочертив на рис. 7.3.4, *а* линию, соответствующую $p_1 + p_2 = 0$, обнаружим, что уравнение (8.12.7) удовлетворяется лишь для траекторий, лежащих во втором и четвертом квадрантах плоскости p_1p_2. Поэтому переключение оптимального регулятора для рассматриваемой системы происходит только при определенных начальных условиях $\mathbf{x}$. Это существенная информация, оказывающаяся позднее полезной при построении оптимального регулятора. Рассмотренное представляет собой частный случай общего результата, что число переключений в оптимальной по быстродействию системе для линейного объекта n-го порядка с действительными характеристическими числами не превышает $n - 1$ [34]. К сожалению, это только сведения, вытекающие из уравнения (8.12.5). Оптимальный регулятор следует определять из рассмотрения вида траекторий в плоскости x_1x_2.

При положительных a и $(a/2)^2 - b$ траектории в плоскости x_1x_2 соответствуют случаю устойчивого узла, изображенного на рис. 7.3.8. Однако, так как оптимальные значения m_2 отличны от нуля (в отличие от рис. 7.3.8), то

$$m_2 = -M_2 \operatorname{sgn}(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{Bp})_2 = -M_2 \operatorname{sgn}(p_1 + p_2).$$

Особая точка сдвигается, и траектории смещены в горизонтальном направлении. При положительном $p_1 + p_2$ особая точка смещается влево на M_2/b. При отрицательном $p_1 + p_2$ она сдвинута на M_2/b вправо. Эти случаи иллюстрируются рисунком 8.12.1. Так как через $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ проходят лишь две траектории, названные «кривыми переключения», то очевидно, что оптимальная

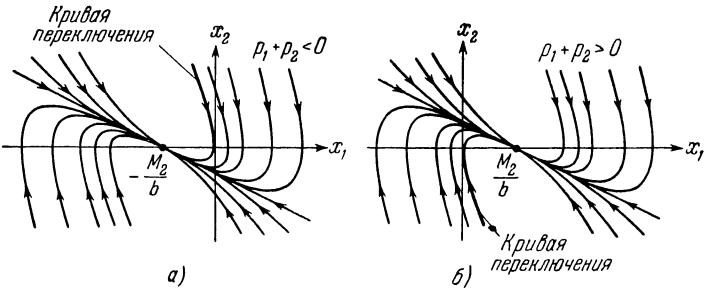


Рис. 8.12.1.

$\mathbf{x}(t)$ должна достигать $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ по одной из этих двух траекторий. Если начальная точка лежит на одной из этих траекторий, то не требуется никаких переключений $\mathbf{m}^0$. Система движется по такой траектории к $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Если начальные условия не отвечают участку одной из кривых переключения до пересечения особой кривой начала координат, то движение системы должно происходить по одной из траекторий, соответствующей данным начальным условиям. Существуют две такие траектории, соответственно при положительном и отрицательном $p_1 + p_2$. Движение, достигающее начало координат за одно переключение, должно происходить по траектории, пересекающей кривую переключения. Как можно видеть, совмещая рис. 8.12.1, *а* и 8.12.1, *б*, этому отвечает лишь одна из траекторий, проходящих через данную начальную точку. Это обусловливает надлежащий знак $p_1 + p_2$ до тех пор, пока не будет достигнута кривая переключения. В этот момент должно

произойти изменение знака $m_2^0(t)$ и затем движение в начало координат происходит по кривой переключения. Описанный способ — единственный, при котором в соответствии с рассмотренными выше требованиями попадаем в начало координат за одно переключение.

При этом оптимальные траектории определяются объединением соответствующих частей рис. 8.12.1, *а* и 8.12.1, *б* и, как следует из рассмотренного, должны иметь вид рис. 8.12.2. Для верхней кривой переключения и всех

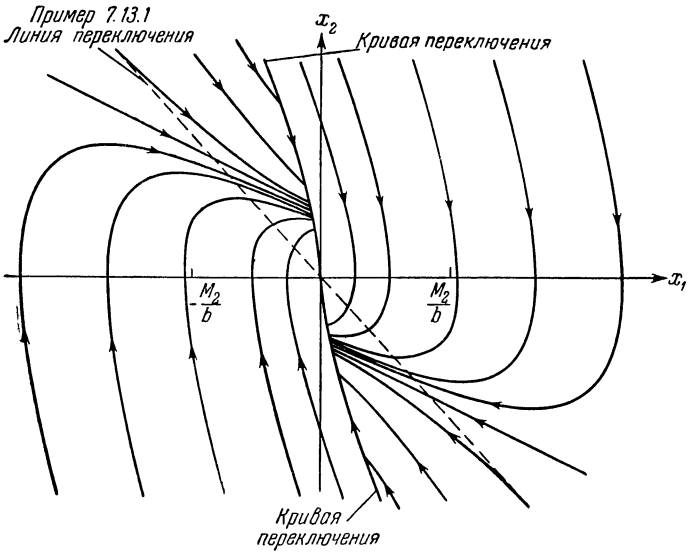


Рис. 8.12.2.

точек справа от кривых переключения оптимальное значение $m_2(t)$ равно $m_2^0(t) = -M_2$. Для нижней кривой переключения и всех точек слева от кривых переключения $m_2^0(t) = M_2$. Если $m_2^0(t)$ отвечает этим двум уравнениям, то $\mathbf{x}(t)$ достигает начала координат за минимальное время.

Чтобы построить регулятор в соответствии с рис. 8.12.2, необходимы выражения для линий переключения. Так как эти траектории — не что иное, как смещенные кривые, соответствующие уравнениям (7.3.12) и (7.3.10), то кривые переключения описываются как

$$(-s_2x_1 + x_2) = c\,(-s_1x_1 + x_2)^{s_1/s_2},$$

если при $m_2^0(t) = -M_2$ x_1 заменить $x_1 + 1$ и $x_1 - 1$ при $m_2^0(t) = M_2$. Тогда c определяется из условия: $x_1 = x_2 = 0$ удовлетворяет данному уравнению. В результате получим

$$\left(1 + x_1 - \frac{x_2}{s_2}\right) = \left(1 + x_1 - \frac{x_2}{s_1}\right)^{s_1/s_2}$$

для $m_2^0(t) = -M_2$, т. е. для верхней кривой переключения рис. 8.12.2. Нижняя кривая переключения описывается

$$\left(1 - x_1 + \frac{x_2}{s_2}\right) = \left(1 - x_1 + \frac{x_2}{s_1}\right)^{s_1/s_2}.$$

Приведенные выражения и измеряемые величины $x_1(t)$ и $x_2(t)$ могут использоваться в специальном вычислительном устройстве для формирования $m_2^0(t)$.

Интересно сравнить рассчитанный в данном примере регулятор с регулятором в примере 7.13.1, так как объект управления в обоих случаях одинаков. Ввиду того, что «переключающей функцией» в примере 7.13.1 служит линейная комбинация перменных состояния, кривой переключения является прямая $x_2 = -ax_1/(1+b)$. Она изображена на рис. 8.12.2 при $a = 3^{\frac{1}{2}} + 3^{-\frac{1}{2}}$, $b = 1$. В результате получаем более чем одно переключение при движении к началу координат, что занимает соответственно большее время. Характерно то, что при этом происходит «скольжение» вдоль линии переключения к началу координат.

Пример 8.12.2. Объект управления в системе одноосной ориентации космического аппарата представлен приближенно на рис. 8.12.3. Построить

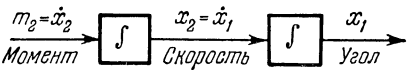


Рис. 8.12.3

оптимальный регулятор, ликвидирующий начальное рассогласование при минимуме показателя качества

$$I = \int_{t_0}^{t_f} [m_2 x_2 \operatorname{sgn}(m_2 x_2) + c]\, dt, \quad c = \text{const}$$

и ограничении $|m_2| \leqslant M_2$ *).

Первый член показателя качества представляет собой энергию, требуемую для управления при «идеальном» регуляторе. Для систем подобного типа минимизация энергии зачастую очень важна. Второй член соответствует критерию максимального быстродействия (см. пример 8.12.1). Причина введения этого члена в показатель качества системы ориентации менее очевидна. Однако совместно с терминальными условиями $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{0}$ получается полезная приближенная трактовка других показателей качества, оптимальное решение для которых определяется сложнее [35].

Для этой системы $H = p_1 x_2 + p_2 m_2 + c + m_2 x_2 \operatorname{sgn}(m_2 x_2)$ и

$$-\dot{p}_1 = 0,$$

$$-\dot{p}_2 = p_1 + m_2 \operatorname{sgn}(m_2 x_2).$$

---

*) Приводимое здесь решение некорректно, так как исходный функционал не удовлетворяет условиям принципа максимума [17]. (*Прим. перев.*)

Минимуму H отвечает

$$m_2 = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad |x_2| > |p_2|, \\ -M_2 \operatorname{sgn}(p_2) & \text{при} \quad |x_2| < |p_2| \end{cases}$$

и переключение m_2 происходит при $|x_2| = |p_2|$. Данная задача отличается от приведенной в примере 8.12.1 существованием области фазового пространства, для которой $m_2 = 0$. Это обусловлено составляющей энергии в показателе качества.

Ввиду $dx_2/dx_1 = m_2/x_2$ траектории задаются

$$x_2 = \text{const}, \quad m_2 = 0,$$

$$\frac{x_2^2}{2} + [M_2 \operatorname{sgn}(p_2)]\, x_1 = \text{const}, \quad m_2 \neq 0,$$

как показано на рис. 8.12.4. Так как через начало координат проходят лишь две траектории, то они и должны составлять оптимальную кривую переключения (рис. 8.12.5, *а*). Однако должна существовать и вторая кривая пере-

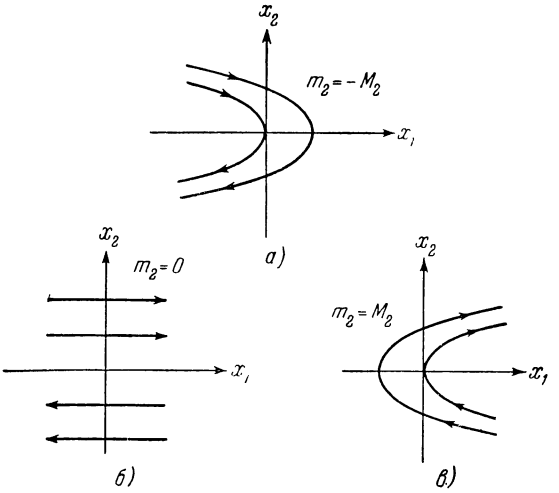


Рис. 8.12.4.

ключения, так как траектории в плоскости p_2x_2 при $m_2 = 0$ представляют собой прямые, определяющие два значения p_2, для которых $|p_2| = |x_2|$. Из вида траекторий, изображенных на рис. 8.12.5, *б*, следует, что изменение p_2 при последовательных переключениях равно удвоенной величине x_2, при которой они происходят. Эта информация совместно с уравнением Понтрягина и определяет другую кривую переключения.

Понтрягин показал, что если H не содержит в явном виде t, то вдоль оптимальной траектории H является положительной постоянной или нулем [17]. Более того, если величина t_f не фиксированная (это не соответствует данному случаю) при $t = t_f$ $H^0 = 0$. В противном случае увеличение t_f привело бы к уменьшению I. Поэтому $H^0 = 0$ для всех $t_0 \leqslant t \leqslant t_f$. В частности, в области, соответствующей $m_2 = 0$,

$$H^0 = 0 = p_1^0 x_{2s} + c,$$

где x_{2s} — значение x_2^0 при $m_2 = 0$. Но при этом

$$\frac{dp_2^0}{dx_1^0} = -\frac{p_1}{x_{2s}} = \frac{c}{x_{2s}^2} = \text{const}.$$

Тогда изменение x_1^0 при последовательных переключениях равно

$$\delta x_1^0 = \frac{x_{2s}^2}{c}\,\delta p_2^0 = \frac{2x_{2s}^3}{c}.$$

Последнее соотношение следует из того факта, что изменение p_2^0 при переключениях равно $2x_{2s}$. Предварительно определенная кривая переключения задается уравнением

$$\frac{x_2^2}{2} + M_2 x_1 = 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_1 \leqslant 0,$$

$$\frac{x_2^2}{2} - M_2 x_1 = 0, \quad x_2 \leqslant 0, \quad x_1 \geqslant 0,$$

тогда как другая кривая переключения имеет вид

$$\frac{x_2^2}{2} + M_2\left(x_1 + \frac{2x_2^3}{c}\right) = 0, \; x_2 \geqslant 0, \; x_1 \leqslant 0,$$

$$\frac{x_2^2}{2} - M_2\left(x_1 + \frac{2x_2^3}{c}\right) = 0 \quad x_2 \leqslant 0, \; x_1 \geqslant 0.$$

Эти две кривые переключения и характерные траектории показаны на рис. 8.12.6.

Интересно отметить, что при стремлении c к бесконечности кривые переключения совпадают и область, соответствующая m_2^0, исчезает. В этом случае имеем регулятор, оптимальный по быстродействию, так как отвечающий энергии член I пренебрежимо мал по сравнению с бесконечно большим весовым множителем, соответствующим минимуму t_f (см. также задачу 7.14). При стремлении c к нулю последняя кривая переключения сливается с горизонтальной осью. Управление системой отключается. Это один из очевидных путей сохранить энергию, если не интересоваться временем достижения начала координат.

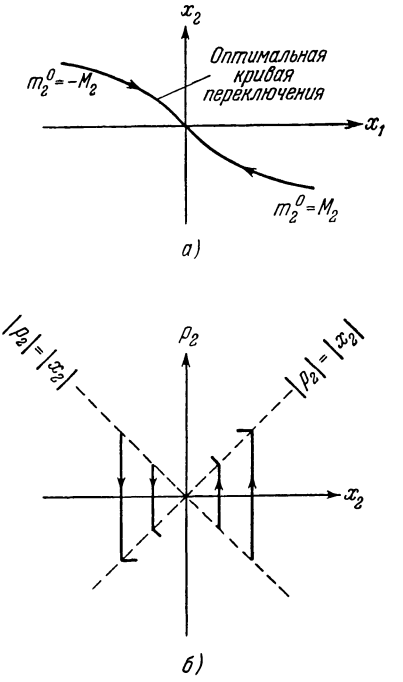


Рис. 8.12.5.

Приведенные в данном параграфе примеры иллюстрируют специфику задач оптимального быстродействия, которым посвящена обширная литература [36—39]. Однако соответствующие этим задачам регуляторы обладают недостатком — коэффициент

усиления регулятора в конце управления неограниченно возрастает. Это и очевидно, так как в этих примерах кривые переключения проходят через начало координат. Подобный результат наблюдался и в примере 8.4.6. При терминальных ограничениях на переменные состояния коэффициенты усиления оптимального регулятора замкнутой системы в конечный момент времени стремятся к бесконечности. Из-за существующих физических ограничений это невыполнимо. Поэтому в реальной системе управления с обратной связью при действии возмущений точно удовлетворить терминальным условиям не представляется возможным. В связи с этим ряд исследователей прибегает к приближенному заданию терминальных ограничений, используя штрафные функции*).

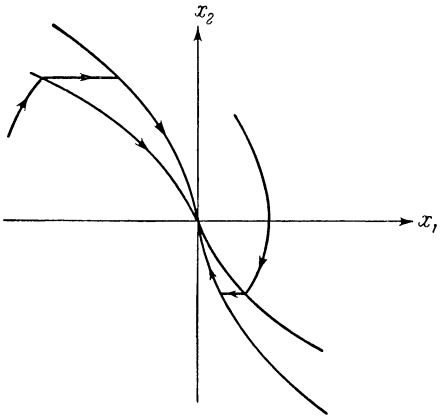


Рис. 8.12.6.

Сложность подобных задач вытекает и из того, что при определении кривых переключения использовались геометрические построения. Это чрезвычайно трудно для объектов управления выше второго порядка. В связи с этим в литературе рассмотрена возможность построения специальных вычислительных устройств для решения данного класса задач [40, 41].

Задачи

8.1. Показать, что оптимизация при показателе качества

$$I = \int_{t_0}^{t_f} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{m}, \tau)\, d\tau$$

эквивалентна оптимизации в соответствии с критерием (8.3.13).

8.2. Вывести уравнение (8.4.8), рассматривая для стационарного случая преобразование уравнения (8.4.11).

---

*) Приведенная характеристика оптимальных по быстродействию систем дана недостаточно корректно. Говорить о бесконечно большом усилении корректно, лишь отмечая, что это соответствует скользящему режиму. Что касается возмущений, то предполагается, что они недоступны изменению. Более подробно см. [7, 8] в списке дополнительной литературы. (*Прим. перев.*)

8.3. Построить оптимальную систему, соответствующую примеру 8.4.3 при

$$\Omega = \begin{bmatrix} \omega_{11} & 0 \\ 0 & \omega_{22} \end{bmatrix}.$$

8.4. Построить оптимальную систему, соответствующую примеру 8.4.5 при терминальном условии $x_1(t_f) = 0$. Величина t_f предполагается конечной. Что характерно для бесконечного t_f?

8.5. Объект системы управления положением небольшой радиолокационной антенной характеризуется передаточной функцией

$$\frac{Y_1(s)}{M_2(s)} = \frac{K}{s(Ts+1)}.$$

Требуется управлять величиной $y_1(t)$ оптимальным образом в соответствии с минимумом критерия

$$I = \int_{t_0}^{\infty} \left\{ \left[y_1^d(\tau) - y_1(\tau) \right]^2 + \zeta_{22} m_2^2(\tau) \right\} d\tau.$$

(*a*) Проектируемая система должна оптимальным образом выполнять поворот. В качестве $y_1^d(t)$ выбран ступенчатый сигнал величины α. Полагаем $K = 0{,}2$, $K/\zeta_{22}T = 2$ и $T = 1/\sqrt{5}$. Определить $m_2^0(t)$ и $y_1^0(t)$.

(*b*) Повторно выполнить п. (*a*) при $|m_2(t)| \leqslant M$, где

$$M = \frac{8}{1+\sqrt{5}} - \frac{2}{2+\sqrt{5}}.$$

Сравнить $m_2^0(t)$ и $y_1^0(t)$ с соответствующими в п. (*a*). Рассмотреть влияние уменьшения K на характер реакции системы.

(*c*) Для оптимального процесса слежения в качестве $y_1^d(t)$ выбран единичный линейно нарастающий сигнал. Повторить п. (*a*), (*b*).

8.6. Вывести уравнения (8.5.1), (8.5.2) и (8.5.3).

8.7. Вывести уравнения (8.10.6) и (8.10.7).

8.8. Повторить пример 8.12.1 при $(a/2)^2 - b < 0$, $a > 0$.

8.9. Повторить пример 8.12.1 при $(a/2)^2 - b > 0$, $a < 0$.

8.10. Начертить кривые рис. 8.12.6, учитывая, что для космического аппарата возможными терминальными условиями служат

$$x_1(t_f) = 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \quad x_2(t_f) = 0.$$

8.11. Вывести уравнения Понтрягина для дискретных систем.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. N. Wiener, Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series, John Wiley and Sons, New York, 1949; also NDRC Report, 1942.
2. R. C. Booton, Jr., An Optimization Theory for Time-Varying Linear Systems with Nonstationary Statistical Inputs, Proc. IRE, August 1952, стр. 977—981.
3. Д. К. Ньютон, Л. А. Гулд, Д. Ф. Кайзер, Теория линейных следящих систем, Физматгиз, 1961.
4. F. J. Ellert and C. W. Merriam, III, Synthesis of Feedback Controls Using Optimization Theory — An Example, Trans. IEEE AC-8, No. 2, April 1963, стр. 89—103.
5. F. J. Eller and C. W. Merriam, III, A Longitdudinal Guidance System for Aircraft Landing during Flare-out, Proceedings of the Second In-

ternational Congress of Landing during Flare-out, Proceedings of the Second International Congress of IFAC, Butterworth and Co., Ltd., London, England, 1963.
6. D. Graham and R. C. Lathrop, The Synthesis of Optimum Transient Response: Criteria and Standard Froms, Trans. AIEE, Vol. 72, pt. 2, November 1953, стр. 278—288.
7. W. C. Schultz and V. C. Rideout, The Selection and Use of Servo Performance Criteria, Trans. AIEE, Vol. 76, pt. 2, 1957, стр. 383—388.
8. W. C. Schultz and V. C. Rideout, Control System Performance Meausres: Past Present and Future, Trans. IRE AC-6, No. 1, February 1961, стр. 22—35.
9. J. E. Gibson et al., Specification and Data Prefortation in Linear Control Systems — Part Two, AFMDS-TR-61-5, School of Electrical Engineering, Purdue University, Lafayette, Indiana, May 1961, стр. 46—115.
10. J. Wolkovitch et al., Persenmance Criteria for Linear Constant-Coefficient Systems with Deterministic Inputs, Tech. Rpt. No. AD-TR-61-501, Aeronautical Systems Division, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, February 1962.
11. R. Magdaleno and J. Wolkovitch, Performance Criteria for Linear Constant-Coefficient Systems with Random Inputs, Tech. Rpt. No ASD-TDR-62-470, Aeronautical Systems Division, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, January 1963
12. М. А. Айзерман, Лекции по теории автоматического регулирования, Гостехиздат, 1958, стр. 302—320.
13. Z. V. Rekasius. A General Performance Index for Analytical Design of Control Systems, Trans. IRE, AC-6, No. 2, May 1961, стр. 217—222.
14. C. W. Merriam, III, Synthesis of Adaptive Controls, Sc. D. Thesis, Massachusetts Institute of Technology, May 1958.
15. R E. Kalman and R. W. Koepcke, Optimal Synthesis of Linear Sampling Control Systems Using Generalized Performance Indices, Trans. ASME, Vol. 80, November 1958, стр. 1820—1826.
16. F. J. Ellert, Indices for Control System Design Using Optimization Theory, Doctoral Thesis, Dept. of Electrical Engineering, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, New York, 1963.
17. Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко, Математическая теория оптимальных процессов, Физматгиз, 1961.
18. Л. Э. Эльсгольц, Вариационное исчисление, Гостехиздат, 1952.
19. И. М. Гельфанд, С. В. Фомин, Вариационное исчисление, Физматгиз, 1961.
20. W. W. Seifert and C. W. Steeg, Jr., Control System Engineering, McGraw-Hill Book Co., New York, 1960, стр. 6061.
21. G. L. Collina and P. Dorato, Application of Pontryagin's Maximum Principle: Linear Control Systems, Research Report, No. PIBMRI-1015-62, Polytechnic Institute of Brooklyn, June 1962.
22. A. L. Whiteley, Theory of Servo Systems, with Particular Reference to Stabilization, IEE Proc., Vol. 93, August 1946, стр. 353—372.
23. W. Kipiniak, Dunamic Optimization and Control, a Variational Approach, John Wiley and Sons, New York, 1961.
24. H. J. Kelley, Method of Gradients, Chapter 6 of Optimization Techniques, edited by G. Leitmann, Academic Press, New York, 1961.
25. C. W. Merriam, III, Optimization Theory and the Design of Feedback Control Systems, McGraw-Hill Book Co., New York, 1964.
26. L. W. Neustadt, A Synthesis Method for Optimal Controls, Proc. Optimum System Synthesis Conference, Tech. Documentary Rept. No. ASD-TDR-63-119, Aeronautical Systems Division, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, February 1963, стр. 374—381.

27. D. K. Scharmack, The Equivalent Minimization Problem and the Newton-Raphson Optimization Method, Proc. Optimum System Synthesis Conference, Tech. Documentary Rept. No. ASD-TDR-63-119, Aeronautical Systems Division, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, February 1963, стр. 119—158.
28. J. L. Speyer, Optimization and Control Using Perturbation Theory to Find Neighboring Optimum Paths, Symposium on Multivariable System Theory, SIAm Meeting, Cambridge, Mass., November 1—3, 1962.
29. Р. Беллман, Динамическое программирование, ИЛ, 1960.
30. R. Bellman and R. Kalaba, Reduction of Dimensionality, Dynamic Programming and Control Processes, Rand Corp. Rept. R-1964, June 1960.
31. M. Aoki, Dynamic Programming and Numerical Experimentation as Applied to Adaptive Control, Doctoral Thesis, U.C.L.A., November 1959.
32. H. J. Kelley, Grandient Theory of Optimal Flight Paths, J. Amer. Rocket Soc., Vol. 30, стр. 947—953, 1960.
33. A. E. Bryson, W. F. Denham, A Steepest Ascent Method for Solving Optimum Programming Problems, J. Appl. Mech., June 1962, стр. 247—257.
34. Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе и Е. Ф. Мищенко, стр. 120.
35. E. W. Owen, Optimum Reaction Wheel Attitude Control, Doctoral Thesis, Dept. of Electrical Engineering, Rensselaer Plytechnic Institute, Troy, N. Y., 1963.
36. C. A. Desoer, The Bang-Bang Control Problem Treated by Variational Techniques, Information and Control, Vol. 2, December 1959, стр. 333—348.
37. J. Wing and C. A. Desoer, The Multiple-Input Minimal Time Regulator Problem (General Theory), Trans. IEEE, Vol. AC-8, No. 2, April 1963, стр. 125—136.
38. J. P. LaSalle, The Time Optimal Control Problem, Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations, Vol. 5. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1959.
39. E. B. Lee, Mathematical Aspects of the Synthesis of Linear Minimum Response-Time Controllers, IRE Trans., Vol. AC-5, September 1960, стр. 283—289.
40. Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе и Е. Ф. Мищенко, стр. 172—181.
41. E. G. Gilbert, Hybrid Computer Solution of Time-Optimal Control Problems, Proc. Spring Joint Computer Conference, 1963.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Фельдбаум, Основы теории оптимальных автоматических систем, «Наука», 1966.
2. В. Ф. Демьянов, А. М. Рубинов, Приближенные методы решения экстремальных задач, ЛГУ, 1968.
3. Н. Е. Кирин, Вычислительные методы оптимального управления, ЛГУ, 1968.
4. А. М. Летов, Аналитическое конструирование регуляторов, Автоматика и телемеханика, т. 21, № 4, 1960.
5. Р. Т. Янушевский, Синтез многосвязных систем автоматического управления, Теория и методы построения систем многосвязного регулирования, «Наука», 1970.
6. В. Г. Болтянский, Математические методы оптимального управления, «Наука», 1966.
7. М. В. Мееров, Синтез структур автоматического управления высокой точности, «Наука», 1967.
8. А. А. Фельдбаум, Вычислительные устройства в автоматических системах, Физматгиз, 1959.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Анализ временнóй 22, 36
— частотный 22

Базис 233, 256
— двойственный 237, 256

Вариация параметров 69, 375
Вектор базисный 233
— единичный 229
— собственный 247
— состояния 342, 343
— столбец 208, 228
— строка 208, 228
Векторы линейно зависимые 230, 232, 233
— — независимые 230, 232, 233, 306, 358
— ортогональные 229, 232, 234, 236, 241
— ортонормированные 234, 235, 236
— характеристические 246, 247, 249, 254, 256, 358

Гамильтониан 570
Градиент 305, 537

Дискриминант 284, 285
Дополнение алгебраическое 64, 218—221, 225

Закон управления 561
Звено задержки 420
— интегрирующее 329
— суммирующее 329
— усилительное 329

Изоклина 449, 500
Импульс 119, 120
— мгновенный 130, 139, 159, 173
Инверсия 217
Индекс Пуанкаре 503
Интеграл контурный 141
— Лебега 26
— Римана 26
— свертывания для нестационарных систем 44—47
— — — стационарных систем 36—44
— Стильтьеса 26
— Фурье 118—120
Исчисление вариационное 565
Итерация 590, 595, 598

Классификация систем 13
Коды линейные 319, 320
Коэффициенты весовые 585—587
— неопределенные 69, 70, 100—102
— Фурье 308, 310
Круг сходимости 143, 145

Линеаризация 523

Матрица 207
— автокорреляционная 399, 400
— блочная 213
— диагональная 208, 213, 255
— единичная 208
— инволютивная 227
— квадратная 208
— —, дефект 230, 240, 251
— —, индекс 267
— — кососимметрическая 209, 268
— — косоэрмитова 209, 269
— —, нормальная форма 261
— —, перестановка столбцов 259
— —, — строк 259
— —, порядок 207, 208
— —, сигнатура 267
— —, симметрическая 209, 251, 278, 305
— —, след 258
— —, сопряженная 209
— —, функция от нее 286, 289—302
— —, характеристический многочлен 249
— —, эрмитова 209, 254, 264, 269
—, минор 218, 219
—, — главный 283—285
— модальная 249—253
— неособенная 230
— обратная 225—227
— особенная 230
— переходная состояния 371—384, 447—458
— присоединенная 225—227
—, ранг 230
— расширенная 244
— транспонированная 208, 212
— унитарная 228
— фундаментальная 371
— характеристическая 251
— эквивалентная 261
Матрицант 379
Метод вариации параметров 70—74, 103—107
— Кэли — Гамильтона 297—302
— Лагранжа 280
— Ляпунова 511—514
— наименьших квадратов 472—476
— неопределенных коэффициентов 69, 70, 100—102

Многочлены Лагерра 311
— матричные 286—291
— неприводимые 443
— факториальные 91, 93
Множитель интегрирующий 66, 391
— Лагранжа 565, 566
Моделирование 329—335, 421—424, 467

Наблюдаемость дискретных систем 446, 447
— непрерывных систем 363—368
Неравенство Бесселя 309
— треугольника 229
— Шварца 229
Нуль 144, 156—159, 183, 189, 190

Оператор дифференциальный 61
— интегральный 378
— разностный обратный 60, 89—94
— — прямой 60, 89—94
— сопряженный 385, 386
Определитель 64, 216—225
— Вронского 65, 68, 73
— Грама 231, 232
— Касорати 97
—, порядок 217, 219—221, 223
— произведения матриц 224
—, свойства 218
Ортогонализация 234—236

Плоскость фазовая 484—487
Показатель качества 563, 564
Положение равновесия неустойчивое 516, 517
— — устойчивое 516, 517
Полюс 146, 156—159, 189, 190
Правило Крамера 64, 73, 221, 237—239
— Сильвестра 230, 231
Преобразование Ганкеля 161, 171
— Гильберта 171
— конгруэнтное 263, 266, 267
— Лапласа для непрерывных систем нестационарных 159—167
— — — — — стационарных 122—134
— Меллина 161
— ортогональное 263, 265, 279
— подобия 256, 263—265, 269
— Уиттекера 171
— унитарное 264, 266
— Фурье 22, 119—122, 132, 172
— Эйлера 171
— z- 172—200
— — модифицированное 196—199
Принцип оптимальности 593
— суперпозиции 14, 34, 35
Программирование динамическое 592—595
Продолжение аналитическое 144
Произведение внешнее 229, 289
— скалярное 228, 307
Пространство линейное векторное 228, 232—234, 241
— функциональное 306—312
Процедура Грама — Шмидта 234—236

Разложение на элементарные дроби 130, 131, 151, 349—352, 433, 434
— по специальным функциям 31—36
— — элементарным функциям 19—22, 47—50, 167, 185
Реакция системы 20, 21—34, 124, 168, 358, 373, 442
Ряд Лорана 143, 145, 146
— Маклорена 143
— Неймана 378, 380
— Тейлора 143, 147
— Фурье 114—122

Сепаратриса 500
Сигнал входной 121, 157, 164
— выходной 121, 157
— дискретный 16
— квантованный 18
— непрерывный 16
Система автономная 517
— детерминированная без упреждения 13, 34, 51
— — с упреждением 13, 34
— дискретная 421, 545, 546
— импульсная 50, 173, 446
— линейная дискретная с переменными параметрами 429, 457
— — — с постоянными параметрами 434—446, 457
— — непрерывная с переменными параметрами 62, 333, 343
— — — с периодическими коэффициентами 387, 388
— — — с постоянными параметрами 62, 343, 358—363
— многосвязная 328, 335, 363, 429
— нелинейная 14, 20, 334, 484, 502—546
— нестационарная 15, 44, 55—57, 159—167, 196, 377, 379
— неустойчивая 159, 195, 514
— оптимальная по быстродействию 607, 608
— реализуемая 13
— сопряженная дискретная 453—456
— — модифицированная 403—406
— — непрерывная 383—385, 394, 395
— стационарная 14, 44, 50—55, 60, 67, 133, 370, 374
— стохастическая 13
— устойчивая 80, 159, 195, 368, 514
Состояние равновесия 432
— — неустойчивое 516
— — устойчивое 516
— системы 340—342, 427
Суммы свертывания 55, 57, 194, 195
— совмещения 55—57

Теорема вычетов 146, 155
— Кэли — Гамильтона 290, 297
— Коши 142, 143
— Коши — Липшица 488
— Ляпунова асимптотической устойчивости 520
— Пуанкаре — Бендиксона 505
— Сильвестра 292—295
Теория оптимизации 559
— состояния 13
— Флоке 83
Точка особая 145, 146, 486
— равновесия 486, 488
— седловая 492, 493
— сопряженная 569
Траектория 343, 489—499, 511, 512

Узел неустойчивый 491—493
— устойчивый 491—493
Управляемость дискретных систем 446, 447
— непрерывных систем 363—370
Уравнение алгебраическое линейное 237
— Бесселя 83, 160

Уравнение вариационное 496—502
— Гамильтона — Якоби 594
— дифференциальное неоднородное 69—74
— — однородное 65, 67, 68
— — с изменяющимися во времени коэффициентами 62, 64, 333, 81—84
— — с постоянными коэффициентами 62, 63, 67—81, 329, 340, 358, 359
— интегральное Вольтерра 378, 380
— Матье 83
— разностное неоднородное 100—111
— — однородное 98—100
— — с изменяющимися во времени коэффициентами 109—111, 429
— — с постоянными коэффициентами 98—108, 429
— Риккати 572
— состояния дискретных систем 429, 433—436, 440
— — непрерывных систем 342—352, 374, 390
— характеристическое 247—249
— Хилла 83
— Эйлера 82
Условие коммутативности 377, 378
— Лежандра 569
Условия Коши — Римана 140
— начальные 12
— нулевые 13
— трансверсальности 568
Устойчивость абсолютная 526, 530
— асимптотическая 520
— в большом 524, 525
— полная 531
— практическая 532
— условная 543, 544

Фиксатор нулевого порядка 49
Фокус неустойчивый 490
— устойчивый 490
Форма билинейная 278
— каноническая Жордана 276—277, 350, 352
— квадратичная 278—286, 305, 306
— нормальная 261
—, определенная отрицательно 282, 283, 518, 542
—, — положительно 281, 283, 518, 542
—, полуопределенная отрицательно 282, 283, 518
—, — положительно 282, 283, 518
— эрмитова 278, 279, 282, 283
Формула Бохера 258
Функционал 566
Функция аналитическая 140, 241, 298, 299
—, гамма- 155
— Грина 87, 88
—, дельта- 49, 50, 52, 53
— дискретная 20
— импульсная 21, 24, 28
— комплексного переменного 140
— Липшица 489
— Ляпунова 518, 537, 545
— мероморфная 150
— непрерывная 16, 20
— передаточная систем дискретных 192—194, 424—426, 452
— — непрерывных 75, 136
— — нестационарных 162, 163
— матричная систем дискретных 424—426
— — — непрерывных 337, 368
— периодическая 20
— последования Пуанкаре 506
— распределения 13
— случайная 13
— специальная 22—31, 130
— характеристическая 169, 171
— штрафная 589, 590
— экспоненциальная 22, 288, 302, 303
— элементарная 19—23, 47—50

Характеристика системы временная 30, 31, 44, 138
— — импульсная 30, 31, 44, 84—88, 108, 109, 138, 159, 162, 165, 170, 192
— — — матричная 383, 396—399, 403, 464

Центр 486—489
Цепи последовательностные 430—433
Цикл предельный 502—511

Числа Фибоначчи 481
— характеристические 246, 247, 251, 253, 264

Экспонента характеристическая 388
Экстремум 565

Якобиан 497